

# 导电流体热对流中磁场的致稳作用<sup>1)</sup>

荣 升

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

**提要** 本文导出了在磁场作用下导电流体热对流流动的方程组及其定解条件, 用数值方法模拟了由磁场控制的单晶生长热对流问题, 计算结果说明磁场可以有效地抑制流动在壁面处的分离、单胞对流变为多胞对流以及速度和温度的振荡等热不稳定性现象, 说明了磁场对不稳定热对流有明显的致稳作用。

**关键词** 非线性, 热不稳定性, 磁场, 致稳, 对流

## 一、引 言

在一些有热源的实际问题中会遇到热不稳定性, 如晶体生长、地球大气、火焰结构、地幔和核聚变等。在晶体生长问题中, 单晶从熔融态的硅或砷化镓中生长出来。多种因素可引起熔炉内熔融的液体(以下称熔体)流动: 首先是熔体热对流, 由于晶体在熔体交界处温度为熔点, 它低于炉壁处熔体的温度, 熔体中形成的径向温度梯度产生了宏观热对流; 此外, 晶体和炉壁的转动、自由液面不均匀的表面张力、热辐射等因素都能引起熔体流动。国际上从 70 年代开始研究晶体生长中对流的不稳定性。熔体的动量方程中的惯性项、能量方程中的对流项以及自由边界都具有强的非线性, 它们使热对流变得十分复杂。因此, 有关它的研究大多采用数值模拟方法。对于没有外加磁场的情况, Battaro 等采用有限体积法完成了直拉单晶生长对流的数值模拟<sup>[1]</sup>, 并指出当瑞利数超过临界值时热对流出现不稳定性。他较详尽地描述了小普朗特数时热对流的稳态流动、亚临界态和超临界态流动的特征。一些实验已证明不稳定热对流的出现与生成晶体表面上条纹及所含杂质浓度等有密切联系, 所以, 为了获得又大又好的晶体, 必须抑制热不稳定性的发生。

一些重要的半导体材料在液态时是良好的导体, 如液态的硅, 其导电性接近水银。因此可以利用磁场控制晶体生长中导电的熔体的宏观流动。近十余年来, 用磁场控制单晶的生长, 从而提高单晶质量的办法普遍受到重视。一些实验定性地说在直拉硅单晶过程中用垂直磁场可以有效地抑制热不稳定性。在 1000 奥斯特磁场控制下得到了均匀、没有条纹的单晶硅<sup>[2,3]</sup>。有关单晶生长中磁场作用的数值研究, 目前仍限于对一些特定情况进行研究<sup>[4]</sup>。

本文采用数值模拟方法研究磁场对直拉单晶中热对流的作用。计算结果表明磁场对热对流有明显的致稳作用, 它可以有效地抑制非线性热不稳定性的发生并提高临界瑞利数。

<sup>1)</sup> 国家自然科学基金资助项目。

本文于 1993 年 2 月 1 日收到第一稿, 1993 年 5 月 11 日收到修改稿。

## 二、基本假定、方程及定解条件

直拉单晶的模型如图 1 所示, 硅或砷化镓置于圆柱形熔炉内加热熔融, 柱形晶体从熔体中慢慢地生长出来. 晶体与熔体交界处以及自由液面均视为静止平面. 在交界处熔体温度为熔点  $T_m$ , 炉壁和炉底处熔体温度为  $T_c$ . 炉半径为  $r_c$ , 炉高  $h$ , 晶体半径  $r_s$ . 由于熔体中径向温差  $T_c - T_m$  形成了熔体沿轴线向下和沿侧壁向上的宏观对流 (在对称轴右侧). 外加轴向均匀磁场用以控制宏观的热对流的不稳定性, 磁感应强度为  $B_0$ . 基本假定如下:

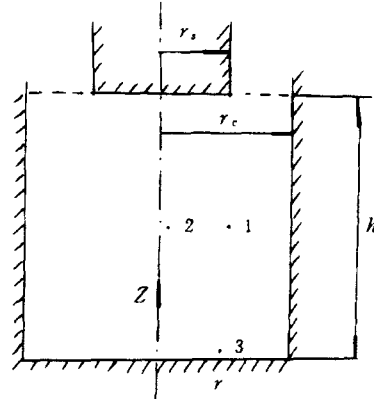


图 1 直拉单晶模型

Fig.1 Geometry of the CZ model

(1) 熔体是不可压缩的粘性流体, 即由压力引起的密度变化可略. (2) 采用 Boussinesq 近似, 在动量方程中除重力项之外密度  $\rho$  被认为是常量  $\rho_m$ , 仅在重力项中考虑温度所引起的密度变化. (3) 熔体的粘性系数  $\eta$ 、热扩散系数  $\chi$ 、体膨胀系数  $\alpha$ 、定压比热  $C_p$  和导电率  $\sigma$  均为常量. (4) 磁雷诺数很小. (5) 仅考虑由温差引起的热对流. (6) 熔体流动是轴对称的.

在外加磁场作用下, 运动的导电熔体中产生感应电流, 磁场与这个感应电流的作用产生洛伦兹力作用于熔体上, 在熔体的动量方程中除重力外增加了一个体力  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ . 由 Boussinesq 近似, 在动量方程中重力项应为  $\rho \mathbf{g} = \rho_m [1 - \alpha(T - T_m)] \mathbf{g}$ . 不可压缩的熔体的连续方程是速度矢量无源. 在由温差引起的热对流的能量方程中粘性耗散和焦耳热项相对于热传导项是小量, 可以略去. 根据动量方程, 温差  $\Delta T$  引起的热对流速度量级为  $(\alpha \Delta T g r_c)^{1/2}$ , 不可压缩流体粘性耗损相对于热传导的量级为  $\eta \alpha g r_c / \kappa \sim 10^{-8} - 10^{-10}$  (对于一般的半导体材料的熔体有  $\alpha \sim 10^{-3} - 10^{-4} \text{K}^{-1}$ ,  $\eta \sim 10^{-3} - 10^{-4} \text{kg/s}\cdot\text{m}$ ,  $\kappa \sim 10 \text{w/m}\cdot\text{K}$ ,  $r_c \sim 10^{-2} \text{m}$ ). 焦耳热相对于热传导项的量级为  $M^2 \eta \alpha g r_c / \kappa \sim 10^{-4} - 10^{-8}$ ,  $M$  为哈特曼数. 熔体导电良好, 在一般磁场情况有  $M \sim 10^2 - 10^4$ , 所以粘性耗损和焦耳热项相对于热传导项是小量, 在能量方程中可以略去. 在小磁雷诺数情况下, 电磁场所满足的麦氏方程组得到简化: 熔体中感生磁场可以忽略, 则磁场等于外加的磁场  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ , 熔体中感应电流由欧姆定律决定, 法拉第定律简化成电场强度矢量  $\mathbf{E}$  无旋, 电流密度  $\mathbf{J}$  的连续方程变成电流密度矢量无源. 于是, 我们得到导电流体热对流的 MHD 方程组

$$\rho_m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \rho + \eta \nabla^2 \mathbf{V} + \rho_m [1 - \alpha(T^* - T_m)] \mathbf{g} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dT^*}{dt} = \chi \nabla^2 T^* \quad (3)$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (6)$$

其中  $p$  和  $\mathbf{v}$  分别为压力和速度.

选取柱坐标系  $(r^*, \theta, z^*)$ , 见图 1, 则  $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ ,  $\mathbf{V} = (u^*, v^*, w^*)$ ,  $\mathbf{J} = (j_r, j_\theta, j_z)$ ,  $\mathbf{E} = (E_r, 0, E_z)$ , 由于轴对称, 故  $E_\theta = 0$ . 引入流函数  $\psi^*$ , 电流流函数  $\phi^*$  以及涡量  $\omega$ , 它们满足以下关系

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*}, & w^* &= -\frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*}, & r^* \omega &= \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial z^{*2}} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} \\ j_r &= \frac{1}{r^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial z^*}, & &= -\frac{1}{r^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \end{aligned}$$

采用以下无量纲变量及参数

$$\psi = \psi^* / \nu r_c, \quad H = \omega r_c^2 / \nu, \quad \phi = \phi^* / \sigma B_0 \nu r_c, \quad v = v^* r_c / \nu$$

$$T = (T^* - T_m) / (T_c - T_m), \quad Ra = \alpha g r_c^3 (T_c - T_m) / \chi \nu$$

$$Pr = \nu / \chi, \quad M = B_0 r_c \sqrt{\sigma / \eta}, \quad r = r^* / r_c, \quad z = z^* / r_c, \quad t = t^* \nu / r_c^2$$

从方程 (1)–(6), 得到无量纲流函数  $\psi$ , 无量纲电流函数  $\phi$ , 无量纲涡量  $H$ , 无量纲环向速度  $v$  和无量纲温度  $T$  满足的无量纲方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} - \frac{M^2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{Ra}{Pr} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{H}{r^2} \\ &\quad - \frac{M^2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{H}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (9)$$

$$rH = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (10)$$

$$r \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (11)$$

熔体是粘性流体, 在炉壁、炉底及晶体与熔体交界处均有无滑移条件, 自由面上有剪应力为零. 由于熔体导电良好, 晶体及炉体导电率对于熔体很小, 可以看成电绝缘体. 自由面上有热绝缘条件, 对称轴上有对称条件, 于是这个问题的无量纲边界条件为

$$r = 1, \quad \psi = \phi = 0, \quad H = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \quad v = A(1), \quad T = 1 \quad (12)$$

$$r = 0, \quad \psi = \phi = H = v = \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (13)$$

$$z = 0, \quad \psi = \phi = 0, \quad H = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad v = A(r), \quad T = 1 \quad (14)$$

$$z = h/r_c, \quad 0 < r < r_s/r_c, \quad \psi = \phi = T = 0, \quad H = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad v = B(r)$$

$$z = h/r_c, \quad r_s/r_c \leq r < 1, \quad \psi = \phi = H = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

其中  $A(r)$  和  $B(r)$  分别为炉底和晶体底面处的环向无量纲速度. 考虑到初始时刻熔体静止, 并且晶体和熔炉不转动, 即  $A(r) = B(r) = 0$ , 故  $T, H, \psi, v, \phi$  均有零初始值. 在轴对称假定下, 由温差引起的对流在  $rz$  平面内,  $z$  向磁场对径向流动的熔体的作用, 在熔体中仅产生了  $\theta$  方向的感应电流  $j_\theta (j_r = j_z = 0)$ , 则  $\nu \equiv \phi \equiv 0$ . 在磁场中, 导电熔体热对流问题就变成了寻求满足方程 (8)—(10) 边界条件 (12)—(15) 的解  $\psi(r, z, t)$ ,  $H(r, z, t)$  和  $T(r, z, t)$ . 在这组方程和定解条件中, 独立的无量纲参数有瑞利数  $Ra$ 、普朗特数  $Pr$ 、哈特曼数  $M$  和几何参数. 由于外加了磁场, 而增加了一个无量纲哈特曼数  $M$ .  $M$  表示磁力相对于粘性力的大小,  $M = 0$  表示无磁场的情况.

### 三、数值计算方法和结果

为了寻求满足方程组 (8)—(10), 边条件 (12)—(15) 和零初值的流动解, 我们采用中心差分、龙格-库塔和超松弛迭代的组合计算方法. 采用非均匀空间网  $22 \times 46$ , 在晶体和熔体交界处、自由面及炉体侧壁附近加密网格. 使用中心差分, 将方程组及边条件对空间坐标离散. 对于显含时间  $t$  的焓量和能量的方程, 使用可调步长的龙格-库塔法对时间向前积分; 对隐含时间  $t$  的流函数方程采用超松弛迭代法. 为了加速收敛, 采用线性插值作为迭代初始值, 这样, 迭代几次便可收敛.

对于多数半导体材料, 当它们处于液态时, 其普朗特数  $Pr$  很小, 液态硅和砷化镓的  $Pr$  在 0.01 到 0.015 之间. 由于它们的导电性能良好, 所以在一般磁场强度下其哈特曼数  $M$  较大. 我们选择以下几组无量纲量参数  $Pr=0.01, 0.015, 0.02$ ;  $M=0, 50, 60, 80, 100$ ;  $Ra=200, 400, 2000, 8000, 12000$ ,  $h/r_c=2$ ,  $r_s/r_c=0.5$ . 采用以上数值计算方法及无量纲参数, 求解方程组 (8)—(10) 和 (12)—(15) (离散化), 程序在 Alliant 机上运行, 一些典型的结果表示在图 2, 图 3 上. 计算结果表明, 在低瑞利数时, 如  $Ra=200, 400, 2000$ , 在有磁场  $M=50$  与无磁场  $M=0$  的两种情况下, 热对流都很弱, 都具有稳态单胞流动结构. 其对流为逆时针方向 (在对称轴右侧), 但有磁场时比无磁场时对流速度稍低, 对流涡心处流函数  $\psi$  稍小, 对流涡的强度稍弱. 图 2 是  $Pr=0.01$ ,  $Ra=8000$  有无磁场两种情况下流线、等温线的分布图及 1, 2 和 3 点 (见图 1) 的温度、轴向速度和径向速度随时间变化的曲线, 其中 (a)—(d) 为有磁场存在  $M=50$  的情况, (a')—(d') 为无磁场  $M=0$  的情况<sup>[1]</sup>. 文献 [1] 给出了  $M=0$ ,  $Pr=0.01$  时热对流的临界瑞利数  $Ra_c=9500$ . 当  $M=0$ ,  $Ra=8000$ ,  $Pr=0.01$  时热对流处于亚临界态, 从图 2(a') 看到亚临界态对流较强, 其涡心流函数为  $\psi_{\max}=92.99$ , 在垂直壁的中部, 流动分离. 从图 2(c') 和 (d'), 我们看到这个亚临界态的热对流的速度和温度开始出现振荡, 随时间逐渐衰减, 最后趋于稳定. 我们还看到, 外加轴向磁场后, 如图 2(a)—(d), 热对流明显减弱且磁场抑制了流动从壁面的分离以及速度和温度的振荡, 使热对流更快地

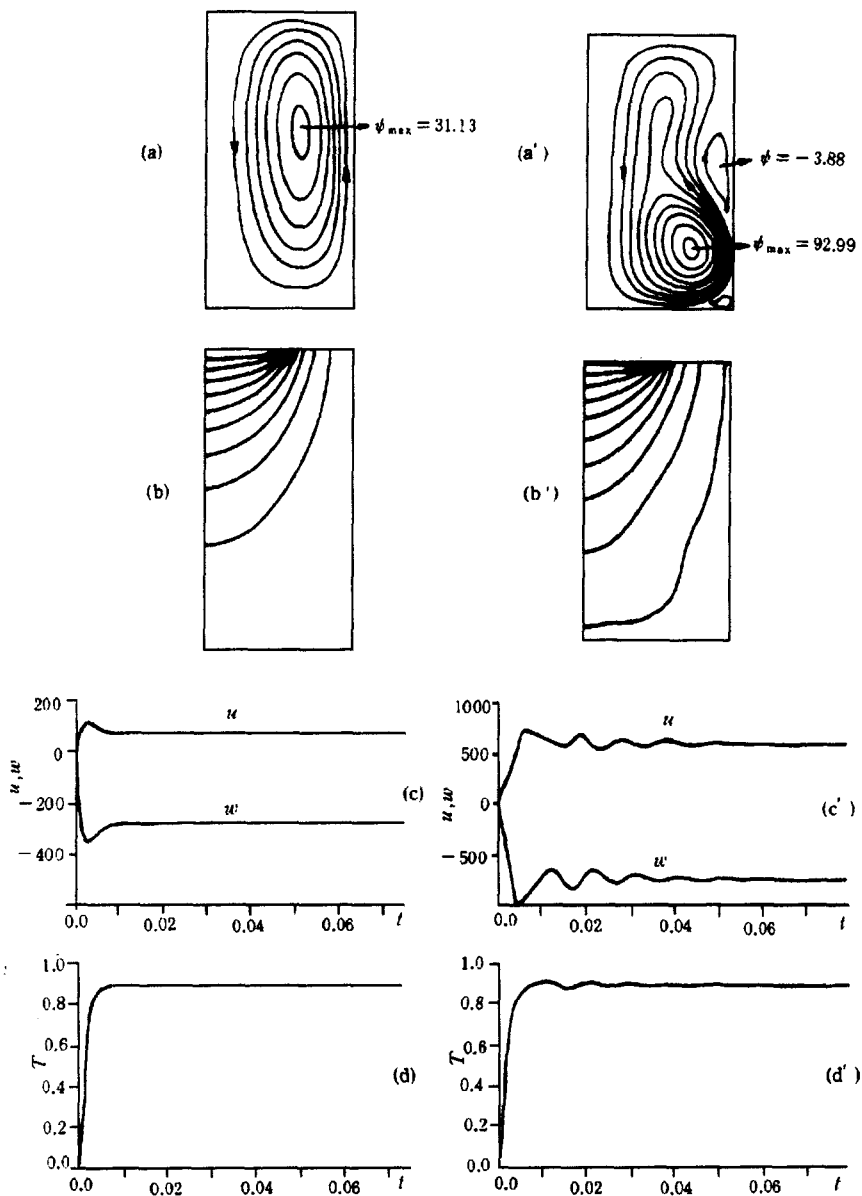


图2  $Pr=0.01$ ,  $Ra=8000$  时流线, 等温线及在 1,2,3 点的温度  $T$ , 轴向速度  $w$  径向速度  $u$  随时间变化曲线 ((a)-(d) 中  $M=50$ , (a')-(d') 中  $M=0$ )  
 Fig.2 Streamlines, isotherms, and temperature  $T$  and component velocities  $w$ ,  $u$  at points 1, 2, 3 for  $Pr=0.01$  and  $Ra=8000$  ( $M=50$  in (a)-(d),  $M=0$  in (a')-(d'))

趋于稳定. 图 3 为  $Pr=0.01$ ,  $Ra=12000$  有无磁场两种情况下热对流流线、等温线的分布图及 1、2 和 3 点的温度和速度随时间变化的曲线, 其中 (a)-(d) 对应  $M=60$  情况, (a')-(d') 对应无磁场  $M=0$  的情况<sup>[1]</sup>. 无磁场时  $Ra=12000$ , 它大于临界值  $Ra_c$ , 热对流处于超临界态. 从图 3(a')-(d') 我们看到, 该超临界态的对流很强, 涡

心处流函数  $\Psi_{\max}=118.35$ ，其流动与壁面进一步分离，同时流线有交叉，一个涡即将分裂为两个涡。速度和温度出现了明显的持续振荡，对流呈现出热不稳定现象。外加磁场后，如图 3(a)—(d)， $M = 60$ ，对流显著减弱，并抑制了速度和温度的持续振荡、流动从壁面处的分离和流线交叉等不稳定现象的发生，热对流趋于稳定。

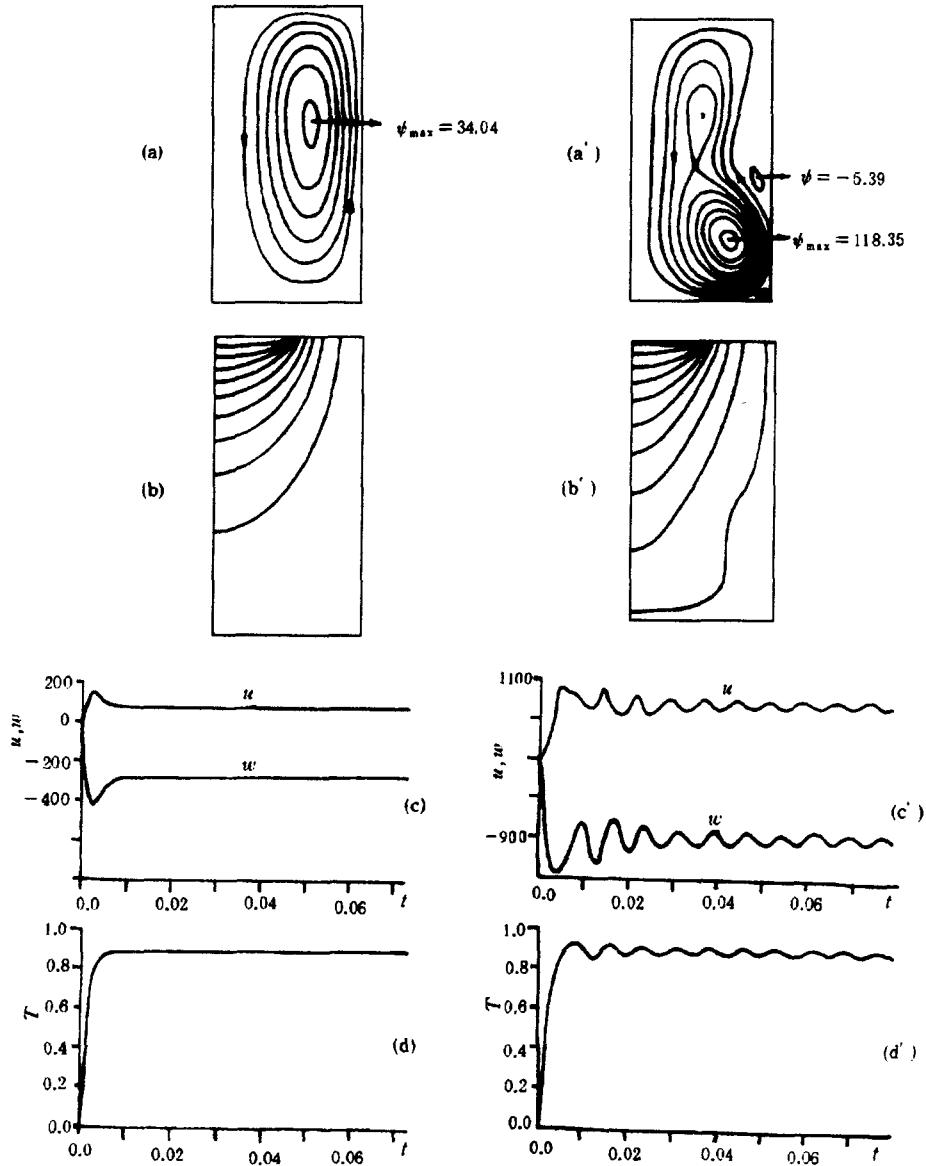


图 3  $Pr=0.01$ ， $Ra=12000$  时流线，等温线及在 1,2,3 点温度  $T$ ，

轴向速度  $w$ ，径向速度  $u$  随时间变化曲线 ((a)—(d) 中  $M=60$ ，(a')—(d') 中  $M=0$ )

Fig.3 streamlines, isotherms, and temperature  $T$  and component velocities  $w$ ,  $u$  at points 1,2,3 for  $Pr=0.01$  and  $Ra=12000$ ( $M=60$  in (a)—(d),  $M=0$  in (a')—(d'))

#### 四、结 论

通过对以上计算结果的分析, 我们得到如下结论:

1. 在较低瑞利数情况,  $Ra < Ra_c$ , 磁场的作用只减弱热对流的强度, 不改变单胞流动结构  $Ra_c$  为无磁场时临界瑞利数).
2. 在高瑞利数情况,  $Ra > Ra_c$ , 磁场的作用不仅减小热对流强度, 而且有效地抑制了速度和温度振荡, 流动从壁面处分离使流动结构从多胞变为单胞, 热对流趋于稳定, 从而提高临界瑞利数.
3. 随着哈特曼数  $M$  的增大, 磁场的致稳作用增强.

#### 参 考 文 献

- [1] Bottaro A, Zebib A. *Phys. Fluid*, 1988, 31(3):495-501
- [2] Kim KM, Swetana P. *J. Appl. Phys.*, 1985, 58(7):2731-2735
- [3] Hoshikawa K. *Japan J. Appl. Phys.*, 1982, 21(9):L545-L547
- [4] Kim DH, Adonato PM, Brown RA. *J. Crystal Growth*, 1988(89):339-356

### STABILIZING EFFECTS OF MAGNETIC FIELD ON THE THERMAL CONVECTION FLOW IN A CONDUCTING FLUID

Rong Sheng

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

**Abstract** MHD equations of the thermal convection flow in a conducting fluid is derived and a numerical simulation is presented for the thermal convection flow in the semiconductor crystal growth under a vertical magnetic field. Computational results show that oscillations and multicell flow structure with separation at wall are effectively suppressed by the magnetic field with an appropriate strength, and that the stabilizing effects of magnetic field on the thermal convection flow increase with Hartmann number increasing.

**Key words** thermal convection, instability, magnetic field