维普资讯 http://www.cqvip.com

54-61

第14卷 第1期
1996年3月

空 气 动 力 学 学 报
ACTA AERODYNAMICA SINICA

Vol.14, No.1
Mar., 1996

关于一维非定常气-固二相流特征理论的讨论

刘大有 董飞 李洪州
中国科学院力学研究所，北京(邮政编码 100080)

摘要 本文研究了一维非定常气-固二相流的特征，对于目前常用的、包含一定近似的运动方程组，它有两个虚部很小的复根，研究表明这种很小的虚部出现与方程中引入的近似有关。从十多个算例的结果看，这样的虚部不影响人们在工程计算中用该方程组求解初值问题。

针对具有上述特征的气-固二相流方程组，本文发展了一种类特征线方法，它保留了双曲型方程特征线方法的若干优点，但它允许方程的特征根中有微小的虚部。含灰气体激波管流动的计算表明，类特征线法具有精度高、数值耗散和弥散小等优点。

关键词 特征线法，类特征线法，气-固二相流，激波管。

C359

引 言

众所周知，在气体动力学中，关于一维非定常运动的方程组是典型的双曲型一阶拟线性方程组，在 t-x 平面上有三族特征线：流线、右行马赫线和左行马赫线。每一族特征线都有深刻的物理意义：流线反映流体微团在 t-x 平面上的运动轨迹，右行和左行马赫线反映扰动向前和向后传播的规律。马赫线在 t-x 平面上的分布也显示了点 $P(t, x)$ 的运动状态的影响区和依赖区。数值方法上有差分法和特征线方法等，从广义上说，特征线法也是一种差分法，是沿特征线方向将微分方程离散化的一种方法。由于其计算是沿特征线方向推进的，所以特征线方法(与差分法比较)能更深刻地反映流动的物理本质，并有精度高，不会出现数值耗散和弥散等优点。

关于一维非定常的气-固二相流，当采用目前常用的近似运动方程组，即在相间力中忽略了除压差力和阻力以外的所有其它力、设相间传热率正比于两相的温度差时，特征方程组的六个根中有两个虚部很小的复根[1,2]，因此运动方程组不是典型的双曲型，通常意义上的特征线方法不适用。但事实上气-固二相流仍有许多类似于气体的运动特征和扰动传播特征，在二相流计算中若能保留特征线法的若干优点常常很有意义，甚至比在气体动力学计算中意义更大，因为在二相流中一般都存在物理耗散机制，当有激波存在而且强度比较低时，在物理上也存在激波弥散的机制[2,3]，在计算中若能避免数值耗散和弥散，这对于研究流动本身的物理过程非常有益。事实上，现在关于二相流的计

本文于1994年9月28日收到，1995年4月3日收到修改稿。

维普资讯 http://www.cqvip.com

算大多采用差分法，因此当流动中有激波存在时数值弥散效应很严重[4,5]。

本文根据二相流方程组的特征方程"有复根但虚部很小"的特点，提出了一种保留特征线方法主要特点的类特征线方法，此方法应用于含灰气体激波管流动的计算[6,7]，得到了较高的计算精度和精细的激波结构，包括激波弥散的物理过程。

本文第一节介绍目前常用的一维非定常气-固二相流方程组及其特征方程，目的是：

(1) 强调该方程组是近似的；

(2) 根据目前二相流体动力学的发展水平，这种近似是难免的；

(3) 虽然引进了近似，但它还是保留了二相流动的各主要因素，因而用该方程组求解是有意义的；

(4) 复特征根的出现与目前引入的近似有关，因为引入进一步的近似——其量级与原方程组中包含的近似相当——可以消除复特征根的虚部；

(5) 只要复特征根中的微小虚部不影响数值计算进行，即在工程上感兴趣的计算域内未引起计算不稳定和发散等现象，就没有必要为消除虚部而引入新的近似。

在第二节介绍一维非定常气-固二相流方程组的类特征线方法以及用它计算的某些算例的主要结果，强调了：

(1) 本方法所用的沿类特征线之相容关系与原方程组等价，是恒等变换的结果；

(2) 这些相容关系反映了二相流中扰动传播的主要特征；

(3) 计算结果有较高的精度以及精细的激波结构。

一、一维非定常气-固二相流方程组与特征方程

一维非定常、无相变、无摩擦、等截面气-固二相流水平流动方程组为[2]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g\rho_g)+\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g\rho_g u_g)=B_1 \tag{1}$$

$$\alpha_g\rho_g\left[\frac{\partial u_g}{\partial t}+u_g\frac{\partial u_g}{\partial x}\right]+\alpha_g\frac{\partial p}{\partial x}=B_2 \tag{2}$$

$$\alpha_g\rho_g\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\gamma R}{\gamma-1}T_g+\frac{1}{2}u_g^2\right)+u_g\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma R}{\gamma-1}T_g+\frac{1}{2}u_g^2\right)\right]-\alpha_g\frac{\partial p}{\partial t}=B_3 \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_p\rho_p)+\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_p\rho_p u_p)=B_4 \tag{4}$$

$$\alpha_p\rho_p\left[\frac{\partial u_p}{\partial t}+u_p\frac{\partial u_p}{\partial x}\right]+\alpha_p\frac{\partial p}{\partial x}=B_5 \tag{5}$$

$$\alpha_p\rho_p c\left[\frac{\partial T_p}{\partial t}+u_p\frac{\partial T_p}{\partial x}\right]=B_6 \tag{6}$$

$$p=\rho_g RT_g\,,\qquad \alpha_g+\alpha_p=1$$

$$\rho_p=\text{常数}\,,\qquad \gamma=\text{常数}$$

其中

$$B_1=0,\quad B_2=-f,\quad B_3=-u_p f-Q,\quad B_4=0,\quad B_5=f,\quad B_6=Q$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

u^k、α_k、ρ_k 和 T_k 分别为相 k($k=g$ 为气相，$k=p$ 为固相)的速度、体积分数、相密度和温度，p 为压强，R 为气体常数，γ 为气相的比热比，c 为固相比热，f 为除压差力($\mp\alpha_p\cdot(\partial p/\partial x)$)以外的相间力，$Q$ 是相间传热率。

一般说来，相间力 f 由阻力 f_1，附加质量力 f_2 和 Basset 力 f_3 等组成。在流场中存在大量颗粒的条件下，关于流体-颗粒间作用力的研究虽有不少论文，但目前仍未成熟，尤其是对后两种力的研究。下面借用无界流场中单颗粒的受力公式分析一下这三种力的量级。设 $\xi(t)$ 描写流场中某点 P 的气体速度随时间 t 的变化，按Fourier积分形式展开，$\xi(t)$ 可表示为

$$\xi(t)=\int_0^\infty[a_1\cos\omega t+a_2\sin\omega t]\mathrm{d}\omega$$

采用陈善谟[8]分析湍流中微粒运动所用的理论和引入的近似假设，可以证明，相间力 f 中三部分的比例大约是

$$\text{阻力}:\text{Basset 力}:\text{附加质量力}=1:\sqrt{\theta}:\theta$$

其中

$$\theta=\frac{\rho_g}{\rho_p}\omega\tau_0=\frac{\omega d^2}{18\nu} \tag{7}$$

τ_0 是颗粒的弛豫时间，ν 是气体的运动粘性系数。除气体速度正经受着某种快速变化、即 $\xi(t)$ 中包含较大的高频分量外，一般说 θ 很小，Basset 力和附加质量力都比阻力小得多。

由于 Basset 力和附加质量力很小，也由于在颗粒群条件下对这两个力的研究很不成熟，即使引入某个近似公式(这种公式往往很复杂，参见文献[9])，也未必能改进计算精度，所以目前在气-固二相流研究中一般都忽略这两个力，即，$f\approx f_1$。阻力 f_1 是两相速度差的函数，不含对 t 和对 x 的任何偏导数，所以，虽然它的具体形式还需探索，但这些都不影响特征方程的根和对特征理论的讨论。

相间传热项 Q，一般说是两相温度差的函数，目前常用的近似式中也不含对 t 和对 x 的任何偏导数。

按照以上分析和引入的近似，(1)～(6)式的右边都不含偏导数，由左边各项确定的特征方程为[1,2]

$$(u_g-\lambda)(u_p-\lambda)\left[(u_g-\lambda)^2(u_p-\lambda)^2-a_g^2(u_p-\lambda)^2-\frac{\alpha_p\rho_g}{\alpha_g\rho_p}a_g^2(u_g-\lambda)^2\right]=0 \tag{8}$$

其中 $a_g=\sqrt{\gamma RT_g}$ 是气相中的声速，当 $0<|u_g-u_p|<a\{1+[(\alpha_p/\alpha_g)(\rho_g/\rho_p)]^{1/2}\}^{3/2}$ 时，方程(8)有四个实根 λ_1，λ_2，λ_3，λ_4 和两个复根 λ_5 和 λ_6。

$$\lambda_1=u_g \tag{9}$$

$$\lambda_2=u_p \tag{10}$$

$$\lambda_{3,4}\approx\frac{\alpha_g\rho_p u_g+\alpha_p\rho_g u_p}{\alpha_g\rho_p+\alpha_p\rho_g}\pm a_g\left[1-\frac{3}{2}\frac{\alpha_g\alpha_p\rho_g\rho_p}{(\alpha_g\rho_p+\alpha_p\rho_g)^2}\frac{(u_g-u_p)^2}{a_g^2}\right]\approx u_g\pm a_g \tag{11}$$

$$\lambda_{5,6}\approx\frac{\alpha_g\rho_p u_p+\alpha_p\rho_g u_g}{\alpha_g\rho_p+\alpha_p\rho_g}\pm i\frac{\sqrt{\alpha_g\alpha_p\rho_g\rho_p}}{\alpha_g\rho_p+\alpha_p\rho_g}(u_g-u_p)\approx u_p\pm i\sqrt{\frac{\alpha_p\rho_g}{\alpha_g\rho_p}}(u_g-u_p) \tag{12}$$

由于一般说来有

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$\rho_g \ll \rho_p\ ,\quad \alpha_p < \alpha_g \quad 或 \quad \alpha_p \sim \alpha_g \tag{13}$$

所以，复根 $\lambda_{5,6}$ 的虚部很小。

下面将证明，若在原方程组(1)～(6)中引入进一步的近似——忽略一个量级为ρ_g/ρ_p的项，就能使方程组的所有特征根变为实根。

用方程(2)消去方程(5)中的$\partial p/\partial x$项，结果有

$$\alpha_p\alpha_g\left[\rho_p\left(\frac{\partial u_p}{\partial t}+u_p\frac{\partial u_p}{\partial x}\right)-\rho_g\left(\frac{\partial u_g}{\partial t}+u_g\frac{\partial u_g}{\partial x}\right)\right]=\alpha_g B_5-\alpha_p B_2$$

若忽略左边方括弧中的第二项，就得到

$$\alpha_p\rho_p\left(\frac{\partial u_p}{\partial t}+u_p\frac{\partial u_p}{\partial x}\right)\approx B_5-\frac{\alpha_p}{\alpha_g}B_2 \tag{14}$$

用它代替方程(5)，就能使$\lambda_{5,6}$变为实根。由此可见，原方程复特征根的出现不一定是本质的，很可能是引入近似的相间力(如忽略Basset力和附加质量力等)和相间传热率带来的。只要$\lambda_{5,6}$中的微小虚部不致造成计算不稳定，就没有必要引入新的近似。

二、一维非定常气-固二相流的类特征线方法

用$(\gamma-1)$和$[-(\gamma-1)u_g]$分别乘以(3)式和(2)式，然后相加，并利用 $p=\rho_g RT_g$ 消去(RT_g)后可得

$$\alpha_g p\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_g\frac{\partial}{\partial x}\right)[\ln p-\gamma\ln\rho_g]=(\gamma-1)(B_3-u_gB_1) \tag{15}$$

用$(\gamma-1)$，$[-(\gamma-1)u_g\pm a_g]$和(γRT_g)分别乘以(3)式、(2)式和(1)式，然后相加，可得

$$\begin{aligned}&\alpha_g p\left[\frac{\partial}{\partial t}+(u_g\pm a_g)\frac{\partial}{\partial x}\right]\ln p\pm\frac{\gamma\alpha_g p}{a_g}\left[\frac{\partial u_g}{\partial t}+(u_g\pm a_g)\frac{\partial u_g}{\partial x}\right]\\&-\gamma p\left[\frac{\partial\alpha_p}{\partial t}+(u_g\pm a_g)\frac{\partial\alpha_p}{\partial x}\right]\pm\gamma p a_g\frac{\partial\alpha_g}{\partial x}\\&=(\gamma-1)[B_3-u_gB_1+c\ T_gB_1]\pm a_gB_2\end{aligned} \tag{16}$$

(4)、(5)和(6)式分别改写如下

$$\left(\frac{\partial\alpha_p}{\partial t}+u_p\frac{\partial\alpha_p}{\partial x}\right)+\alpha_p\frac{\partial u_p}{\partial x}=\frac{B_4}{\rho_p} \tag{17}$$

$$\left(\frac{\partial u_p}{\partial t}+u_p\frac{\partial u_p}{\partial x}\right)+\frac{1}{\rho_p}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{B_5}{\alpha_p\rho_p} \tag{18}$$

$$\frac{\partial T_p}{\partial t}+u\frac{\partial T_p}{\partial x}=\frac{B_6}{\alpha_p\rho_p c} \tag{19}$$

对于典型的双曲型方程组，如一维非定常的气体动力学方程组[10]，对原始各方程总能找到某种线性组合方式，使变换后的方程组的每个方程具有这样的特点：左边是沿某方向的全微分，右边是不含任何偏导数的代数式。这就是特征线上的相容性关系，而全微分的方向就是相应的特征方向。只有沿特征方向的全微分才可用代数式表示，这正

维普资讯 http://www.cqvip.com

是特征方向有别于其它方向的重要特点。

以上各式的右边都不含偏导数项，左边的主要部分是沿某方向 $\Delta x/\Delta t$ 的全微商，对于(15)～(19)式该方向分别是u_g，$u_g\pm a_g$，u_p，u_p和u_p。除此之外，其中某些方程的左边还留下了一个沿 x 方向的偏导数项，如(16)式中的$[\pm\gamma pa_g(\partial\alpha_p/\partial x)]$，(17)式中的$\alpha_p(\partial u_p/\partial x)$和(18)式中的$(1/\rho_p)(\partial p/\partial x)$。由于原方程(1)～(6)不是典的型双曲型方程，因此，这些残余的偏导数项是不可避免的。若采用其它的线性组合方式，也许还可以使留下的偏导数项更少些，但类特征方向的表达式和方程中全微分部分的表达式都会变得很复杂，不利于计算。

下面考察一下(15)和(16)式反映的物理意义。

(15)式可改写为

$$T_g\left(\frac{\partial s_g}{\partial t}+u_g\frac{\partial s_g}{\partial x}\right)=[-Q+(u_g-u_p)f]/(\alpha_g\rho_g) \tag{20}$$

其中s_g是气相的比熵。(15)式或(20)式是沿气相流线上的相容关系，它表明，相间传热和相间阻力作用都会引起气体熵变化。由于阻力 f 的符号与(u_g-u_p)一致，所以阻力作用使气体的熵恒增；而相间传热引起的熵变化则依热流的方向而定。

(16)式可改写为

$$\begin{aligned}&\alpha_g\left[\frac{\partial p}{\partial t}+(u_g\pm a_g)\frac{\partial p}{\partial x}\right]\pm\frac{\gamma\alpha_g p}{a_g}\left[\frac{\partial u_g}{\partial t}+(u_g\pm a_g)\frac{\partial u_g}{\partial x}\right]\\&-\gamma p\left[\frac{\partial\alpha_p}{\partial t}+(u_g\pm a_g)\frac{\partial\alpha_p}{\partial x}\right]\pm\gamma pa_g\frac{\partial\alpha_p}{\partial x}\\&=(\gamma-1)[-Q+(u_g-u_p)f]\mp a_g f\end{aligned} \tag{21}$$

由于气-固二相流中的声速(更确切地说是冻结声速)近似等于气相声速a_g，因此(16)式或(21)式基本上反映了相间作用引起的扰动在向前和向后传播过程中压强p、气相速度u_g和固相体积分数$\alpha_p(=1-\alpha_g)$之间的微分关系。右边的第一项表明，相间阻力和传热引起的气相熵的增加，产生向前和向后的压缩波；右边的第二项表明，阻力作用还引起向前为膨胀，向后为压缩的扰动波。当$a_g\gg|u_g-u_p|$时(流场中的大部分区域和流动的大部分时间都满足此条件)，右边第二项中的阻力效应远大于第一项中的阻力效应。

流场中任何一点只要存在相间速度差或温度差，都会引起相间相互作用，都会产生向前和向后传播的扰动。如果在流场的某一区域内每一点都存在相间速度差和温度差，则各点都会产生扰动，并在传播过程中互相叠加。

若将(15)～(19)各式沿各自的类特征方向离散化进行计算，可以期望数值耗散和弥散将很小。事实上，我们用方程(15)～(19)计算了含灰气体激波管流动，得到较高的数值计算精度和精细的激波结构[6,7]，包括弱激波在含灰气体中传播时的物理弥散过程。

表 1 给出了用类特征线法计算无限长含灰气体激波管流动所得的结果，p_{41} 是膜压比。表 1 (a)是高压室含灰气体激波管流动，α_4是 4 区(高压室)的α_p的初值，表中列出了$t\to\infty$时气体激波($x_S(t)$是它在 t-x 平面上的轨迹)上的压强计算值 $\lim\limits_{t\to\infty}p(x_S(t),t)$，它的精确值$p_{2s}$——从平衡流的解析解求得。以及同$p_{2s}$相比表明的数值计算误差$\eta$。表 1 (b)

维普资讯 http://www.cqvip.com

是低压室含灰的激波管流动，α_1是 1 区（低压室）的α_p的初值，表中列出了$t\to\infty$时气体接触面（$x_C(t)$是它在 t-x 平面上的轨迹）上的压强计算值$\lim\limits_{t\to\infty} p(x_C(t),t)$，它的精确值$p_{2e}$，以及数值计算误差$\eta$。从表中数据可见，数值计算误差是很小的。

表 1　非平衡计算结果及其与平衡解的比较[6,7]

Table 1　The results of nonequilibrium calculation and the comparing them with equilibrium solutions

(a)

p_{41}	α_1	$\lim\limits_{t\to\infty} p(x_C(t),t)$	p_{2e}	η(%)
10	0.001	2.8280	2.8287	0.03
	0.01	2.5617	2.5689	0.28
	0.1	1.7410	1.7477	0.38
	0.6	1.2249	1.2205	0.35
5	0.001	2.0978	2.0985	0.04
	0.01	1.8374	1.8429	0.30
	0.1	1.3617	1.3623	0.08

(b)

p_{41}	α_1	$\lim\limits_{t\to\infty} p(x_C(t),t)$	p_{2e}	η(%)
10	0.001	3.3193	3.3173	0.06
	0.005	4.4324	4.4055	0.61
5	0.001	2.3666	2.3656	0.04
	0.005	2.9176	2.8856	1.11

本文提出的类特征线法也可推广应用到某些其它流动，即使它可以用典型的双曲型方程来描写。如果该方程一级近似的特征根和相容关系都比较简单，但二级近似的特征根和相容关系相当复杂，计算时就可以考虑用一级近似的特征网格（对于二级近似来说是类特征线），但相容关系可以由二级近似的原方程线性组合推导出来。虽然此相容关系中保留了一部分偏导数项，但计算仍可有较高的精度。

三、结论和讨论

1．双曲型方程特征线上的相容关系都是原方程组各式的某种线性组合，各相容关系线性独立。沿特征线方向离散化，即特征线方法，具有精度高、可避免数值耗散和数值弥散等优点。

2．根据目前二相流发展的水平，相间力和相间传热率本构式中引入某种近似是不可避免的；对于气-固流，忽略除压差力和阻力以外的相间力、采用与两相温度差成正比的相间传热率，在目前是一种合理的近似。

3．引入上述近似后的气-固二相流方程组的六个特征根中，有两个是含有很小虚部的复根。

4．若在上述近似气-固二相流方程的基础上引入新的近似——其量级与原方程中包含的近似相当，则可避免出现复特征根，这说明原方程中复特征根的出现很可能与相间相互作用中包含的近似有关。

5．以含灰气体激波管流动为例所作的十多组参数的初值问题计算，未见数值不稳定现象，而且数值计算误差也很小，这表明复根中很小的虚部的存在不一定说明初值问题提出不合理，至少不影响人们进行工程计算，没有必要为了消除复根而引入新的近似。

维普资讯 http://www.cqvip.com

6. 对气-固二相流方程组(1)～(6)进行线性组合可以得到具有以下特点的新形式的微分方程组(15)～(19)：每一方程左边的主要部分是某个量沿某一特定方向(本文称之为类特征方向)的全微分，右边是一代数式，很像双曲型方程沿特征线的相容关系。利用这组方程并沿类特征方向离散化——本文称之为类特征线方法——所作的计算表明，这种方法有类似于特征线方法的优点：精度高，数值耗散和弥散很小。

7. 在气-固二相流方程组(1)～(6)中没有计入由如下的无规则运动所产生之应力：由颗粒-颗粒碰撞及颗粒-壁面碰撞所引起的无规则运动。当固相浓度较高、尤其颗粒粒度不均匀时，这种应力对流动会有较大影响。因此，本文的结论对较密的(例如，$\alpha_p>0.05$～0.1)气-固流的适用性，还有待进一步研究。

参 考 文 献

1 刘 卓. 含固体微粒的高压气体的膨胀[硕士学位论文]. 北京大学，1985.

2 刘大有. 二相流体动力学. 北京:高等教育出版社，1993.

3 Rudinger G. Fundamentals of Gas-Particle Flow. Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam, 1980.

4 Miura H, Glass I I. On a Dusty-Gas Shock Tube. UTIAS Report, No.250, CN ISSN 0082-5255, 1982.

5 杜锡鑫，陈宇龙. 流体网格法应用于粉末-气体激波管流动特性的研究. 中国气动研究与发展中心报告，1984.

6 李洪州，刘大有. 高压段含有颗粒的含灰气体激波管流动的数值模拟. 空气动力学学报，1995，13(3)：239～247

7 李洪州，刘大有. 低压段含有颗粒的含灰气体激波管流动. 中国科学院力学研究所报告，IMCAS STR-93002，1993.

8 Tchen C M. Mean Value and Correlation Problems Connected with the Motion of Small Particles Suspended in a Turbulent Fluid. Ph. D. thesis, Delft, 1949.

9 Drew D, Cheng L, Lahey R T J. The Analysis of Virtual Mass Effects in Two-Phase Flow. *Int. J. of Multiphase Flow*, 1979, 5:233～242

10 Shapiro A M. The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Flow. Vol. II, Ronald Press Company, New York, 1954.

维普资讯 http://www.cqvip.com

On the Characteristic Theory of One-Dimensional Unsteady Gas-Solid Two-Phase Flows

Liu Dayou　Dong Fei　Li Hongzhou
(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science)

Abstract The characteristics of the one-dimensional, unsteady gas-solid two phase flows have been studied in this paper. For the usually used set of motion equations which includes some approximations, there are two complex eigenvalues with a very small imaginary part. It is showed that the appearance of the imaginary parts is related to the introduction of these approximations. In view of more than ten examples, such small imaginary parts do not influence solving the initial-value problems of the set of equations in engineering calculations.

According to the set of equations of gas-particle flows possessing such characteristics, a quasi-characteristic method has been developed in this paper. It holds some advantages of he characteristic method, still allows very small imaginary parts exist in the eigenvalues. The completed calculations of the flows in a dust-gas shock tube show that the quasi-characteristic method has the advantages of high precision and small numerical dissipation and dispersion.

Key words characteristic method, quasi-characteristic method, gas-solid two phase flows, shock tube.