

机械能方程的耗散积分解析表示式

何龙德

(中国科学院力学研究所, 北京, 100080)

ANALYTICAL EXPRESSION OF DISSIPATION INTEGRAL FOR KINETIC ENERGY INTEGRAL EQUATION

He Long-de

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing, 100080)

摘要 发展了二维可压湍流边界层的耗散积分方法。采用两层涡粘性模型和速度剖面的指数律导出机械能方程的耗散积分解析表示式。它是局部摩擦系数、形状因子、 Ma 数和基于动量厚度的 Re 数的函数。该方法运算简捷, 使用方便, 大大简化了湍流边界层计算。和其他理论结果相比, 本文结果更接近于实验数据。

关键词 可压缩流, 边界层, 涡粘性, 耗散积分

Abstract A dissipation integral method is developed for calculating compressible turbulent boundary layers on planar bodies. An analytical expression of dissipation integral for kinetic energy integral equation is derived by two-layer eddy viscosity turbulence model and the power law of the velocity profile. The analytical expression depends on the local values of skin friction, shape factor, Mach number, and Reynolds number based on momentum thickness. The method is easy to use, and thus the calculation of the turbulent boundary layers is significantly simplified. The analytical expression is in better agreement with experimental data than other theoretical results.

Key words compressible flow, boundary layers, eddy viscosity, dissipation integral

1968年在Stanford大学召开的湍流讨论会上, 认为机械能法和动量矩法是边界层积分法中较好的方法^[1]。机械能法系指除Karman动量积分方程外, 机械能方程是主要附加方程的方法。求解机械能方程的主要困难在于确定耗散项。确定它需要了解边界层剖面上湍流特性全貌, 因而多年来该法进展缓慢。Whitfield^[2,3]采用两层涡粘性模型和速度剖面的复杂关系式, 沿边界层剖面数值积分确定耗散项。这样, 求解边界层方程时, 沿流向每推进一步都要重新计算耗散项, 因而使用颇为不便。文献[4]则给出计算耗散项的经验公式。遗憾的是, 上述理论结果均未给出实验验证。若能给出符合实验结果的耗散项解析表示式, 无疑对发展边界层积分方法是有益的。

1 机械能方程及其耗散项

采用边界层坐标系, x 、 y 分别沿物面和垂直于物面方向, 下面只写出机械能方程的具体形式^[2,3]

$$(1/2\rho_e u_e^3)d(\rho_e u_e^3 \theta H_{\theta})/dx + H_{\theta} \cdot (\theta/u_e)du_e/dx = (C_f/2)D \quad (1)$$

1991年12月3日收到, 1992年6月8日收到修改稿

式中 $D = \int_0^{\infty} (\tau / \tau_w) [\partial(u / u_e) / \partial y] dy$, δ 、 δ^* 和 θ 分别为边界层名义厚度、位移厚度和动量厚度, $H = \delta^* / \theta$ 为形状因子。 ρ 、 u 、 τ 和 C_f 为气流的密度、切向速度、剪应力和壁面摩擦系数。下标 e 和 w 分别表示边界层外缘处和壁面上的流动状态。 H_{δ^*} 、 H_{δ} 的具体定义见文献[2]。

在后面的推导中, 耗散项 D 作如下近似

$$D = \int_0^{\infty} (\tau / \tau_w) [\partial(u / u_e) / \partial y] dy \approx \int_0^{\delta} (\tau / \tau_w) [\partial(u / u_e) / \partial y] dy \quad (2)$$

假定 $0 < y / \delta < 0.01$ 的区域为粘性底层和过渡层区, 在此区, 粘性应力和湍流应力之和, 即总剪应力 τ , 等于壁面上的剪应力 τ_w 。在 $y / \delta > 0.01$ 的区域则忽略粘性应力, 剪应力完全由湍流应力组成, 即

$$\tau = -\rho \overline{u'v'} = \rho \varepsilon \partial u / \partial y \quad (3)$$

采用两层涡粘性模型^[2]和速度剖面指数律; 并以 $(\bar{\quad})$ 表示不可压状态, 则有 $u / u_e = (y / \delta)^N$, $N = (\bar{H} - 1) / 2$, 这样即可确定 τ 。在内区, 假定 $\rho \approx \rho_w$, $\partial u / \partial y > 0$, 则

$$\varepsilon_{\text{内}} = (0.41y)^2 \partial u / \partial y, \quad (\tau / \tau_w)_{\text{内}} = (2 / C_f) (\rho_w / \rho_e) (0.41N)^2 (y / \delta)^{2N} \quad (4)$$

在外区, 采用速度剖面指数律 $u / u_e = (y / \delta)^N$ 时耗散项计算值偏大。为简单计仍用指数律, 但是对外区涡模型作一修正, 以 $\bar{\theta}$ 代替 δ^* ; 并令 $\rho \approx (\rho_w + \rho_e) / 2$ 。于是

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\text{外}} &= 0.0168 u_e \bar{\theta} \\ (\tau / \tau_w)_{\text{外}} &= 0.0168 (2 / C_f) (\rho / \rho_e) (\bar{\theta} / \delta) N (y / \delta)^{N-1} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 $f = \theta / \bar{\theta}$, 将 ρ / ρ_e 和 u / u_e 的表示式代入可压流形状因子关系式 $H = (1 / \theta) \int_0^{\delta} [1 - (\rho u / \rho_e u_e)] dy$ 中, 积分可得

$$\theta / \delta = [1 - (1 + \rho_w / \rho_e) / (\bar{H} + 1)] / H$$

式中

$$H = \bar{H} (1 + 0.113 Ma_c^2) + 0.290 Ma_c^2$$

令 $\eta = y / \delta$, 将 $(\tau / \tau_w) \partial(u / u_e) / \partial \eta$ 在粘性底层、内层和外层的表示式代入 (2) 式, 得到

$$\begin{aligned} D &= \int_0^{0.01} \left(\frac{\tau}{\tau_w} \right)_{\text{底}} \frac{\partial(u / u_e)}{\partial \eta} d\eta + \int_{0.01}^{\eta_0} \left(\frac{\tau}{\tau_w} \right)_{\text{内}} \frac{\partial(u / u_e)}{\partial \eta} d\eta + \int_{\eta_0}^1 \left(\frac{\tau}{\tau_w} \right)_{\text{外}} \frac{\partial(u / u_e)}{\partial \eta} d\eta \\ &= 0.01^{(\bar{H}-1)/2} + \frac{\rho_w}{\rho_e} \frac{(0.41)^2 (\bar{H}-1)^2}{6C_f} [\eta_0^{1.5(\bar{H}-1)} - 0.01^{1.5(\bar{H}-1)}] \\ &\quad + \left(1 + \frac{\rho_w}{\rho_e} \right) \frac{0.0168 (\bar{H}-1)^2}{C_f 4(\bar{H}-2)} \left(\frac{\theta}{\delta} \right) (1 - \eta_0^{\bar{H}-2}) \end{aligned} \quad (6)$$

并有关系式

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_f &= \frac{0.3e^{-1.33\bar{H}}}{(\ln \bar{Re}_\theta / \ln 10)^{1.74+0.31\bar{H}}} + (1.1 \times 10^{-4}) \left[\operatorname{tgh} \left(4 - \frac{\bar{H}}{0.875} \right) - 1 \right] \\ \bar{C}_f / C_f &= F_c, \quad R_{c_\theta} = u_e \theta / \nu_e, \quad \bar{Re}_\theta = Re_\theta / F_c, \quad \rho_w / \rho_c = 1 / (1 + 0.2Ma_e^2) \\ \eta_0 &= \left[\frac{0.2\theta / \delta}{(\bar{H} - 1)f} \right]^{2/(\bar{H} + 1)}, \quad f = 1 - \frac{0.92Ma_e^2}{7.09 + Ma_e^2} \operatorname{tgh}[1.49(\bar{H} - 0.9)], \quad F_c = (1 + 0.2Ma_e^2) \end{aligned} \right\} (7)$$

上面所引用的 $\bar{C}_f = \bar{C}_f(Re_\theta, \bar{H})$ 公式是目前国际流体力学界普遍采用的优选壁面摩擦系数关系式。事实上，壁面剪应力 τ_w 对耗散项实际贡献很小。耗散项 D 之所以对 $C_f = 2\tau_w / \rho_e u_e^2$ 比较敏感，主要是将 τ_w 作为特征量对剪应力 τ 作了无量纲化的缘故。式 (7) 中 Re_θ 是基于动量厚度的 Re 数， Ma_e 是边界层外缘的气流 Ma 数。 η_0 是内区和外区分界点的 y / δ 值，由该点上 $\varepsilon_{内} = \varepsilon_{外}$ 条件确定。而 $H, f, \rho_w / \rho_c, C_f$ 和 F_c 的关系式均取自文献[2,3]。

2 计算结果与讨论

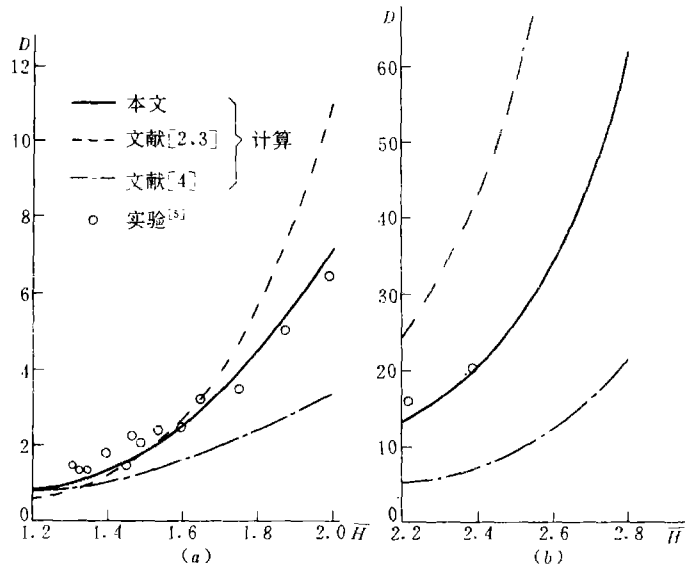


图 1 不可压湍流边界层的耗散值

(a) $\bar{Re}_\theta = 3.5 \times 10^4$ (b) $\bar{Re}_\theta = 7.0 \times 10^4$

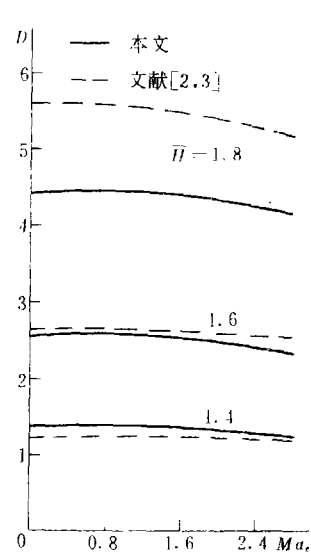


图 2 耗散值随 Ma_e 的变化

$\bar{Re}_\theta = 3.5 \times 10^4$

为了将 (6) 式的计算结果与实验及他人计算结果进行比较，整理数据时作了如下考虑：(1) 实验数据均取 $x > 5.334\text{m}$ 情况，以保证流动为完全湍流状态。 $1.3 \leq \bar{H} \leq 1.99$ 时实验数据的 Re_θ 变化范围约为 $(2.0 \sim 6.0) \times 10^4$ 。由于 D 对 \bar{H} 较敏感；对 Re_θ 并不敏感，算例中对 $\bar{H} \leq 2.0$ 取 $Re_\theta = 3.5 \times 10^4$ ；对 $\bar{H} \geq 2.20$ 则取 $Re_\theta = 7.0 \times 10^4$ 。(2) Schubauer 等人^[5] 风洞实验提供的是边界层剖面的剪应力 τ 和速度分布 u / u_e 。现对 u / u_e 进行样条插值求出对应于剪应力 τ 测量点的 $\partial(u / u_e) / \partial y$ ，再将 $(\tau / \tau_w)(u / u_e) / \partial y$ 沿边界层剖面数值积分得到耗散项 D 的实验值。(3) 为了便于耗散项的理论值与实验值作比较，现将每个边界层测量剖面的 \bar{Re}_θ 和 \bar{H} 实验值代入公式所得到的 \bar{C}_f 整理对应剖面的剪应力实验数据。

(4) Whitfield 的数值积分结果是按文献[2,3]提供的方法计算得到的。

从图 1 可看出本文结果与 Whitfield^[2,3]的数值积分结果在趋势和量级上较一致, 本文结果更接近于 Schubauer 实验数据。在宽广的 \bar{M} 变化范围内, 本文结果与实验数据的一致性令人满意的。图 2 给出了耗散项的压缩性效应。

参 考 文 献

- 1 怀特 F M 著, 魏中磊等译。粘性流体力学。机械工业出版社, 北京, 1982, 511~516
- 2 Whitfield D L. Integral Solution of Compressible Turbulent Boundary Layer Using Improved Velocity Profiles. AEDC-TR-78-42, 1978.
- 3 Whitfield D L, et al. Calculation of Turbulent Boundary Layers with Separation and Viscous-Inviscid Interaction. AIAA J, 1981, 19(10): 1315~1322
- 4 生井武文等著, 伊增欣译。粘性流体力学。海洋出版社, 北京, 1984, 220
- 5 Schubauer G B, Klebanoff P S. Investigation of Separation of the Turbulent Boundary Layer. NACA TN 2133, 1950.