

# 非均匀性对材料分叉的作用\*

黄 涛 李国琛

(中国科学院力学研究所,北京,100080)

**摘要** 利用数值方法研究材料空洞化和承受应力沿板厚分布的非均匀性对材料分叉(平板中平面剪切带和表面皱曲)的作用.

**关键词** 非均匀性, 分叉, 剪切带, 表面皱曲, 空洞

## 1 引言

本文采用可膨胀塑体本构方程<sup>[1]</sup>,利用数值方法研究承受平面应力的平板中材料分叉(平面剪切带和表面皱曲),主要考虑沿板厚方向空洞化损伤和应力分布的非均匀性的作用.正如以往研究原始缺陷对板壳稳定性的作用一样,其意义在于:一方面可以解释理论预测值与实验值的偏差,再者也可提供材料增韧的途径.

## 2 两种材料分叉模式

已知固体的稳定性取决于具有势能含义的泛函的二次变分量  $Q$ ,在分叉时刻  $Q$  值为零且满足驻值条件(参见文献[1]第七章),对于受有空洞化损伤的材料,可以引用可膨胀塑性本构方程<sup>[1,2]</sup>,该方程含有两个可以计入损伤因素的参数  $E_{te}$  和  $E_{tm}$ ,它们分别代表等效应力-应变和由空洞化所引起的平均应力-应变两条材料曲线上的切线模量.它们的测定方法在文献[1,2]中也均有报道.研究[2]表明,用  $E_{tm}$  作为表征空洞演化的速率比 Gurson<sup>[3]</sup>模型中取空洞体积比为参数更符合分叉时的实情.

### 2.1 平面剪切带

数值计算时所采用的坐标系如图 1 所示,在厚为  $h$  的板材中形成宽为  $L$  的剪切带.它的法向轴线为  $x_\alpha$ ,其延伸方向是  $x_\beta$  轴.单向拉伸应力  $\sigma$  作用在  $x_1$  轴的方向.分叉前是平面应力状态,仅有  $\sigma_{11}=\sigma$ ,其他各应力分量均为零.

分叉时,速率扰动的模式为

$$\left. \begin{aligned} \delta V_\alpha &= \sin \frac{\pi x_\alpha}{L} V_1(x_3) \\ \delta V_\beta &= \sin \frac{\pi x_\alpha}{L} V_2(x_3) \\ \delta V_3 &= \delta V_{\alpha,\beta} = \delta V_{\beta,\beta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

此外还需符合:平板表面应力率扰动,带宽两端应力率扰动沿板厚的积分为零,带宽中轴线上速率扰动为零以及速率扰动的分布应对称于板中面各项边界条件.

### 2.2 表面皱曲

\* 国家自然科学基金和中国科学院基金联合资助项目.

1994-11-01 收到第 1 稿,1995-10-06 收到修改稿.

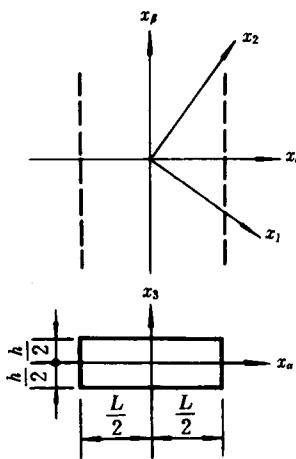


图 1 平面剪切带示意图

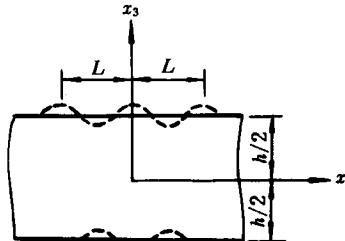


图 2 表面皱曲示意图

图 2 示意了单向拉伸情况下, 在厚为  $h$  的板材表面上所形成的波长为  $L$  的表面皱曲。其波长小于或远小于板厚, 即  $h/L \gg 1$ ; 反之则认为是颈缩。分叉前受力状态与前相同, 仅有单向拉伸应力  $\sigma$  作用在  $x_1$  轴方向。

表面皱曲的分叉模式为

$$\left. \begin{aligned} \delta V_1 &= \sin \frac{2\pi x_1}{L} V_1(x_3) \\ \delta V_3 &= \cos \frac{2\pi x_1}{L} V_2(x_3) \\ \delta V_2 &= \delta V_{1,2} = \delta V_{3,2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

在边界上, 有关应力率扰动所应满足的条件与前相同; 在几何上, 速率扰动的分布应对称于两个中轴面。

(1) 和 (2) 两式中的  $V_1(x_3)$  和  $V_2(x_3)$  是两个沿厚度方向分布的待定函数, 可以用差分方法使其离散化。将(1) 或 (2) 分别代入  $Q$  的表达式(从略, 参见[1]) 并取其驻值条件就能求解有关的分叉模式及其相应的临界应力。

设  $E$ ,  $\nu$  和  $\varepsilon_y$  分别为弹性模量, Poisson 系数和屈服应变。参考实际钢材情况<sup>[2]</sup>, 取  $\nu = 0.3$ ,  $\varepsilon_y = 0.002$ ,  $E_{te}/E = 0$  又  $E/E_{tm} = 100$ 。计算临界应力  $\sigma_{cr}$  并除以屈服应力  $\sigma_y$ 。由此得到

$$\left. \begin{aligned} \text{表面皱曲: } \sigma_{cr}/\sigma_y &= 1.650 \quad (h/L > 3.0) \\ \text{平面剪切带: } \sigma_{cr}/\sigma_y &= 1.657 \quad (h/L > 1000) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

表面皱曲的临界值略小于平面剪切带, 前者的波长比板厚要小, 而后者的宽度仅在极窄小的范围内。图 3(a) 和 (b) 分别绘制了平面剪切带与表面皱曲的速率扰动沿半厚度上的分布。

### 3 空洞化不均匀性对材料分叉的作用

令

$$e = \frac{E}{E_{tm}}, \quad D_1 = \frac{e_b}{e_a} \quad (4)$$

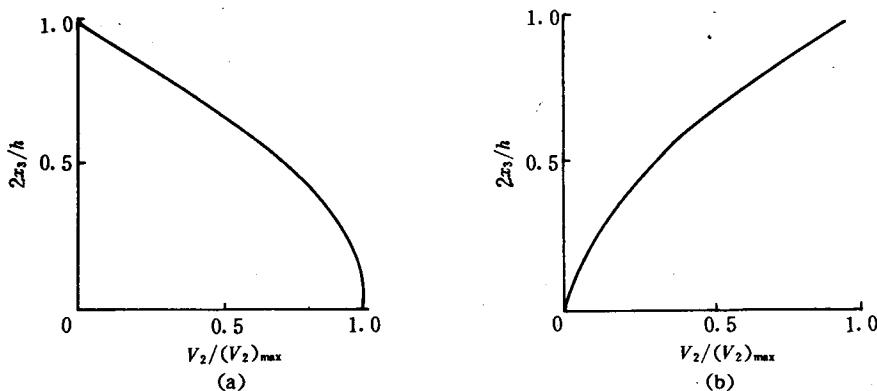


图3 (a)平面剪切带与(b)表面皱曲的速率扰动沿板半厚的分布

如图4所示三种不均匀性沿板的半厚度上的分布。当  $D_1 > 1$ , 表示局部  $e_s$  值大于其余均匀区域的  $e_s$  值, 反之则小。 $e_s > e_s$  意味着  $E_{un}$  值在局部区域减小也就是空洞化速率加大, 反之表明局部区域内的空洞化速率减弱。

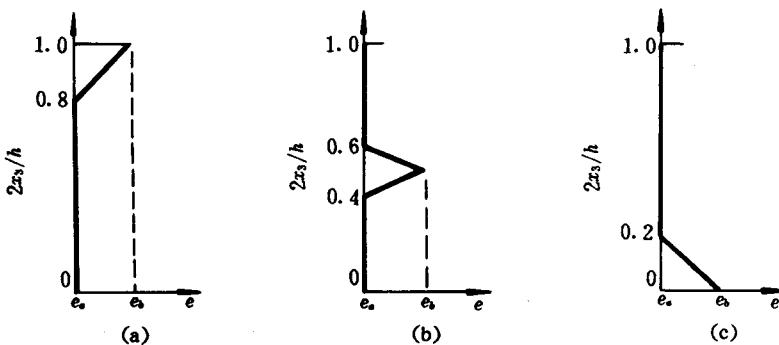


图4 非均匀性沿板半厚的三种分布模式

取  $F_i$  为  $e_s \neq e_s$  时沿板宽方向单位长度上的临界力,  $F_0$  为  $e_s = e_s$  时的值。从  $F_i/F_0$  随  $D_1$  的变化可以看到各类不均匀度对临界值的影响。图5(a)和(b)分别给出了针对平面剪切带与表面皱曲的结果。由图可见, 当  $D_1 > 1$ , 也即局部空洞化速率偏大, 则临界力降低; 当不均匀性的分布与扰动的本来分布(图3)相重合时, 则削弱尤甚。所以不均匀模式(c)对于平面剪切带, 而模式(a)对于表面皱曲有着最大的降低作用。当  $D_1 < 1$ , 则可以维持原有的稳定性,  $F_i/F_0$  近乎为 1 甚至还有略微提高。

所以, 抑制空洞化速率, 即使是局部的, 也有利于维护材料的稳定性, 推迟材料分叉。

#### 4 应力不均匀性对材料分叉的作用

若单向拉伸应力  $\sigma$  沿板厚度分布是不均匀的, 其分布模式仍可设为图4中所示的三种。

只要改设

$$D_2 = \sigma_b / \sigma_a \quad (5)$$

当  $D_2 > 1$  则表示局部应力  $\sigma_b$  大于其均匀分布的  $\sigma_a$ , 反之则小于.

计算平面剪切带与表面皱曲两种分叉形式下  $F_i/F_0$  随  $D_2$  的变化, 其分布形式(图形从略)与图 5 非常相似. 局部高应力将降低材料的总体临界力, 尤其是当高应力的峰值位置与本来扰动波型(图 3)的最大点相重合时, 降低最甚.

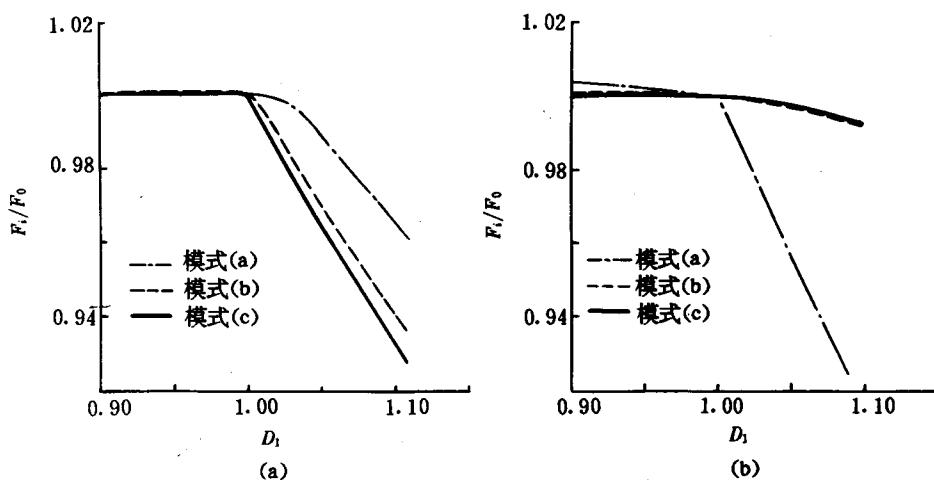


图 5 非均匀性对(a)平面剪切带和(b)表面皱曲的作用

## 5 结论

从所积累的算例中可以归纳出以下一些看法:

(1) 空洞化或应力分布的非均匀性通常是板材稳定性的薄弱环节, 促使分叉临界应力降低.

(2) 尤其是当非均匀性分布的形态与本来速率扰动的分布特征相近时, 降低作用也更突出.

(3) 局部增强材料使  $D_1 < 1$ , 抑制空洞化, 可以比随机的  $D_1 > 1$  状态提高材料的稳定度.

结论(1)和(2)可以解释为什么实验临界值往往低于理论预测值. 结论(3)则表明, 通过工艺措施使板材表层强化, 延缓损伤, 有利于材料的总体韧性.

## 参 考 文 献

- 1 李国琛, M 耶纳. 塑性大应变微结构力学. 北京: 科学出版社, 1993
- 2 李国琛, 朱辰. 剪切带状分叉. 力学学报, 1994, 26(1): 31—38
- 3 Gurson A L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. J Eng Mat Technol, 1977, 99: 2—15

## THE EFFECTS OF NONUNIFORMITY ON MATERIAL BIFURCATION

Huang Tao Li Guochen

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080*)

**Abstract** The effects of the nonuniformity of porosity development and stress distribution on material bifurcations(plane shear banding and surface wrinkling) are investigated by means of numerical method.

**Key words** nonuniformity, bifurcation, shear band, surface wrinkling, void