水 利 学 报
1995年4月 SHUILI XUEBAO 第4期

从二相流方程出发研究平衡输沙
——扩散理论和泥沙扩散系数的讨论*

刘大有
(中国科学院力学研究所、中国科学院多相反应开放研究实验室)

提 要

根据力平衡原理研究泥沙浓度的垂向分布，参照湍流混合气体运动中组元间作用力的本构式的构成，给出了湍流二相流相间阻力的本构式，并由此推导了充分发展的明渠流动中泥沙浓度的垂向分布. 以本文给出的泥沙力平衡方程为基础，引入某些近似可推导出沿用至今的（泥沙运动的）扩散理论所给出的方程.

关键词 二相流，泥沙，扩散理论，泥沙的扩散系数.

一、引 言

应用泥沙运动力学的扩散理论研究悬移质浓度的垂向分布和输沙率已获初步成功，但也存在不少问题，其中之一是泥沙扩散系数应该如何确定[1]，一般认为，泥沙的湍流扩散系数 D_P^T 近似等于流体的湍流扩散系数 D_f^T，后者又近似等于流体的湍流动量交换系数 ν_f^T，事实上，由于颗粒的惯性较大，它的湍流脉动必定小于流体[2]，所以应该有 $D_p^T \leqslant \nu_f^T$. Brush. Jr 的射流试验[3,1]也证实了这一点. 但是根据已知的泥沙浓度的垂向分布. 利用扩散理论推导出的方程反推出的泥沙扩散系数 D_p^T 往往大于流体湍流动量交换系数 ν_f^T[1]，这说明该理论有缺陷. 为此，提出了各种修正办法，但都未从根本上解决.

研究物质扩散时常引用 Fick 定律. 根据 Fick 定律，扩散完全由浓度梯度推动.Fick 定律是经验性的，只在一定范围内适用，当应用于二相混合介质时，它的正确性未经充分检验. 泥沙运动的扩散理论是从 Fick 定律发展起来的，因此，难免有不完善之处.

本文从湍流二相流方程出发，参照了湍流混合气体运动中组元间作用力和湍流扩散速度的本构式构成，给出了湍流二相流相间阻力和湍流扩散速度的本构式. 在此基础上研究了充分发展的明渠流动中泥沙浓度的垂向分布. 当引入某些近似假设后可导出泥

* 本文于1992年10月13日收到，系国家自然科学基金资助.

沙运动的扩散理论所给出的方程. 由此可清楚地看到后者的近似性质，以及从垂向浓度分布反推出来的泥沙扩散系数D_p^T大于流体湍流动量交换系数ν_f^T的原因.

二、湍流液-固二相流方程和相间阻力的本构式

固相的和混合物的湍流动量方程分别为[4]

$$\frac{\partial}{\partial t}[<\sigma_p>\ll\mathbf{v}_p\gg]+\nabla\cdot[<\sigma_p>\ll\mathbf{v}_p\gg\ll\mathbf{v}_p\gg]=-<\alpha_p\nabla p>$$
$$-\nabla\cdot<\mathbf{P}_p^{PL}>-\nabla\cdot\mathbf{P}_p^T+<\sigma_p>\mathbf{g}+<\mathbf{F}_p>, \tag{1}$$

$$\sum_{k=f,p}\left\{\frac{\partial}{\partial t}[<\sigma_k>\ll\mathbf{v}_k\gg]+\nabla\cdot[<\sigma_k>\ll\mathbf{v}_k\gg\ll\mathbf{v}_k\gg]+\nabla\cdot<\mathbf{P}_k^{PL}>\right.$$
$$\left.+\nabla\cdot\mathbf{P}_k^T\right\}=-\nabla<p>+(<\sigma_f>+<\sigma_p>)\mathbf{g}. \tag{2}$$

下标p和f分别指固相和液相，符号$<\ >$和$\ll\ \gg$分别指湍流过程的平均值和质量加权平均值:

$$<\psi_k>\equiv\frac{1}{T}\int_0^T\psi_k dt,\qquad (k=f,p) \tag{3}$$

$$\ll\psi_k\gg\equiv\frac{\int_0^T\sigma_k\psi_k dt}{\int_0^T\sigma_k dt}=\frac{<\sigma_k\psi_k>}{<\sigma_k>},\qquad (k=f,p) \tag{4}$$

α_k，σ_k，ρ_k，$\mathbf{v}_k$和$\mathbf{v}_k'$分别是相k的体积分数，分密度，相密度，速度矢和湍流脉动速度矢. 设相密度ρ_k是常数，$\mathbf{P}_k^{PL}$是相k的准层流应力张量，由于本文的主要结论与它无关，解释从略；$\mathbf{P}_k^T$是相k的湍流应力张量，

$$\alpha_f+\alpha_p=1, \tag{5}$$

$$<\sigma_k>\equiv<\alpha_k\rho_k>=<\alpha_k>\rho_k,\quad (k=f,p) \tag{6}$$

$$\mathbf{P}_k^T\equiv<\sigma_k\mathbf{v}_k'\mathbf{v}_k'>,\qquad (k=f,p) \tag{7}$$

$$\mathbf{v}_k'\equiv\mathbf{v}_k-\ll\mathbf{v}_k\gg,\ (k=f,p) \tag{8}$$

p是混合物压强，$\mathbf{g}$是重力加速度矢量，$\mathbf{F}_p$是相间阻力. 许多文献研究湍流运动时常采用时均速度$<\mathbf{v}_k>$，但本文采用质量加权平均速度$\ll\mathbf{v}_k\gg$，因为当利用后者时相k的质量迁移率可简单地表示为$(<\sigma_k>\ll\mathbf{v}_k\gg)$，若用前者，则相$k$的质量迁移率应为$<\sigma_k>(<\mathbf{v}_k>+\mathbf{V}_k^T)$，其中$\mathbf{V}_k^T$是相$k$的湍流扩散速度[5]

$$\mathbf{V}_k^T=\ll\mathbf{v}_k\gg-<\mathbf{v}_k>.\qquad (k=f,p) \tag{9}$$

一般说，$<\mathbf{F}_p>$中还包括附加质量力等，但在本文中$<\mathbf{F}_p>$只保留相间阻力部分. 一般认为阻力$<\mathbf{F}_p>$是两相速度差的函数. 但是，应是什么意义上的速度差. 目前认识不统一. 大多数文献上采用时均速度差$\Delta<\mathbf{v}>$，也有采用质量加权平均速度差$\Delta\ll\mathbf{v}\gg$如

$$<\mathbf{F}_p>=\Delta<\mathbf{v}>f(\Delta<\mathbf{v}>),\qquad 或<\mathbf{F}_p>=\Delta\ll\mathbf{v}\gg f(\Delta\ll\mathbf{v}\gg), \tag{10}$$

其中

$$\Delta<\mathbf{v}_p>\equiv<\mathbf{v}_f>-<\mathbf{v}_p>,\qquad \Delta\ll\mathbf{v}\gg\equiv\ll\mathbf{v}_f\gg-\ll\mathbf{v}_p\gg=\Delta(\mathbf{v})+\Delta\mathbf{V}^T, \tag{11}$$

$$\Delta \mathbf{V}^T \equiv \mathbf{V}_f^T - \mathbf{V}_p^T. \tag{12}$$

关于气体混合物湍流运动的研究发现，不论采用式(10)中的哪一式，也不论函数f的形式多么复杂，都会导致与已知实验事实——湍流扩散系数远大于分子扩散系数——相矛盾的结果. 研究表明，在气体混合物(两组元的下标分别用 1 和 2 表示) 的湍流运动中，两组元间的作用力$<\mathbf{F}_2>$和湍流扩散速度差 $\Delta\mathbf{V}^T$ 的本构式分别为

$$<\mathbf{F}_2> = \Delta<\mathbf{v}>f_a(\Delta<\mathbf{v}>) + \Delta\mathbf{V}^T f_b(\Delta\mathbf{V}^T), \tag{13}$$

$$\Delta\mathbf{V}^T = \tau^T\left[\frac{1}{<\rho_1>}\nabla\cdot<\rho_1\mathbf{v}_1'\mathbf{v}_1'> - \frac{1}{<\rho_2>}\nabla\cdot<\rho_2\mathbf{v}_2'\mathbf{v}_2'>\right]. \tag{14}$$

在文献 [4]中给出了这方面的论证，并从物理上解释了采用上式的必要性. 作为一级近似，f_a 和 f_b 为常量. 根据类似的分析，二相流中的相间阻力也应采用如下的一般形式或一级近似表达式

$$<\mathbf{F}_p> = \Delta<\mathbf{v}>f_a(\Delta<\mathbf{v}>) + \Delta\mathbf{V}^T f_b(\Delta\mathbf{V}^T)$$

$$\approx \frac{<\sigma_f><\sigma_p>}{<\sigma_f>+<\sigma_p>}\left[\frac{\Delta\ll\mathbf{v}\gg}{\tau^L} + \left(\frac{1}{\tau^T} - \frac{1}{\tau^L}\right)\Delta\mathbf{V}^T\right], \tag{15}$$

其中 τ^L 是两相间动量交换的弛豫时间，它与单颗粒的速度驰豫时间 τ_V 的关系为

$$\tau^L = \varphi_f\tau_V, \qquad \varphi_f = \frac{\sigma_f}{\sigma_f+\sigma_p}. \tag{16}$$

φ_f 是混合物中流体的质量分数，τ^T 是两相间动量的湍流交换时间，基本上等于湍流脉动的特征时间、湍流扩散速度的本构式为

$$\Delta\mathbf{V}^T = \tau^T\left[\frac{1}{<\sigma_p>}\nabla\cdot\mathbf{P}_p^T - \frac{1}{<\sigma_f>}\nabla\cdot\mathbf{P}_f^T\right]. \tag{17}$$

三、充分发展的二维明渠中泥沙的 z 向动量方程

设 u，v，w 是速度矢 $\mathbf{v}$ 沿直角坐标系 x，y，z 的三个分量，x 轴沿主流方向，z 轴垂直于主流，方向向上. 对于充分发展的二维明渠定常流动，则有

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0, \tag{18}$$

$$\ll v_p\gg = \ll w_p\gg = \ll v_f\gg = \ll w_f\gg = 0, \tag{19}$$

$$\mathbf{n}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{P}_f^T) = \frac{\partial}{\partial z}P_{f,zz}^T = \frac{\partial}{\partial z}<\sigma_f(w_f')^2> \approx \frac{\partial}{\partial z}[<\sigma_f>\ll(w_f')^2\gg], \tag{20}$$

$$\mathbf{n}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{P}_p^T) = \frac{\partial}{\partial z}P_{p,zz}^T = \frac{\partial}{\partial z}<\sigma_p(w_p')^2> \approx \frac{\partial}{\partial z}[<\sigma_p>\ll(w_p')^2\gg], \tag{21}$$

其中 $\mathbf{n}$ 是 z 轴上的单位矢量. 代入式 (1) 和 (2) 后得到 (忽略准层流应力项，并设 $g=|\mathbf{g}|$)

$$0 = -<\alpha_p\frac{\partial p}{\partial z}> - \frac{\partial}{\partial z}[<\sigma_p>\ll(w_p')^2\gg] - <\sigma_p>g$$

$$+\frac{<\sigma_f><\sigma_p>}{<\sigma_f>+<\sigma_p>}\left(1-\frac{\tau^T}{\tau^L}\right)\left[\frac{1}{<\sigma_p>}\frac{\partial}{\partial z}(<\sigma_p>\ll w_p')^2\gg)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{<\sigma_f>}\frac{\partial}{\partial z}(<\sigma_f>\ll w_f')^2\gg)\right], \tag{22}$$

$$0=-\frac{\partial<p>}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}[<\sigma_p>\ll(w_p')^2\gg$$

$$+<\sigma_f>\ll(w_f')^2\gg]-(<\sigma_p>+<\sigma_f>)g. \tag{23}$$

设 $<\alpha_p\frac{\partial p}{\partial z}>\approx<\alpha_p>\frac{\partial<p>}{\partial z}$，$\ll(w_f')^2\gg\approx\ll(w_p')^2\gg\approx\ll(w')^2\gg=\frac{D_p^T}{\tau^T}=$ 常数，并用式(23)消去式(22)中的$\partial<p>/\partial z$，则得到

$$0=-<\alpha_f><\alpha_p>\Big[(1-\frac{\rho_f}{\rho_p})g+\frac{D_p^T}{\tau^T}(1-\frac{\rho_f}{\rho_p})^2(<\alpha_p>+<\alpha_f>\frac{\rho_f}{\rho_p})^{-1}$$

$$\times\frac{\partial<\alpha_p>}{\partial z}+\frac{\ll\varphi_f\gg}{<\alpha_f>^2}\frac{D_p^T}{\tau^L}\frac{1}{<\alpha_p>}\frac{\partial<\alpha_p>}{\partial z}\Big]. \tag{24}$$

若忽略上式方括号中的第二项，又设 $<\alpha_f>\approx1$，则上式就退化为目前经常使用的平衡输沙方程

$$U_T+D_p^T\frac{\partial}{\partial z}\ln<\alpha_p>=0. \tag{25}$$

因为颗粒的沉降速度 U_T 可表示为(参见式(16))

$$U_T=(1-\frac{\rho_f}{\rho_p})g\tau_V=(1-\frac{\rho_f}{\rho_p})\frac{\tau^L}{\ll\varphi_f\gg}g. \tag{26}$$

由式(25)和式(24)分别可得

$$D_p^T=-\frac{U_T}{\frac{\partial}{\partial z}\ln<\alpha_p>}, \tag{27}$$

和

$$D_p^T=-\frac{U_T}{\Big[\frac{1}{<\alpha_f>^2}+\frac{\tau_V}{\tau^T}(1-\frac{\rho_f}{\rho_p})^2(1+\frac{<\sigma_f>}{<\sigma_p>})^{-1}\Big]\frac{\partial}{\partial z}\ln<\alpha_p>}. \tag{28}$$

由此可见，由实测的泥沙浓度分布推算泥沙扩散系数D_p^T时，用式(27) 得到的总是大于用式(28)得到的，用式(28)计算D_p^T可望得到接近或小于流体湍流动量交换系数ν_f^T的结果.

由式(25)和式(24)还分别可得

$$-\frac{D_p^T}{\kappa U_*}\frac{\partial}{\partial z}\ln<\alpha_p>=\frac{U_T}{\kappa U_*}\equiv\zeta, \tag{29}$$

和

$$-\frac{D_p^T}{\kappa U_*}\frac{\partial}{\partial z}\ln<\alpha_p>=\frac{\frac{U_T}{\kappa U_*}}{\frac{1}{<\alpha_f>^2}+\frac{\tau_V}{\tau^T}(1-\frac{\rho_f}{\rho_p})^2(1+\frac{<\sigma_f>}{<\sigma_p>})^{-1}}\equiv\zeta_1, \tag{30}$$

若假设$D_p^T = \kappa U_* z(1-\frac{z}{h})$，$\kappa$为 Karman 常数，$U_*$为壁面摩擦速度，则由式(29)可得

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_p(a)} = \left(\frac{h-z}{z}\frac{a}{h-a}\right)^{\zeta}. \tag{31}$$

但由实测的泥沙浓度分布按式(31)推算的幂指数ζ小于$(U_T/\kappa U_*)$，而式(30)中的ζ_1也明显小于ζ，这说明式(24)中的第二项可能是造成目前理论与实验结果不符的关键.

五、结　论

1. 泥沙运动的扩散理论是以 Fick 定律为基础推导出泥沙浓度的垂向分布．Fick 定律是个经验性的物理定律，应用范围有限，当应用于二相混合介质的湍流运动时，它的正确性未经充分检验，因此，关于泥沙浓度分布的扩散方程的不完善性也是难免的.

2. 根据动量原理建立的湍流二相流动量方程 (1)和(2)较可靠，可作为研究泥沙运动的基础．当引入关于相间阻力$<\mathbf{F}_p>$的本构式(15)和湍流扩散速度的本构式(17)后，可得到较实用的泥沙运动方程，式(24)是该方程用于充分发展的二维明渠定常流时的具体形式.

3. 平衡输沙方程 (25)是在方程 (24)的基础上，忽略第二项并令$<\alpha_f>\approx 1$的结果，通过对比可见方程 (25)的近似性质.

4. 实验观测得到的泥沙浓度分布，用方程(25)解释时得出难以置信的结论："泥沙扩散系数大于水流的湍流动量交换系数"，这主要是由于忽略式(24) 中的第二项和令$<\alpha_f>\approx 1$引起的.

5. 关于泥沙浓度与垂向高度之间的关系式(31)中的幂指数ζ，实验中发现的ξ总是小于$(U_T/\kappa U_*)$的事实，利用方程 (25)不能解释，而用式(24)可很好地得到解释，而且表明这两者之差随泥沙粒度的增加而增加.

6. 由式(23)可见，在动水中由于湍流脉动的存在，$\partial<p>/\partial z \neq -(<\sigma_p>+<\sigma_f>)g$.

7. 当用于非平衡输沙时，基于动量原理的式(1)和(2)相对于迄今使用的扩散理论将显示出更大的优越性.

参 考 文 献

〔1〕 钱宁、万兆惠，泥沙运动力学．科学出版社，1983 年.

〔2〕 J. O. 欣茨，湍流(下册). 周光炯、魏中磊译，科学出版社，1987 年.

〔3〕 Brush, L. M. Jr., Exploratory study of sediment diffusion. *J. Geophys. Res.*, Vol. 67, No. 4, 1962.

〔4〕 刘大有，二相流体动力学. 高等教育出版社，1993 年.

〔5〕 刘大有、吴邦贤，扩散速度与组元的质量守恒方程. 应用数学和力学，1991 年第 11 期.

A study of sediment transport from the equations of turbulent two-phase flows

—— A discussion on diffusion theory and diffusion coefficient of sediment

Liu Dayou

(Institute of mechanics, Chinese academy of sciences, multi-phase reaction laboratory, Chinese academy of sciences)

Abstract

The vertical distribution of sediment concentration is studied based on the force equilibrium principle in the present research. The constitutive relations of the interphase drag in a turbulent two-phase flow are given, referring to the constitutive relations of the force between species in a turbulent gas-mixture flow. Finally the equation for the vertical distribution of sediment concentration in a fully developed channel flow is obtained. Based on the obtained equation, the diffusion equation of sediment currently used can be derived if some assumptions are introduced.

Key words two-phase flow, sediment, diffusion theory, diffusion coefficient of sediment.

(上接第 75 页)

of steady flow, it is proved that the flow has similarity structure at turbulent mixing region. From the theory of similarity, the similarity functions of flow function and velocity are obtained. The flow of turbulent mixing region is numerically simulated and the velocity gradient, virtual kinematic viscosity are analysed.

Key words cecum reach, turbulent mixing region, similarity structure, similarity function.