

数学物理

——内容、方法和意义

徐硕昌 (中国科学院力学研究所)

关键词 数学物理 数学物理方法 理论物理
应用数学

数学物理是数学和物理的交叉科学,是一个历史悠久而近代又得到极大发展的学科.数学物理方法,广义地讲,是物理学中的数学方法;狭义地讲,就是理论物理中的数学方法.要回答“数学物理是什么”这个问题比回答“数学是什么”还难.因为有文献[1,2]这两本名著,对后一问题我们不难找到具体答案.不过,对这个问题的回答,各个学派并不完全相同,至今还有争论.

对于数学物理的内容、方法和意义,本文将从历史沿革、研究范畴的演变和发展以及现代数学和理论物理的相互渗透、相互促进导致现代数学物理的崭新进展等方面来论述.

一、数学物理的产生

美国数学史家 M. 克莱因(M. Klein)在文献[3]中作了详细论述,现转述如下:

18 世纪的数学研究,远较其他世纪更为直接地受到物理问题的激励.实际上,可以说工作的目标不是数学,而是求解物理问题;数学是达到物理目的的一种方法.拉普拉斯(Laplace)(虽然也许是一种极端情形)确实认为数学只是物理的一个工具,而且他自己所关心的完全是数学对天文学的价值.

物理研究的主要领域当然是力学,特别是天体力学,大体上和莱昂纳多(Leonardo)预言的一样,力学成了数学的福地,因为它提出了如此多的研究方向.数学与力学问题的牵连是如此广泛,以致达朗伯特(d'Alembert)在《百科全书》中以及狄德罗(Diderot)在他的《关于自然界的解释的思想》中都写了从 17 世纪数学时代到力学时代的转变.实际上,他们相信像笛卡儿(Descartes),帕斯卡(Pascal)和牛顿(Newton)那样的人的数学工作已经过时了,而力学应该是数学家的主要兴趣.按照他们的观点,那就只有当数学为物理服务时,才是普遍有用的.18 世纪集中精力于离散质量系统的

力学和连续介质的力学.光学暂时被推入幕后.

但是,实际发生的情况同狄德罗和达朗伯特所坚持的恰好相反.拉格朗日(Lagrange)说,爱好分析的人们会高兴地看到力学变为它的一个分支.证诸于后来的发展,我们认为,拉格朗日这样说,是作出了比较合乎事实的解释.更概括地说,由伽利略(Galileo)开创并由牛顿继承的工作方法(即将基本的物理原理表为定量的数学陈述,然后利用数学的论证推导出新的物理成果),已被不可估量地向前推进了,物理愈来愈数学化,至少对于那些物理原理已被充分了解的领域是如此,物理的主要分支日益多地组织到数学结构中去,建立了数学物理.

数学物理这门学科是在微积分和常微分方程理论成熟以后形成的,所以,微积分和常微分方程理论不属于数学物理方法范畴.随着数学物理方程理论的成熟和力学中变分方法的发展,数学物理走向成熟.力学的变分原理在欧拉(Euler)、拉格朗日和哈密顿(Hamilton)等人手中成了数学物理中的主导原理.

拉格朗日用其最小作用原理对动力学规律的成功描述,启示着这概念应该可以应用到物理学的其他分支上去.拉格朗日对流体动力学给出了极小原理(适用于可压缩和不可压缩的流动),他由此导出了关于流体动力学的欧拉方程,而且他确实自夸地说过,极小原理主宰了这个领域,就像它主宰着质点运动和刚体运动那样.在 19 世纪初,许多弹性问题也被泊松(Poisson)、格耳曼(Germain)、哥西(Cauchy)和其他一些人用变分法解决,而且,弹性力学的变分原理的研究以后一直是一个活跃的领域.

哈密顿的工作是提供一个普遍原理(可以从它导出各种力学问题的运动定律)的一系列努力的顶峰,它鼓舞人们努力在其他数学物理分支,如弹性力学、电磁理论、相对论、量子理论中求得相似的变分原理.所以,变分方法一直是数学物理中的主导方法.

二、数学物理方法

19 世纪以来,为了总结数学物理的成就及学校教学需要,科学家编写了数百上千本有关数学物理方法的专著和教科书.在这些著作中,杰弗莱(Jeffrey)兄妹合著的《数学物理方法》及柯朗(Courant)和希尔伯特(Hilbert)合著的两卷本《数学物理方法》是其中最著名和最有影响的两套经典著作.我们来看看他们是如何决定他们书中方法的取舍的.杰弗莱兄妹规定书中被选中的数学方法是在物理学中经常应用的,至少在两个不同的物理分支中被应用,微积分被认为是已具备知识,柯朗和

希尔伯特认为他们的书对数学家和物理学家有同样的用途,“本书就是针对这个目的(指纠正近年来数学和物理相分离的研究倾向)为供学习数学物理而作的.本书发展了起源于物理问题的数学方法,并试图使这些结果纳入统一的数学理论.作者并未企图做得完备,只是希望本书可以便于读者接近一个丰富而重要领域”.

在《辞海》中给数学物理方法下了一个诠释:“指物理学中应用较多的一部分数学方法.范围不十分确定,涉及大部分发展得比较成熟的数学分支.通常包括矢量和张量分析,复变函数论,微分方程,积分方程,变分法,特殊函数(如贝塞尔函数等),矩阵,线性代数和群论以及各种近似计算方法.但微分学,积分学,级数论等一般不列入数学物理方法的内容.这些数学工具也适用于许多工程技术领域”.这和上述几位科学家观点倒不矛盾,可惜没下明确的定义.

三、什么是数学物理

我们查阅另外几种重要的百科全书只有“数学物理”的词条而无“数学物理方法”的条目.只要数学物理有定义,“数学物理方法”就可顺理成章地定义为是研究数学物理问题的通用数学方法.

前苏联的《百科辞典》是这样定义的:“研究处于数学和物理学边缘问题的学科.有时,数学物理这一名称可理解为研究和求解与物理学中所遇到的微分方程有关之问题的数学方法”.我国数学家编写的《大百科全书·数学卷》定义为:“以研究物理问题为目标的数学理论和数学方法.它探讨物理现象的数学模型,即寻求物理现象的数学描述,并对模型已确立的问题研究其数学解法,然后根据解答来诠释和预见物理现象或者根据物理事实来修正原有数学模型”.

在日本数学家编的《数学百科辞典》中“数学物理”和“数学物理方法”这两个条目都没有,只有“力学和理论物理”的条目.看来他们认为“数学物理”和“力学和理论物理”同义.这种观点在美国最近新出版的《科学技术百科全书》中讲得更明确,比日本的《数学百科辞典》处理得更好.如果仍然按力学和理论物理系统列出条目,那与物理百科全书有何差别!在数学物理中物理问题是按使用的数学方法的共同性来归类,例如同一个波动方程,弹性力学中描述弹性体振动,流体力学中却描述了流体波动,声学家不妨称它为声波方程,电学家不妨称它为电报方程,而数学家从这些不同物理领域的波动现象归结出同一方程——双曲型偏微分方程,这个偏微分方程的解答就描述了这些不同对象的共同属性.

下面,将《科学技术百科全书》中有关“数学物理”条目内容转述如下:

在假定物理诸定律已知的前提下,物理学的宗旨在于依据数学解的方法来演绎出已确立的物理理论结果.由于不同的理论物理领域产生出的数学问题会极其相似,这等于一种富有成效的方法被大大地扩大了应用的范围.同一个偏微分方程会在许多不同的物理背景下碰到.

现将数学物理中的力学和理论物理问题归类列举如下:

(1) 行星的运动理论,特别是经典的三体问题,例如在太阳和木星的耦合作用下小行星的运动;刚体的陀螺运动.

(2) 位势理论,最先应用于静电学和流体中的无粘流动,许多重要的特殊函数诸如贝塞尔函数和勒让德多项式都是与位势理论相关联而发展起来的.复变函数能用于二维问题.

(3) 振动理论,用于确定一个给定形状的区域内的电磁振荡和弹性体振动或者在不同方式下相互作用的物体系的振动的简正模式.在其他领域中,这个理论对于微波腔、声学 and 地震问题具有重要应用,还有某些特殊函数也有重要的应用.

(4) 波的传播,包括诸如电磁波和声波的绕射问题的精确解.

(5) 波动力学问题的解,例如在氢原子、氢分子或在散射问题中所碰到的波动力学问题,要直接求这些问题的分析解就太复杂了,只好将模型充分简化后再精确求解,这时,变分方法就太有用了.

(6) 扩散理论,用于物质中中子的反应、热传导和统计力学中的输运现象.

(7) 色散理论,研究一个系统对不同频率外力作用的响应会用到,研究物质的光学性质等离子物理和高能物理也用到.

(8) 流体动力学和弹性理论等中的非线性问题.

(9) 与统计力学有关的概率理论中的问题.

在第二次世界大战期间,材料物理的主要技术是问题的解析数学解.自第二次世界大战以来,高速电子计算机得到飞速发展,对于诸多问题进行数值求解成为可能,就不用再去求分析解了.

有时,数学物理被作为理论物理的同义词.

四、现代数学物理方法

在近半个世纪以来,数学和数学物理渗透到科学、工程和生产实践中,并成为其中不可分割的组成部分.

现代数学和理论物理的结合更是一个引人注目的范例。一方面,数学的全部理论产生于人们对物理规律的探索研究之中,另一方面,数学又为物理世界提供描述的语言。下面我们介绍现代代数、微分几何和泛函分析与理论物理相结合而获得了现代数学物理方法的成就。

1. 群表示理论对量子理论和晶体物理学的应用

群表示理论为描述自然界的对称性和研究晶体结构提供了强有力工具。在晶体的X射线衍射实验证实空间群理论适用于晶体物理学后,随着量子理论的建立,在物理学界产生巨大变化,对于物质世界的粒子,在量子理论中借助群表示论就可表示为一个数学对象,很方便地就描述了晶体中原子和离子的运动。以量子力学为基础的晶格动力学理论也就相继产生了。

1926年泡利(Pauli, W.)成功地描绘出了量子力学氢原子的一幅简单而又漂亮的图画,这一工作为研究与其他类型对称性有关的时空对称性定下了基调。1939年出现了一个重大突破:维格纳(E. P. Wigner)分析了狭义相对论的正能量表示,也即爱因斯坦、洛伦兹(Lorenz, H. H.)和庞卡莱(Poincare)群的表示。表明相对性群的每一种表示都可用质量和自旋来刻画。

李群及其表示的数学理论随后又取得了惊人的发展,而纯数学的这些成就又开始在现代数论、几何学、遍历理论等学科中发挥出重要作用。除了李群,还有无限群,如微分同构体、魏尔群等,它们的群表示论在物理学思想革命化进程中起了一定的作用。起先是用群论来描述自然界定律,后来又采用了一种现代的观点,从而使群成了叙述有关定律所用命题的一部分。

1955年李政道和杨振宁发现了宇称不守恒。在作出这一突破以后,关于自然界中可以找到哪些明显离散对称性的问题,成了物理学前沿一直研究的课题。出于数学自身的需要,数学家曾经研究过紧群表示的抽象理论。后来,人们发现,关于群表示的这些知识正好提供了寻求自然界规律所需要的信息。理论物理学新进展表明:群及其表示不但对复分析和偏微分方程这些较为传统的工具很重要,而且对现代粒子物理学也必不可少。

2. 微分几何在理论物理中的应用

1915年,爱因斯坦利用黎曼几何作数学工具来阐明他关于引力的基本思想,创立了广义相对论。1918年魏尔(Weil)注意到电磁力可以从空间的几何性质推出来,把电磁学理论建立在空间尺度变换的基础上得到“规范场理论”。1954年杨振宁和米尔斯(Miles, J. W.)将魏尔的电磁场“规范理论”加以推广使之包括描述强作

用力对称性的一个群,这就是“非阿贝尔规范场理论”。杨-米尔斯规范场理论把黎曼几何改造成纤维丛理论。一个纤维丛就是一个空间,它是由许多类似的空间粘贴在一起而成的。例如,环面(有点像炸面包圈)就可用一些圆截面依次粘贴后造出。数学家还引出了“联络”的概念,他们用“联络”来度量由于空间弯曲而造成局部弯曲的情况。人们创造了一整套内容丰富的理论,其中包括对弯曲的抽象空间的拓扑(整体特性)所作的研究。许多代数和几何的不变量,如:陈省身、斯泰弗-维特尼(Steifel-Whitney)、阿蒂亚(Atiyah)、辛格(Singer)、希兹布鲁奇(Hirzebruch)魏尔(Weil)、波特(Bott)等人发现的指标不变量等,都已经被发现是一般理论的一部分。物理学家也为这幅画添上自己的色彩,他们提出可将这样的结构作为一组变分方程的解找出来。“联络”所满足的这些非线性方程是拉普拉斯方程在微分几何范围内所作的推广。按现代规范场理论,电场分量被看作为规范群的李代数中的元素。杨-米尔斯理论作了进一步推广,认为李代数由非交换矩阵构成。这样,电场和磁场的每个分量不是一个数而是一个矩阵。在空间和时间中从一点移动到另一点,这个矩阵都会变。

3. 泛函分析在理论物理中的应用

数学分析的概念与现代代数和现代几何思想相结合产生了新的分析分支——泛函分析。正如分析当时建立是力学的发展所必需一样,泛函分析给出了解决数学物理问题的许多新方法,并成为新的原子物理、量子力学的数学工具。历史在一定程度上重复着,但那是按照新的式样,在更高阶段上的重复。当理论物理学家要寻找一种数学理论能将规范理论、量子力学和狭义相对论全部包容在内,即所谓的统一量子场论,这时泛函分析就成了他们手中最强有力的数学工具。

1923年,理论物理学家发现希尔伯特空间算子谱理论是求解薛定谔(Schrodinger)方程得到量子化条件最合适的数学工具。海森堡的测不准关系可以用自伴算子谱分解定理来证明。以后,冯·诺依曼提出的弱闭算子代数理论成为公理化场论、量子统计、基本粒子理论的重要数学工具。近年来泛函分析终于发展到这样的阶段,以至人们能利用它来研究量子场论和重整化的无穷大,形成数学物理的一个崭新领域,即所谓构造性统一场论。

在数学物理的发展中,几何学和分析之间关系好比一条双向马路:一方面,分析学是研究几何学的基础;而另一方面,几何学的研究自然地导致某些分析工具的

(下转第356页)

隐身式飞机进气道的气流特性研究*

翁培奋

上海大学, 上海市应用数学与力学研究所, 上海 200072

* 部分受国家自然科学基金、航空部科学基金及上海市高校青年教师学术基金资助

关键词 飞机 隐身技术 进气道 流动特性

近 20 余年以来, 世界上一些航空工业先进国家都以极大力量关注着隐身技术发展, 尤其是美国已率先投入了可观人力和物力, 研制成功了多种隐身式飞行器. 其中 F-117A 隐身侦察/攻击机被世人誉为“看不见的飞机”, 在 1989 年入侵巴拿马和 1991 年轰炸伊拉克的海湾战争中, 让人们看到了隐身技术在现代战争中所表现出的巨大威慑力量, 引起国际间广泛关注. 不少人士指出, 隐身技术是继喷气技术之后最具革命性的军事航空技术^[1-5].

隐身技术就是极力降低飞机雷达、红外、激光、电视、目视及声学特征, 使敌方各种探测设备很难发现、探测和跟踪飞机, 使敌方制导武器不能或很难发挥应有作用, 从而提高飞机生存力和作战力. 图 1 是美国 B-2 隐身轰炸机三面图. 可以看出经过外形隐身技术后的隐身飞机看上去和普通飞机不同.

航空发动机(主要由进气道、压气机、燃烧室、涡轮、尾喷管等组成)是飞机的动力推进系统, 也是飞机主要的雷达散射源和红外辐射源^[1, 2, 5]. 一般飞机的雷达反射回波中,

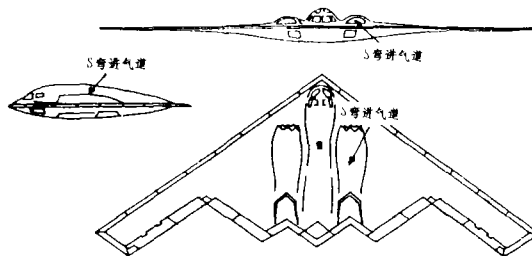


图 1 B-2 隐身轰炸机的三面图 从俯视图和侧视图上可以看到, 发动机放在飞机内部, 半埋入式进气口和发动机之间采用 S 弯进气道过渡

约 50% 是由进气道形成的. 进气道雷达散射回波主要由发动机进口压气机及风扇叶片的反射造成, 当然进气道压缩面及唇口也是雷达电磁波的反射源. 为了外形隐身需要, 隐身飞机进气道常采用蛇形或 S 形等复杂形状弯曲管道, 如图 2 所示, 目的在于对发动机进口的压气机和风扇叶片进行遮蔽. 而且 S 弯进气道的进气口不再处于常规突出部位, 而是放在隐身性能较好的飞机背部或机身与机翼连接处, 以便尽量与机身融合. 这样设计的进气道和常规方案完全不同, 只要配合其他措施, 如在进气口贴加吸波材料等, 就可以基本上满足隐身要求. 然而这种弯曲进气道的气流流动十分复杂. 尤其飞机作战状态大机动飞行时, 研究已经发现^[3, 4], 会造成隐身飞机 S 弯进气道内气流流动特性严重恶化, 因此, 必须采取必要手段以切实保证喷气推进系统有足够空气进气流量和良好的内流气动性能.

作者经过大量实验研究, 创造性地提出了一系列新方法来改善作大机动飞行时 S 弯进气道严重恶劣的内流气动性能^[3]. (1) 提出缩小 S 弯管进气道出口截面单涡的新方法, 称为缩涡法. 其结构十分简单, 就是一个金属薄片弯成

(上接第 355 页) 发展(诸如李导数和外微分), 以及某些新概念(诸如流形、纤维丛和向量与求导)的同化, 它们在分析学的应用中十分有用. 用近代观点看, 几何学是从属于分析学的. 在数学物理领域中, 数学家和物理学家的区别差不多看不到了.

徐硕昌 副研究员, 中国科学院力学研究所, 北京 100080

- 1 亚历山大洛夫, A.Д. 等. 数学——它的内容、方法和意义. 北京: 科学出版社, 1984. (第一卷, 孙小礼等译; 第二卷, 秦元熙等译; 第三卷, 王元等译)
- 2 柯朗, R., 罗宾斯, H. 数学是什么. 长沙: 湖南教育出版社, 1985. (汪浩, 朱煜民译)
- 3 克莱因, M. 古今数学思想, 第二册. 上海: 上海科学技术出版社, 1979. (申又彬等译)
- 4 Jeffreys, H., Jeffreys, B. *Methods of Mathematical Physics*. 3rd

ed., Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1956

- 5 柯朗, R., 希尔伯特, D. 数学物理方法, 1977: (卷 I, 钱敏, 郭敦仁译; 卷 II, 熊振翔, 相应辰译)
- 6 邓东皋等编. 数学与文化. 北京: 北京大学出版社, 1990
- 7 周仲良, 郭镜明译. 美国数学的现在和未来. 上海: 复旦大学出版社, 1986

Mathematical Physics—Its Contents, Methods and Meaning

Xu Shuo-chang

Associate Research Professor, Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing 100080

Key words mathematical physics; methods of mathematical physics; theoretical physics; applied mathematics