

铰接圆柱体在二色波中的二阶低频力¹⁾

周显初

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 考虑了铰接圆柱体的响应, 给出了二色波中铰接在海底的圆柱体的二阶低频力. 在未求出二阶速度势的情况下, 利用其定解条件给出了二阶速度势的影响, 给出了二阶低频力的解析表示式. 二阶低频力主要由一阶速度势决定. 二阶入射速度势以及圆柱的二阶响应对二阶低频力的影响可以忽略.

关键词 二阶低频力, 铰接圆柱

引 言

由于海洋石油开发和海洋工程的需要, 波浪对物体的作用力的研究正日趋完善. 波浪对物体的作用力的线化理论已经成熟. 二阶作用力尽管其数值比一阶的要小得多, 但由于波浪本身的非线性相互作用会产生对结构物的低频作用力, 而很多海洋结构物(如系泊系统等)在水平方向或铅垂方向的恢复力很小, 因而对应的振荡自然周期较大, 可能会与低频作用力产生强烈的共振. 所以海洋结构物的低频作用力一直受到海洋工程界的重视.

在海底铰接的圆柱体是设计者在海洋工程中采用的新的结构之一. Drake^[1] 等人研究了规则波中铰接圆柱的飘移力. 他们考虑了铰接圆柱体的响应, 并且给出了二阶平均飘移力的解析表达式. 本文把该项工作推广到二色波. 对于包含几个频率的不规则波的问题, 完全可以用同样的方法加以处理. 我们在不求出二阶速度势的情况下, 利用其定解条件来考虑二阶速度势的影响, 给出了二个波浪频率时二阶低频力的解析表达式, 并且得出: 在二种频率相差不太大和平均频率不太低的情况下二阶速度势引起的低频力确实是比较小的. 二阶低频力主要由一阶速度势相互作用而决定. 二阶入射速度势以及圆柱的二阶响应对二阶低频力的影响可以忽略.

1 二阶低频力

如图 1 所示, 引入固定在空间和固定在圆柱上的二套坐标系. 在不可压缩的理想流体中, 铰接在海底的圆柱在铅垂平面内在入射波方向作小振幅摆动.

速度势 ϕ , 物体的响应 ψ 等可以按小量 ϵ 展开

$$\begin{aligned}\phi &= \epsilon\phi^{(1)} + \epsilon^2\phi^{(2)} + \dots \\ &= [\epsilon(\phi^{(1,1)}e^{-i\omega_1 t} + \phi^{(1,2)}e^{-i\omega_2 t}) + \epsilon^2(\phi^{(2)}e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}) + \dots] + \text{c.c.}\end{aligned}\quad (1)$$

¹⁾ 中国科学院资环局资助.

1993-09-23 收到第一稿, 1995-03-09 收到修改稿.

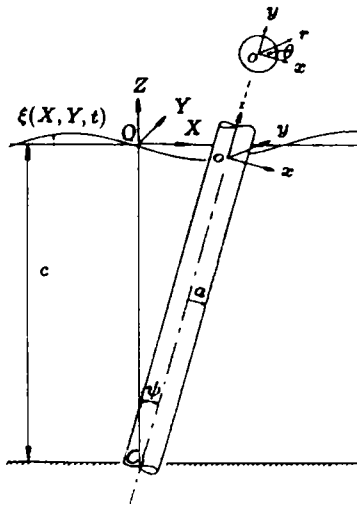


图 1 铰接圆柱的坐标系

Fig.1 Coordinate systems of an articulated cylinder

$$\begin{aligned} \Psi &= \varepsilon \Psi^{(1)} + \varepsilon^2 \Psi^{(2)} + \dots \\ &= [\varepsilon(\psi^{(1,1)} e^{-i\omega_1 t} + \psi^{(1,2)} e^{-i\omega_2 t}) \\ &\quad + \varepsilon^2(\psi^{(2)} e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + \dots)] + \text{c.c.} \quad (2) \end{aligned}$$

在二阶量中应该含有 $0, \omega_1 - \omega_2, \omega_1 + \omega_2, 2\omega_1, 2\omega_2$ 等各种波的成份, 由于我们只对低频感兴趣, 为了简单起见, 以后我们提到二阶量均指含 $\omega_1 - \omega_2$ 波成分的二阶量.

按文献 [1] 的推导, 二阶水平力为

$$\begin{aligned} F_X^{(2)} &= \rho a \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-d}^0 \left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} + (z+d) \Psi^{(1)} \right. \right. \\ &\quad \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r \partial t} \cos \theta - \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{a \partial \theta \partial t} \sin \theta \right) \\ &\quad - a \cos \theta \Psi^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi^{(1)}|^2 \Big] dz \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} g (\zeta_r^{(1)})^2 - a \Psi^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} \Big|_{z=-d} \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos \theta \right\} \cos \theta d\theta \quad (3) \end{aligned}$$

其中, d 为流体深度, a 为圆柱半径, ρ 为流体密度, $\zeta_r^{(1)}$ 为动坐标系中一阶相对波高

$$\zeta_r^{(1)} = \zeta^{(1)} + a \cos \theta \Psi^{(1)} \quad (4)$$

一阶速度势为

$$\begin{aligned} \phi^{(1,j)} &= -\frac{igA_j}{2\omega_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(k_j R) \xi_0(k_j Z) \cos n\theta \\ &\quad - i\omega_j A_j \hat{\psi}^{(1,j)} \left[g_0(k_j R) \xi_0(k_j Z) + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(k_{mj} R) \xi_m(k_{mj} Z) \right] \cos \theta \quad (5) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} f_n(k_j R) &= i^n \left[J_n(k_j R) - \frac{J'_n(k_j a)}{H_n^{(1)'}(k_j a)} H_n^{(1)}(k_j R) \right] \\ g_0(k R) &= \frac{2(k d \operatorname{sh} k d - \operatorname{ch} k d + 1) \operatorname{ch} k d}{k^2 (\operatorname{sh} k d \operatorname{ch} k d + k d)} \frac{H_1^{(1)}(k R)}{H_1^{(1)'}(k a)} \\ g_m(k_m R) &= \frac{2(k_m d \sin k_m d + \cos k_m d - 1) \cos k_m d}{k_m^2 (\sin k_m d \cos k_m d + k_m d)} \frac{K_1(k_m R)}{K_1'(k_m a)} \\ \xi_0(k Z) &= \operatorname{ch} k(Z+d) / \operatorname{ch} k d \\ \xi_m(k_m Z) &= \cos k_m(Z+d) / \cos k_m d \end{aligned}$$

i 为虚数单位, J_n 是 n 阶 Bessel 函数, $H_n^{(1)}$ 是第一类 Hankel 函数, K_1 是一阶的第二类修正的 Bessel 函数. $\hat{\psi}^{(1,j)} = \psi^{(1,j)}/A_j$.

物体的响应 $\psi^{(1,j)}$ 由铰接圆柱的运动方程 $I\ddot{\Psi} = mgc \sin \Psi + M_y$ 的一阶方程决定.

$$(\omega_o^2 - \omega_j^2)I\psi^{(1,j)} = M^{(1,j)} \quad (6)$$

其中 I 为绕铰接点 C 的惯性矩, c 为重心到铰接点的距离, ω_o 为铰接圆柱的固有频率

$$\omega_o^2 = \left(\frac{1}{2}\rho g \pi a^2 d^2 - mgc\right)/I \quad (7)$$

力矩 $M^{(1,j)}$ 为

$$\begin{aligned} M^{(1,j)} = & -\rho g \pi a A_j \frac{2(k_j d \operatorname{sh} k_j d - \operatorname{ch} k_j d + 1)}{k_j^2 \operatorname{ch} k_j d} f_1(k_j a) \\ & -\omega_j^2 \rho \pi a A_j \hat{\psi}^{(1,j)} \frac{k_j d \operatorname{sh} k_j d - \operatorname{ch} k_j d + 1}{k_j^2 \operatorname{ch} k_j d} g_o(k_j a) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{mj} d \sin k_{mj} d + \cos k_{mj} d - 1}{k_{mj}^2 \cos k_{mj} d} g_m(k_{mj} a), \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (8)$$

二阶速度势由二部分组成: 二阶入射势 $\phi_I^{(2)}$ 和散射势 $\phi_S^{(2)}$. $\phi_I^{(2)}$ 已由 Bowers^[2] 求得

$$\phi_I^{(2)} = -\frac{igA_1A_2}{4} d_{1,2} \frac{\operatorname{ch}(k_1 - k_2)(Z + d)}{\operatorname{ch}(k_1 - k_2)d} e^{i(k_1 - k_2)X} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} d_{1,2} = & \left[\frac{k_1^2}{\omega_1 \operatorname{ch}^2 k_1 d} - \frac{k_2^2}{\omega_2 \operatorname{ch}^2 k_2 d} + \frac{2(\omega_1 - \omega_2)k_1 k_2}{\omega_1 \omega_2} (1 + \operatorname{th} k_1 d \operatorname{th} k_2 d) \right] / \\ & [(\omega_1^2 - \omega_2^2)/g - (k_1 - k_2) \operatorname{th}(k_1 - k_2)d] \end{aligned} \quad (9a)$$

$\phi_S^{(2)}$ 应满足下列方程和边界条件

$$\Delta \phi_S^{(2)} = 0 \quad (10)$$

$$g \frac{\partial \phi_S^{(2)}}{\partial Z} - (\omega_1 - \omega_2)^2 \phi_S^{(2)} = \alpha e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + \text{c.c.}, \quad Z = 0 \quad (10a)$$

$$\frac{\partial \phi_S^{(2)}}{\partial R} = \beta e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + \text{c.c.}, \quad R = a \quad (10b)$$

$$\frac{\partial \phi_S^{(2)}}{\partial Z} = 0, \quad Z = -d \quad (10c)$$

$$\text{辐射条件} \quad R \rightarrow \infty \quad (10d)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha = & 2i(\omega_1 - \omega_2) \nabla \phi^{(1,1)} \cdot \nabla \phi^{*(1,2)} - \frac{i\omega_2 \omega_1^2}{g} \frac{\partial \phi^{(1,1)}}{\partial Z} \phi^{*(1,2)} + \frac{i\omega_1 \omega_2^2}{g} \frac{\partial \phi^{*(1,2)}}{\partial Z} \phi^{(1,1)} \\ & + i\omega_2 \frac{\partial^2 \phi^{(1,1)}}{\partial Z^2} \phi^{*(1,2)} - i\omega_1 \frac{\partial^2 \phi^{*(1,2)}}{\partial Z^2} \phi^{(1,1)} - g \frac{\partial \phi_I^{(2)}}{\partial Z} + (\omega_1 - \omega_2)^2 \phi_I^{(2)} \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} \beta = & (Z + d) \dot{\psi}^{(2)} \cos \theta + a(\psi^{(1,1)} \dot{\psi}^{*(1,2)} + \psi^{*(1,2)} + \dot{\psi}^{(1,1)}) \cos^2 \theta + \psi^{(1,1)} \frac{\partial \phi^{*(1,2)}}{\partial Z} \cos \theta \\ & + \psi^{*(1,2)} \frac{\partial \phi^{(1,1)}}{\partial Z} \cos \theta - \left(\frac{\partial^2 \phi^{(1,1)}}{\partial R^2} \psi^{*(1,2)} + \frac{\partial^2 \phi^{*(1,2)}}{\partial R^2} \psi^{(1,1)} \right) (Z + d) \cos \theta - \frac{\partial \phi_I^{(2)}}{\partial R} \end{aligned} \quad (11b)$$

这里上标 * 表示复共轭.

由于自由面上的非齐次条件, 使得用解析方法求二阶速度势变得相当困难. 因此, 我们不直接求解二阶速度势而利用其定解条件求它对二阶低频力的贡献. 为此, 我们定义一个辐射势 $\phi_R = \phi_R e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + \text{c.c.}$, 它满足下列方程和边界条件

$$\Delta \phi_R = 0 \quad (12)$$

$$g \frac{\partial}{\partial Z} \phi_R - (\omega_1 - \omega_2)^2 \phi_R = 0, \quad Z = 0 \quad (12a)$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \phi_R = \cos \theta, \quad R = a \quad (12b)$$

$$\frac{\partial}{\partial Z} \phi_R = 0, \quad Z = -d \quad (12c)$$

$$\text{辐射条件} \quad \text{在无穷远处} \quad (12d)$$

其解为

$$\phi_R = \left[G_o(\bar{k}R) \xi_o(\bar{k}Z) + \sum_{m=1}^{\infty} G_m(\bar{k}_m R) \xi_m(\bar{k}_m Z) \right] \cos \theta \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} G_o(\bar{k}R) &= \frac{2 \text{sh} 2\bar{k}d}{\bar{k}(2\bar{k}d + \text{sh} 2\bar{k}d)} \frac{H_1^{(1)}(\bar{k}R)}{H_1^{(1)}(\bar{k}a)} \\ G_m(\bar{k}_m R) &= \frac{2 \sin 2\bar{k}_m d}{\bar{k}_m(2\bar{k}_m d + \sin 2\bar{k}_m d)} \frac{K_1(\bar{k}_m R)}{K_1'(\bar{k}_m a)} \\ (\omega_1 - \omega_2)^2 &= g\bar{k} \text{th} \bar{k}d = -g\bar{k}_m \text{tg} \bar{k}_m d \end{aligned}$$

由 Green 定律知

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_V (\phi_R \Delta \phi_S^{(2)} - \phi_S^{(2)} \Delta \phi_R) dV \\ &= \iint_{S+S_F+S_B+S_\infty} [\phi_R (\nabla \phi_S^{(2)} \cdot \mathbf{n}) - \phi_S^{(2)} (\nabla \phi_R \cdot \mathbf{n})] ds \end{aligned} \quad (14)$$

这里 \boldsymbol{n} 为区域的外法线, 但对圆柱来说却是内法线. S, S_F, S_B, S_∞ 分别为圆柱面, 自由表面, 底面和无穷远处的控制柱面. 由于底面上的边界条件及辐射条件, 上式在底面和 S_∞ 上的积分为零, 利用自由面上的边条件 (10a) 和 (12a), 上式可改写为

$$\int_0^{2\pi} \int_{-d}^0 \phi_S^{(2)} \cos \theta \, ad \, dZ = \int_0^{2\pi} \int_{-d}^0 \phi_R \beta \, ad \, dZ - \iint_{SF} \phi_R \frac{\alpha}{g} \, ds \quad (15)$$

把 α, β 的表示式 (11) 代入 (15) 式, 去掉因 $\cos \theta$ 的因子在 $[0, 2\pi]$ 上积分为零的部分, 去掉对二阶低频力的贡献为 $O\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_j}\right)^2$ 的部分 (二种频率相差不太大且平均频率又不太低的假定意味着 $\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_j}$ 为小量), 二阶速度势对二阶低频力的贡献为 $O\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_j}\right)$. 按照 (3) 式, 二阶水平力 $F_x^{(2)}$ 中 $\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t}$ 的贡献为

$$\begin{aligned} F_{1X}^{(2)} &= \int_0^{2\pi} \int_{-d}^0 -\rho i(\omega_1 - \omega_2)(\phi_I^{(2)} + \phi_S^{(2)}) \cos \theta \, ad \, zd \, d\theta + \text{c.c.} \\ &= -\rho ai(\omega_1 - \omega_2) \int_0^{2\pi} \int_{-d}^0 \left\{ \left[\psi^{(1,1)} \left(\frac{\partial \phi^{*(1,2)}}{\partial z} - (z+d) \frac{\partial^2 \phi^{*(1,2)}}{\partial r^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \psi^{*(1,2)} \left(\frac{\partial \phi^{(1,1)}}{\partial z} - (z+d) \frac{\partial^2 \phi^{(1,1)}}{\partial r^2} \right) \right] \phi_R \cos \theta \right\}_{r=a} \, dz \, d\theta + \text{c.c.} \\ &\quad + \frac{\rho ai(\omega_1 - \omega_2)}{g} \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \left[\phi_R \left(i\omega_2 \phi^{*(1,2)} \frac{\partial^2 \phi^{(1,1)}}{\partial z^2} - i\omega_1 \phi^{(1,1)} \frac{\partial^2 \phi^{*(1,2)}}{\partial z^2} \right) \right]_{z=0} \, dr \, d\theta \\ &\quad + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (16)$$

至此, 二阶低频力 $F_X^{(2)}$ 已经完全可用一阶速度势 ((5) 式) 按照 (3) 式和 (16) 式计算.

由 (16) 式可知, 由于圆柱的对称性, 二阶入射势 $\phi_I^{(2)}$ 对二阶低频力没有影响. 由 (16) 式还可知, 物体的二阶响应对二阶低频力的影响可以忽略, 因为 $\psi^{(2)}$ 并没有在 (16) 式中出现.

2 结 论

1) 不必求出 $\phi^{(2)}$ 可以计算 $\phi^{(2)}$ 对二阶低频力的影响. 因为求解二阶速度势相当困难, 所以这种方法给二阶低频力的计算提供了方便.

2) 在二个频率较接近且平均频率不太低时, 二阶速度势对二阶低频力的影响为 $O\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_j}\right)$, 二阶低频力主要由一阶速度势的相互作用决定.

3) 圆柱的二阶响应对二阶低频力的影响为 $O\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_j}\right)^2$, 可以忽略.

4) 二阶入射势对于二阶低频力没有贡献, 这主要是圆柱的对称性决定的. 本文的结果可用于窄谱不规则波的情况.

参 考 文 献

- 1 Drake KR, Taylor RE, Matsui T. Drift of an articulated cylinder in regular waves, *Proc Roy Soc Lond A*, 1984, 394: 363-385
- 2 Bowers BC. Long period oscillations of moored ships subject to short wave seas, *Trans Roy Inst Naval Arch*, 1976, 118: 181-191

SECOND ORDER LOW-FREQUENCY WAVE FORCES OF AN ARTICULATED CYLINDER IN BICHROMATIC WAVES

Zhou Xianchu

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

Abstract The second order low-frequency wave force of a cylinder articulated on the sea bed in bichromatic waves is given analytically. It mainly depends on the interaction of the first order potential. The effect of the second order response of a cylinder and the second order incident potential on the low-frequency wave force can be neglected.

Key words second order low-frequency wave force, articulated cylinder