

自适应网格差分法在层状土入渗过程 数值模拟中的应用*

戚隆溪 谢斌

(中国科学院力学研究所)

提 要

本文通过适当的网格变换技术和权函数的选取,形成自适应移动网格,网格点在入渗锋面附近高度密集,并且始终跟随锋面移动。本文用自适应网格差分方法对层状土积水入渗过程进行了模拟计算,计算结果与实验结果吻合,还用固定网格方法进行了计算,两者对比表明:自适应网格方法可以用较少的网格总点数达到高分辨率,大大地减少计算量。这种自适应网格很适用于象入渗这类具有不断移动的水流锋面问题的求解。

一、引 言

土壤和水是农业生产的两项基本资源,土壤水运动规律的研究一直是十分活跃的研究领域。土壤水循环过程是从入渗开始的,入渗过程对地表径流大小的判定、土壤的侵蚀和流失危害的预防以及田间水管理都是至关重要的。因此入渗问题一直是土壤水运动研究的焦点之一^[1]。

Bodman和Coleman^[2,3]首先描述了均质土和层状土的入渗过程,并指出:入渗时,土壤内的湿度剖面可划分为饱和层、过渡层、传导层和湿润层,处在最前面的则是湿润锋,该处土壤含水量急剧变化,形成明显干湿交界面。对于层状土,分界面对湿润锋的传播有阻碍作用,入渗过程更为复杂。采用数值计算方法可以定量地描述层状土的入渗过程,从Richards土壤水运动基本方程出发, Hanks和Bowers^[4], Van Genuchten^[5]分别用固定网格差分法和有限元法模拟了分层土的入渗过程。Dane^[6]用变网格差分法对均质土的入渗过程作了模拟计算。此外,人们还越来越注意对水流锋面的细节作准确的计算^[7]。本文应用网格变换技术,以自适应移动网格差分方法对层状土一维积水入渗过程进行了数值模拟计算。

二、入渗过程的数字描述

非饱和土壤水流动的一般方程(Richards方程)为:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \cdot [K(\theta) \Delta \psi_r]. \quad (1)$$

其中: θ 为含水量, $K(\theta)$ 为非饱和导水系数, ψ_r 为总水势。对于一维垂流运动, 本文

* 本文于1991年4月26日收到,系国家自然科学基金资助项目。

仅考虑基质势 ψ_m 和重力势, 取Z轴垂直向下, 并以土壤表面为重力势零点, 则方程(1)变为:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[K(\theta) \frac{\partial (\psi_m - Z)}{\partial Z} \right]. \quad (2)$$

引入基质吸力 $h(\psi_m = -h)$ 和比水容量 $c(h) = \partial \theta / \partial \psi_m = -\partial \theta / \partial h$, 则Richards方程变为:

$$c(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[K(h) \frac{\partial (h + Z)}{\partial Z} \right]. \quad (3)$$

三、自适应网格的形成

在土壤入渗过程中, 湿润锋十分明显, 在其附近的薄层内土壤吸力梯度发生剧变, 而且锋面一直在移动, 类似于气动力学中的激波现象. 移动的自适应网格方法最适合于这类问题的数值计算. 这里, 采用适当的网格变换技术, 使得网格点在锋面附近高度密集并始终跟随锋面而移动, 这样既可以很好地分辨锋面变化从而准确地反映入渗过程, 又可以用较少的网格总点数减少计算量. 为此, 我们要寻找一个变换, 如图1所示, 使非均匀网格的物理平面($t-x$) 转换到均匀网格的计算平面($\tau-\xi$) 即:

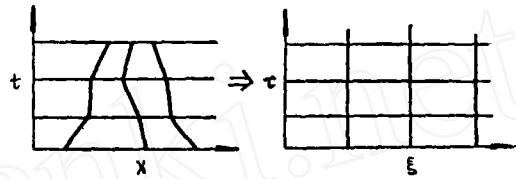


图1 网格变换

$$\begin{cases} \tau = t, \\ \xi = \xi(x, t). \end{cases}$$

为简单起见, 网格变换采用非耦合方式, 即 t^{n+1} 时刻的网格由 t^n 时刻的解和变换生成. 此时, 每一时刻的变换 $\xi = \xi(x)$ 和反变换 $x = x(\xi)$ 均与时间无关. Bell和Shubin^[8]应用Brackbill^[9]的网格控制原理指出: 在这种情况下, 为使变换光滑、单值, 须使下述泛函取极小值:

$$\int_0^{L_n} V d\xi = \int_0^{L_n} [x_i^2 + \lambda_a W(\xi) x_i^2 + \lambda_b (x_i - x_i^*)^2] d\xi, \quad (4)$$

式中 L_n 为 ξ 的总长 ($0 \leq \xi \leq L_n$), 本文取 L_n 与 x 的总长相等. $x_i = \Delta x / \Delta \xi$, x_i^* 是 t^n 时刻的 x_i 值, $W(\xi)$ 是权函数, λ_a 和 λ_b 为相对强调因子. 括号中的第一项使网格不重迭, 且总是使 Δx 趋于均匀, 第二项使得在权函数 W 大的地方相应的 Δx 较小(即网格变密), 第三项则是限制网格节点的移动速度, 使网格移动稳定. 由欧拉公式($\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x_i}$) $V=0$ 得:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [x_i + \lambda_a W(\xi) x_i + \lambda_b (x_i - x_i^*)] = 0, \quad (5)$$

$$(1 + \lambda_a W(\xi) + \lambda_b) x_i + \lambda_a W_i(\xi) x_i - \lambda_b x_i^* = 0. \quad (6)$$

设网格总点数为 N , 边界点不运动($x_1 = 0, x_N = L_n$), 将方程(6)离散化:

$$(1 + \lambda_a W_i + \lambda_b) \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta \xi)^2} + \lambda_a \frac{W_{i+1} - W_{i-1}}{2\Delta \xi} \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta \xi} - \lambda_b \frac{x_{i+1}^* - 2x_i^* + x_{i-1}^*}{(\Delta \xi)^2} = 0. \quad i=2, 3, \dots, N-1, \quad \Delta \xi = L_n / (n-1). \quad (7)$$

整理后可得:

$$\begin{cases} A_i x_{i-1} + B_i x_i + CC_i x_{i+1} = DD_i, & i=2, 3, \dots, N-1 \\ x_1 = 0, \quad x_N = L_n, \\ A_i = 1 + \lambda_b + \lambda_a \left(W_i + \frac{W_{i-1}}{4} - \frac{W_{i+1}}{4} \right), \\ B_i = -2(1 + \lambda_a W_i + \lambda_b), \\ CC_i = 1 + \lambda_b + \lambda_a \left(\frac{W_{i+1}}{4} + W_i - \frac{W_{i-1}}{4} \right), \\ DD_i = \lambda_b (x_{i+1}^* - 2x_i^* + x_{i-1}^*). \end{cases} \quad (8)$$

这是三对角线性方程组，用追赶法可以获得各 x_i 值，从而形成所需网格。另一种等价的方法是直接对方程(5)进行积分可得：

$$x_i + \lambda_a W(\xi) x_i + \lambda_b (x_i - x_i^*) = K_n,$$

即
$$x(\xi) = \int_0^\xi \frac{K_n + \lambda_b x_i^*}{1 + \lambda_a W(\xi) + \lambda_b} d\xi. \quad (9)$$

常数 K_n 的取值应使积分式满足 $x(\xi)|_{\xi=L_n} = L_n$ 。无论用哪种方法生成网格，均要适当地选取权函数 $W(\xi)$ ，使它想要 Δx 小的地方相应较大。一般 $W(\xi)$ 可选用解的某些特征量，如弧长、梯度和误差。其中较理想的情况是让 $W(\xi)$ 等于差分方程的截断误差，使得误差大的地方网格自动密集、降低误差，最终使求得的各网格节点上解的误差均等^[10]。但在通常情况下，误差的表达式在计算中往往不易求得，所以，常常用解的梯度作为权函数。这样，在梯度大的地方网格点密集，流函数就很好地分辨，也可使误差有效地降低^[11]。本文将解函数 ϕ 的梯度的绝对值归一化，然后取为权函数：

$$W_i = \frac{|\phi_{\xi, i-1}^*| + |2\phi_{\xi, i}^*| + |\phi_{\xi, i+1}^*|}{4(W_{\max} - W_{\min})}, \quad (10)$$

其中 ϕ^* 为 t^* 时刻的 ϕ 。式(10)使得网格在 ϕ^* 梯度大的地方密集，而且密集区有一定的宽度。配合适当选取时间步长 Δt ，可保证以此网格求出的解 ϕ 的梯度大的地方仍落在这一区域内^[8]。经过变换，在原本的 $t-x$ 平面显得很陡的函数 ψ ，在相应的 $\xi-\tau$ 平面上 $\phi(\xi) = \psi(x) = \psi(\xi)$ 要平缓得多^[11]（如图2所示）。

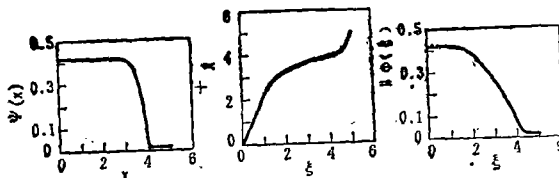


图2 网格变换分辨梯度

$\psi(x) = \psi(\xi)$ 要平缓得多^[11]（如图2所示）。

四、差分方程的建立及求解

在上述网格变换的基础上，对定解方程的离散化可有两种处理方法：（1）将原方程变换到 $\xi-\tau$ 平面，然后在该平均的均匀网格上离散。但对复杂的原方程作变换和离散会变得十分麻烦。（2）直接在不均匀的物理网格上离散原方程，网格变换技术只是用来生成非均匀的物理网格。本文选用后一种处理方法。由于网格变换保证了光滑，故在非均匀物理网格上直接用中心差分仍能保证 $O(\Delta\xi)^2$ 精度^[12]。为使求解格式简单方便，当生成 t^{*+1} 时网格 x_i 后，将 t^* 时的解 ψ^* 在新网格上的 $\psi^{*'}$ 用三点抛物线插值法求出，这样每一步求解便是在同一网格上了（如图3所示）。

对于层状土的垂直入渗，流动满足方程(3)。其中对流项为重力项，但在干土入

渗时, 以扩散为主, 至于问题的定解条件, 作为算例, 本文采用:

$$t=0, z>0, h(z)=5000\text{cmH}_2\text{O}, 0\leq z\leq z_{L3},$$

$$t>0, z=0, h(0)=\begin{cases} 3.9t \text{ cmH}_2\text{O}, t\leq 1\text{min}, \\ 3.9 \text{ cmH}_2\text{O}, t>1\text{min}, \end{cases}$$

$$t>0, z=z_{L3}, h(z_{L3})=5000 \text{ cmH}_2\text{O}.$$

(11)

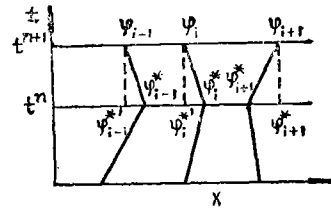


图 3 解函数的插值

在分界面处, 其质吸力 h 连续, 水流通量连续. 用Keller^[13]箱式积分法离散方程(3), 对方程两边在区域 $z_{i-1/2}\leq z\leq z_{i+1/2}$. $t^n\leq t\leq t^{n+1}$ 上积分:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} C \frac{\partial h}{\partial t} dz dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial (h+z)}{\partial z} \right) dz dt, \quad (12)$$

若土层交界面不在这个小区域内, 则:

$$\text{式(12)左端} = \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} C^{n+1/2} (h^{n+1} - h^n) dz = C_i^{n+1/2} (h_i^{n+1} - h_i^n) \frac{1}{2} (z_{i+1} - z_{i-1}), \quad (13)$$

$$\text{式(12)右端} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} (q_{i+1/2} - q_{i-1/2}) dt = (q_{i+1/2}^{n+1} - q_{i-1/2}^{n+1}) \Delta t, \quad (14)$$

其中 $q = K(h) \frac{\partial (h+z)}{\partial z}$ 为水流通量. 即有 $h_i - h_{i-1} + z_i - z_{i-1} = \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{q}{K} dz$

$$= q_{i-1/2} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{1}{K} dz.$$

$$\text{令} \quad E_i = (z_i - z_{i-1}) \left[\int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{1}{K} dz \right]^{-1} = K_{i+1/2}, \quad (15)$$

这样式(14)变成:

$$\text{式(12)右端} = \left[E_{i+1}^{n+1} \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1} + z_{i+1} - z_i}{z_{i+1} - z_i} - E_i^{n+1} \frac{h_i^{n+1} - h_{i-1}^{n+1} + z_i - z_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} \right] \Delta t, \quad (16)$$

当交界面 z_B 正好处于 $[z_{i-1}, z_i]$ 之间, 即 $z_{i-1} \leq z_B \leq z_i$ 时, 由于交界面上 h, q 连续, 所以式(13)和式(14)不变, 此时:

$$h_i - h_{i-1} + z_i - z_{i-1} = q_{i-1/2} \left[\int_{z_{i-1}}^{z_B} \frac{1}{K} dz + \int_{z_B}^{z_i} \frac{1}{K} dz \right],$$

如果令:
$$E_i = (z_i - z_{i-1}) \left[\int_{z_{i-1}}^{z_B} \frac{1}{K} dz + \int_{z_B}^{z_i} \frac{1}{K} dz \right]^{-1}$$

$$\doteq \frac{(z_i - z_{i-1}) \cdot K_i \cdot K_{i-1}}{(z_i - z_B) \cdot K_{i-1} + (z_B - z_{i-1}) \cdot K_i},$$

则式(16)的形式也不变, 最终的离散结果为:

$$C_i^{n+1/2} \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} = \frac{E_{i+1}^{n+1} \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_{i+1}^n + z_{i+1} - z_i}{z_{i+1} - z_i} - E_i^{n+1} \frac{h_i^{n+1} - h_i^n + z_i - z_{i-1}}{z_i - z_{i-1}}}{1/2 \cdot (z_{i+1} - z_{i-1})} \quad (17)$$

其中:
$$C_i^{n+1/2} = C \left[\frac{h_i^n + h_i^{n+1}}{2} \right], \quad K_{i+1/2}^{n+1} = K \left[\frac{h_i^{n+1} + h_{i+1}^{n+1}}{2} \right].$$

$$E_{i+1}^{n+1} = \begin{cases} K_{i+1/2}^{n+1}, & \text{对 } z_B \text{ 不在 } [z_i, z_{i+1}] \text{ 内} \\ \frac{(z_{i+1} - z_i) \cdot K_{i+1}^{n+1} \cdot K_i^{n+1}}{(z_{i+1} - z_B) \cdot K_i^{n+1} + (z_B - z_i) \cdot K_{i+1}^{n+1}}, & \text{对 } z_B \text{ 在 } [z_i, z_{i+1}] \text{ 内} \end{cases}$$

网格 z_i 用第三节中的网格变换方程(8)求出, 格式精度为 $(\Delta t + 4\xi^2)$. 由于原方程(3)是守恒型方程, 由此箱式积分法得出的差分格式是无条件稳定的. 此差分方程可整理成三对角方程组的形式:

$$\begin{cases} A_i h_i^{n+1} + B_i h_{i+1}^{n+1} - CC_i h_{i+1}^n = DD_i, \quad i=2, 3, \dots, N-1 \\ A_i' = -\frac{2\Delta t}{(z_{i+1} - z_{i-1})} \cdot \frac{E_i^{n+1}}{(z_i - z_{i-1})}, \\ B_i' = C_i^{n+1/2} - A_i' - CC_i', \\ CC_i' = -\frac{2\Delta t}{(z_{i+1} - z_{i-1})} \cdot \frac{E_{i+1}^{n+1}}{(z_{i+1} - z_i)}, \\ DD_i' = C_i^{n+1/2} h_i^n + \frac{2\Delta t}{(z_{i+1} - z_{i-1})} \cdot (E_{i+1}^{n+1} - E_i^{n+1}). \end{cases} \quad (18)$$

结合初始条件和边界条件(11)有:

$$h_i^0 = 5000 \text{cmH}_2\text{O}, \quad i=2, 3, \dots, N-1$$

$$h_0 = \begin{cases} 3.9t, & t \leq 1 \\ 3.9, & t > 1 \end{cases} \quad h(z_{L3}) = 5000 \text{cmH}_2\text{O}.$$

层状土柱交界面位置:

$$z_{B1} = 33.5 \text{cm},$$

$$z_{B2} = 55.5 \text{cm}.$$

用迭代法求解, 判定收敛准则为:

$$\max(|h_i^{n+1(k)} - h_i^{n+1(k-1)}|) \leq \epsilon_1.$$

k 为迭代次数, 迭代初始值取 $h_i^{n+1(0)} = h_i^n$, 以上所有的 h_i^n 均为新网格插值后的值. 图4是求解过程流程图, 表1是通过试算确定的各参数取值.

计算中时间步长的选取要使湿润锋总是落在网格密集区内, 参数 λ_s 、 λ_0 也是在计算中视情况而定, 流动参数 $C(h)$ 和 $K(h)$ 是直接应用实验数据. 图5是计算得出的土壤基质吸力 h 在不同时刻分布图. 图中实线是用相应的固定网格(网格点数是移动网格的4

表 1 垂直入渗计算的参数取值

λ_a	λ_b	ε_1 (cmH ₂ O)	Δt (min)	N	初始网格
10	5	0.5	0.1 (t < 90) 1.0 (t > 90)	39	$Z_i = 0, i = 2, 3, \dots, n-1$ $Z_i - Z_{i-1} = 0.52 + 0.08(i-2)$

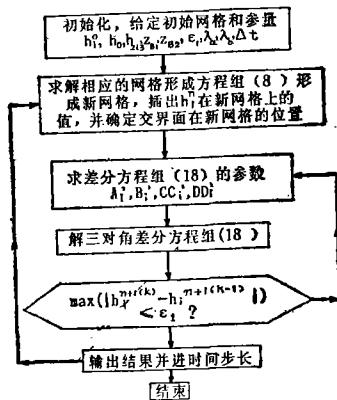


图 4 分层土垂直入渗计算流程

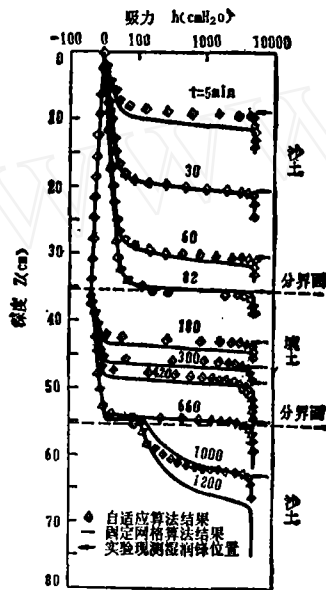


图 5 垂直入渗土壤吸力剖面图

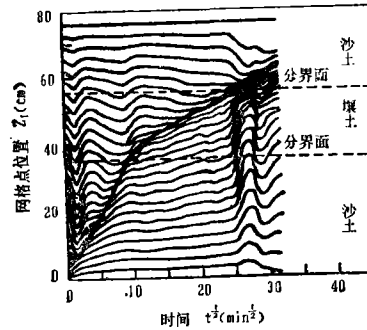


图 6 网格移动迹线

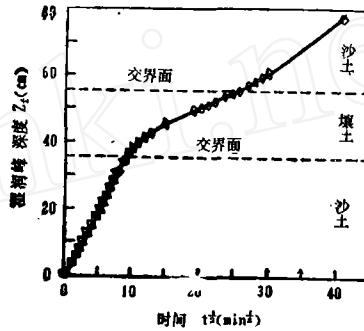


图 7 层状土入渗实验中湿润锋的移动

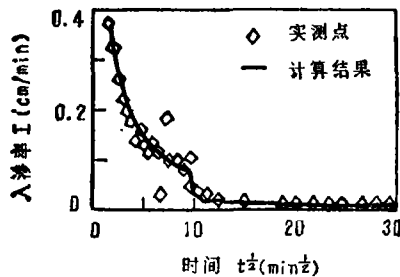


图 8 入渗率计算结果

倍, $N = 152$) 计算的结果. 箭头所指为分层土(砂土-壤土-砂土)积水入渗实验中所观察到的干湿交面位置. 图 6 是计算过程中网格移动迹线, 图 7 是层状土柱积水入渗实验中所观测到的湿润锋的移动, 图 8 是计算出入渗率和实验观测结果的比较.

五、结果分析和讨论

计算结果与实验结果吻合较好, 表明了流动模型准确地描述了这一入渗过程, 所用的自适应网格差分方法能很好地对这种过程进行数值模拟, 特别是对湿润锋有很高的分

分辨率。

从计算结果可以看到,入渗开始在砂土层内发展很快,在湿润锋未到达分界面时,与均质土入渗相同。当湿润锋进入壤土层时,上面砂土层的吸力已成负值,即形成积水水位,这个水位在分界面处达到最高,并且向壤土层发展,同时不断衰减,在第二个交界面处消失(见图5)。这是因为当湿润锋从粗质土(砂土)到达分界面时立即进入细质土层(壤土),由于细质土导水率较低,造成入渗速率立即减低(见图8),此后的渗透速度取决于细质土层,同时,水分在粗质土层逐渐积聚,并形成临时积水水位。相反,如果入渗是从细质土层进入粗质土层,当湿润锋到达分界面(相当于第二交界面的情况)时,由于细质土基质吸力较大,水分不能立即进入粗质土层,造成湿润锋原地停滞不前(图6),渗透速度进一步下降(见图8)。只有当分界面上细质土的基质吸力降到足够低时,水分才能进入粗质土层,继而向下渗透,此时的渗透速度仍受细质土层制约。以上说明了土壤的分层总是阻碍入渗发展的,只是粗质土和细质土对水流的阻碍机理有所不同。

从图5中可以看到,移动网格计算结果和固定网格相比较,前者与实验结果更吻合,然而移动网格的计算量只及固定网格20%。计算过程中网格移动迹线和湿润锋移动的实验曲线(见图7)是一致的,可以看到网格在湿润锋附近变得很密,而且这一密集区始终跟踪湿润锋移动。计算结果还表明移动网格的最小间距可小到 $4Z_{min}=0.0542\text{cm}$,若是固定网格要达到这么高的分辨率,则需上千个网格点,此移动网格($N=39$)要多出数十倍。从图6中还可以看到,在湿润锋从砂土层进入壤土层时,网格迹线有些抖动,这并不影响计算结果。

六、结 论

本文用自适应网格差分方法模拟计算了层状土积水入渗过程,计算结果与实验结果相吻合。本文还用固定网格差分方法作了对比计算,结果表明自适应网格能很好地分辨土壤的吸力梯度,从而能详细地反映湿润锋情况,并且网格密集区始终跟踪锋面移动。较之固定网格,可以用较少的网格点达到高分辨率,大大减少计算量。实践证明自适应网格非常适用于象入渗这类具有不断移动的水流锋面问题的求解。

参 考 文 献

- [1] Fok, Yu-Si., Evolution of algebraic infiltration equations. In: Infiltration development and application. Yu-Si Fok (ed.), Water Resour. Res. Center, Honolulu, 1987.
- [2] Coleman, E.A., and Bodman, G.B. Moisture and energy conditions during downward entry of water into moist and layered soils. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, Vol.9, pp.3-11, 1945.
- [3] Bodman, G.B., and Colman, E.A. Moisture and energy conditions during downward entry of water into moist and layered soils. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, Vol.8; pp.116-122, 1940.
- [4] Hanks, R.J., and Bowers, S.B., Numerical solutions of the diffusion equation for the movement of water in soils. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, Vol 26, pp.530-534, 1962.

(下转第42页)

$$E_{ec} = K_e E_{eb}, \quad (16)$$

式中, K_e 为潜水蒸发强度作物影响系数, 可由图 3、4 查出。

本文利用所推导的作物生长条件下地下水位为定水位时一维非饱和土壤水分稳定运动的解析解以及浅埋深时的实测资料, 对有作物生长影响和无作物时潜水蒸发的关系进行了分析。目前, 对无作物情况下的潜水蒸发已作了较为深入的研究, 如能用本文提出的方法对各种土质有无作物时潜水蒸发的关系进行分析, 得到 K_e 曲线, 则可根据无作物时的潜水蒸发求得相应条件下有作物生长影响时的潜水蒸发。如能再深入分析出 K_e 随作物生育期及土质的变化规律, 则可用这种方法计算有作物生长影响时的潜水蒸发量。

致谢 本文在张蔚榛、张瑜芳教授指导下完成, 并得到了吴金全博士的帮助。

参 考 文 献

- [1] 程先军, 作物生长条件下潜水蒸发的研究. 武汉水利电力学院研究生论文, 1990年。
- [2] 姚建文, 作物生长条件下土壤含水量预测的数学模型. 水利学报, 1989年第9期。
- [3] 黎庆淮主编, 土壤与农作. 水利电力出版社, 1979年。
- [4] 张朝新, 潜水蒸发规律分析. 地下水资源评价经验选编, 水电部治淮委员会, 1985年, 第242—255页。

(上接第36页)

- [5] Van Genuchten, M.th., Numerical solutions of the one dimensional saturated-unsaturated flow equations. *Research Report No. 78-WR-09* Princeton University, 1979.
- [6] Dane, J.H., Mathis, F.H., An adaptive finite difference scheme for the one dimensional water flow equation. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, Vol.45, pp.1048—1054, 1981.
- [7] 叶自桐, 用于分析有突变土层界面和水流锋面的非饱和土壤水运动的时间差分格式. 水利学报, 1987年第8期。
- [8] Bell, J.B., Shubin, G.R., An adaptive grid finite difference method for conservation laws. *J.Comput. Phys.*, Vol.52; pp.569—597, 1983.
- [9] Braokbill, J.V., Coordinate system control; Adaptive mesh. In: J.F.Thompson (ed.), *Numerical grid generation*, North-Holland, New York, 1982.
- [10] Dwyer, H.A., Smooker, M.D., Kee, R.J., Adaptive gridding for finite difference solutions to heat and mass transfer problems. In: J.F.Thompson (ed.), *Numerical grid generation*. North-Holland, New York, 1982.
- [11] Chong, T.H., A variable mesh finite difference method for solving a class of parabolic differential equations in one space variable. *Siam J. Numer. Anal.*, Vol.15, pp.835—857, 1978.
- [12] Hoffman, J.D., Relationship between the truncation errors of centered finite-difference approximations on uniform and nonuniform meshes. *J.Comput. Phys.*, Vol.46; pp.469—474, 1982.
- [13] Keller, H.B., A new difference scheme for parabolic problems. In: *Numerical solution of partial differential equations II*, ed. by B. Hubbard. Academic Press, New York, 1971.