第14卷 第8期 航 空 学 报 Vol.14 No.8
1993年 8月 ACTA AERONAUTICA ET ASTRONAUTICA SINICA Aug. 1993

跨音速喷管流动的数值模拟

唐安民 林同骥 浦 群
(中国科学院力学研究所，北京，100080)

NUMERICAL SIMULATION OF TRANSONIC NOZZLE FLOW

Tang An-min, Lin Tong-ji, Pu Qun
(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing*, 100080)

摘 要 数值方法采用的差分格式是具有高分辨率和快速稳定收敛性质的全变差衰减(TVD)格式。喷管壁面形状和反压可任意给定。对于典型轴对称与二维喷管(即壁面由收缩角为45°，扩张角为15°的两条直线用圆弧光滑连接而成，圆弧的无量纲半径等于0.625，其参考长度为喉道半宽)，进行了有激波与无激波流动的数值模拟。计算结果与实验结果以及其他计算结果符合良好。此法可推广到非定常跨音速喷管流动的计算，并可用于工程中喷管设计。

关键词 跨音速流动，喷管，差分法，激波

Abstract In this paper a method is given for calculating transonic nozzle flow with arbitrary nozzle wall shape and arbitrary back pressure by Total Variation Diminishing (TVD) scheme because of its high accuracy and rapid convergence. The results of axisymmetrical and plane nozzle flow fields, shock and shock free flow fields are obtained for a typical nozzle of two straight lines with convergent angle of 45°, divergent angle of 15° respectively connected smoothly with a circular arc whose non-dimensional radius of curvature is 0.625. The numerical results are in good agreement with experimental results and other numerical results. This method can be extended to unsteady transonic nozzle flow calculations and used for nozzle design of engineering application.

Key words transonic flow, nozzle, difference methods, shock

一定常无粘跨音速流的控制方程是混合型的，给直接数值计算带来很大不便。为克服此困难采用时间相关法，将混合型问题变成双曲型问题，即认为定常流动解是相应非定常流动趋于不变时的稳态解。到目前为止，关于时间相关法的论文繁多，并已出现专著[1]。值得指出的是 Harten 提出的一类全变差衰减格式(TVD)，它具有高分辨率、满足熵条件、保单调和快速稳定收敛等优越性而得到广泛应用。文献[2]给出了最早的 TVD 格式；文献[3]给出了 TVD 格式的一种改进；文献[4]对近期跨音速流动计算作了回顾与展望，同时给出边界条件处理方法。现参考上述文献，构造出带非齐次项的双曲型守恒方程的 TVD 格式并用于喷管流动计算；给出喷管进、出口和壁面边界条件。计算结果与文献[5,6]的计算结果以及实验结果[7]符合良好。

1 控制方程

1991年10月31日收到，1992年7月17日收到修改稿
国家自然科学基金资助课题

设喷管流动是非定常无粘绝热流，控制方程为

$$\partial U/\partial t+\partial F/\partial x+\partial G/\partial y+\mu H=0 \tag{1}$$

其中

$$U=(\rho,\ \rho u,\ \rho v,\ e)^{\mathrm{T}},\quad F=(\rho u,\ \rho u^2+p,\ \rho uv,\ (e+p)u)^{\mathrm{T}}$$

$$G=(\rho v,\ \rho uv,\ \rho v^2+p,\ (e+p)v)^{\mathrm{T}},\ H=(\rho v/y,\ \rho uv/y,\ \rho v^2/y,\ (e+p)v/y)^{\mathrm{T}}$$

$$p=(\gamma-1)(e-\rho(u^2+v^2)/2)$$

当 $\mu=0$ 时为平面流，$\mu=1$ 时为轴对称流。以滞止密度 ρ_0、滞止压力 p_0、滞止温度、速度$\sqrt{p_0/\rho_0}$、喷管喉道半宽 d 和时间 $d/\sqrt{p_0/\rho_0}$ 为参考量将(1)式无量纲化，其形式不变。为计算方便以

$$x=x(\xi,\ \eta)\quad,\qquad y=y(\xi,\ \eta) \tag{2}$$

将物理平面$(x,\ y)$变换到计算平面$(\xi,\ \eta)$上。变换后的方程为

$$\partial\tilde{U}/\partial t+\partial\tilde{F}/\partial\xi+\partial\tilde{G}/\partial\eta+\mu\tilde{H}=0 \tag{3}$$

其中

$$\tilde{U}=U/J,\ \tilde{F}=(\xi_x F+\xi_y G)/J,\ \tilde{G}=(\eta_x F+\eta_y G)/J$$

$$\tilde{H}=H/J,\ J=\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x$$

变换(2)式应使 J 在计算平面上保号，若 ξ，η 也是右手系，则 J 恒大于零。

2　显式 TVD 格式

对非齐次守恒型双曲型方程(3)，构造下列 TVD 格式

$$\tilde{U}^{n+1}_{i,j}=\tilde{U}^{n}_{i,j}-\lambda_\xi[M^{n}_{i+1/2,j}-M^{n}_{i-1/2,j}]-\lambda_\eta[N^{n}_{i,j+1/2}-N^{n}_{i,j-1/2}]-\Delta t\mu\tilde{H}^{n}_{i,j} \tag{4}$$

其中

$$\lambda_\xi=\Delta t/\Delta\xi,\ \lambda_\eta=\Delta t/\Delta\eta,$$

$$M_{i+1/2,j}=(\tilde{F}_{i,j}+\tilde{F}_{i+1,j})/2+R_{\xi_{i+1/2,j}}\beta_{\xi_{i+1/2,j}}/2\lambda_\xi \tag{5}$$

$$\beta^{l}_{\xi_{i+1/2,j}}=\left(g^{l}_{\xi_{i,j}}+g^{l}_{\xi_{i+1,j}}\right)-Q\left(v^{l}_{\xi_{i+1/2,j}}+\gamma^{l}_{\xi_{i+1/2,j}}\right)\alpha^{l}_{\xi_{i+1/2,j}} \tag{6}$$

$$g^{l}_{\xi_{i,j}}=S_\xi\max\left[0,\ \min\left(\sigma\left|\tilde{g}^{l}_{\xi_{i+1/2,j}}\right|,\ \sigma S_\xi\tilde{g}^{l}_{\xi_{i-1/2,j}},\ \left|\tilde{g}^{l}_{\xi_{i-1/2,j}}+\tilde{g}^{l}_{\xi_{i+1/2,j}}\right|\Big/2\right)\right] \tag{7}$$

$$\tilde{g}^{l}_{\xi_{i+1/2,j}}=\left[Q\left(v^{l}_{\xi_{i+1/2,j}}\right)-\left(v^{l}_{\xi_{i+1/2,j}}\right)^2\right]\alpha^{l}_{\xi_{i+1/2,j}}\Big/2 \tag{8}$$

$$S_\xi=\mathrm{sign}\left(g^{l}_{\xi_{i+1/2,j}}\right),\ v^{l}_{\xi_{i+1/2,j}}=\lambda_\xi a^{l}_{\xi_{i+1/2,j}} \tag{9}$$

$$\gamma^{l}_{\xi_{i+1/2,j}}=\begin{cases}\left(g^{l}_{\xi_{i+1,j}}-g^{l}_{\xi_{i,j}}\right)/\alpha^{l}_{\xi_{i+1/2,j}} & \alpha^{l}_{\xi_{i+1/2,j}}\neq 0\\ 0 & \alpha^{l}_{\xi_{i+1/2,j}}=0\end{cases} \tag{10}$$

$$\alpha^{l}_{\xi_{i+1/2,j}}=2R^{-1}_{\xi_{i+1/2,j}}(U^{n}_{i+1,j}-U^{n}_{i-1,j})/(J_{i,j}+J_{i+1,j}) \tag{11}$$

这里 a_ξ 是$A=\partial\tilde{F}/\partial\tilde{U}$的特征向量，$R_\xi$ 是其列为$\tilde{A}$的特征向量矩阵，R_ξ^{-1} 是 R_ξ 之逆。其具

体表达式见文献[8]。同理可写出 N 项表达式。为满足熵条件，取

$$Q(x)=\begin{cases}(x^2+\varepsilon^2)/2\varepsilon & |x|<\varepsilon\\ |x| & |x|>\varepsilon\end{cases} \tag{12}$$

上述格式主要来自文献[2]。(7)式来自文献[3]，(11)式，(12)式来自文献[9]。

在一维情况下，文献[2，3]已经证明 TVD 格式具有保单调性、高分辨率和满足熵条件；对时间与空间均为二阶精度。在二维任意曲线坐标下，现构造了带非齐次项的显式 TVD 格式(4)式，便于边界条件处理。为加速迭代，仿文献[9]采用变时间步长

$$\Delta\bar{t}=\Delta t/(1+\sqrt{J}) \tag{13}$$

文献[3]已证明，当 $\sigma=2$ 时一维 TVD 格式精度最高，现取 $\sigma=2$。对于喷管流动，因坐标变换后的网格接近正交，TVD 格式的稳定性非常好。数值实验发现，当 CFL 数达到 1.3 时计算仍稳定收敛。

3 坐标变换

选如下坐标变换

$$\mathrm{sh}(\beta\xi)=x\exp(Ky^2),\quad \eta(2-\alpha\eta)/(2-\alpha)=y/y_w(x) \tag{14}$$

设喷管上下壁面对称，只取上半喷管进行计算。$y_w(x)$是喷管壁面形状。参数 K 调等 ξ 线的倾斜程度；参数 α 调等 η 线的分布；参数 β 调等 ξ 线的分布。作为算例仅对典型直交喷管(即壁面由收缩角为 45°、扩张角为 15°的两条直线用圆弧光滑连接而成。圆弧的无量纲半径等于 0.625，其参考长度为喉道半宽)分析其跨音速流动。取 27×19 个网格，喉部位于第 14 条等 ξ 线处。并取 $K=0.1$，$\alpha=0.1$，$\beta=0.7$，$\Delta\xi=0.15$，$\Delta\eta=1/18$，见图 1。

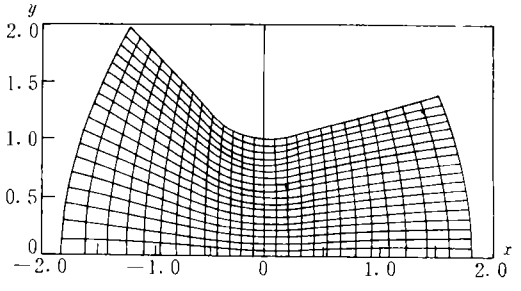

图 1 计算网格

4 边界条件

4.1 入口边界

设入口边界为亚音速来流，给定总压 p_0，总焓 H_0；并假定入口处各点来流沿等 η 线方向。令 α 为等 η 线在入口处的切线与 x 轴的夹角，再由第Ⅱ族 Riemann 不变量得到如下四个方程

$$p[1+(\gamma-1)(u^2+v^2)/2a^2]^{\gamma/(\gamma-1)}=p_0,\quad (u^2+v^2)/2+a^2/(\gamma-1)=H_0$$

$$v=u\mathrm{tg}\alpha,\qquad \sqrt{u^2+v^2}-2a/(\gamma-1)=R_{\mathrm{II}}$$

解得音速

$$a=[\gamma/(\gamma+1)]\left(\sqrt{(\gamma+1)H_0-(\gamma-1)R_{\mathrm{II}}^2/2}-R_{\mathrm{II}}\right)$$

计算结果与实验结果的一致性表明，这样假定入口处来流方向是可行的。

4.2 对称边界

因等 ξ 线与轴线正交，可用镜象法求得边界上的参数。

4.3 壁面边界

壁面边界的处理办法是将流动参数一阶外推，然后按壁面为流线的准则重新分布速度。计算证明这种方法简单易行，准确可靠。

4.4 出口边界

对于超音速出口边界，采用零阶外推；对于亚音速出口边界，给定反压 p_e，利用第一族 Riemann 不变量、熵外插、切向速度外插，得到如下四个独立方程

$$p = p_e, \quad \sqrt{u^2 + v^2} + 2a/(\gamma - 1) = R_1$$

$$p/\rho^\gamma = S_e, \quad (\eta_y u - \eta_x v)/\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} = V_t$$

解得

$$p = p_e, \quad \rho = (p_e / S_e)^{1/\gamma}, \quad a = \sqrt{\gamma p/\rho}$$

$$v = (\sqrt{B^2 + AC} - B)/A, \quad u = (\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}\, V_t + \eta_x v)/\eta_y$$

其中

$$A = 1 + (\eta_x / \eta_y)^2, \quad B = \eta_x \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}\, V_t / \eta_y^2$$

$$C = [R_1 - 2a/(\gamma - 1)]^2 - (1 + \eta_x^2/\eta_y^2) V_t^2$$

5 计算结果

对典型的平面和轴对称喷管计算了有激波与无激波的跨音速流动，并对较大的反压求出了喉部的超音速泡。计算时取比热比 $\gamma = 1.4$，总焓 $H_0 = 3.5$ 和总压 $p_0 = 1$。取准一维跨音速流场为初值，格式粘性系数 $\varepsilon = 0.125$。通量参数 $\sigma = 2$，时间步长 $\Delta t = 0.016$，CFL 数约等于 0.8。精度要求前后两次迭代之差小于 10^{-4}。

5.1 轴对称喷管无激波跨音速流场

由图 2(a)可看出，轴上 Mach 数由 0.6～2.0 计算与实验十分吻合，优于已发表过的其它计算结果。壁面上 Mach 数为 0.6 至 1.6 时计算与实验相当吻合，而且当 Mach 数为 2 时也符合得相当好，但在 1.6 至 2.0 范围内计算与实验有一定差别。在此区域内计算结果的再压缩没有实验结果那么强烈，原因是真正的流动存在粘性，且粘性在此区域内对流场影响很大。此时，TVD 格式中的格式粘性不能代替真正的粘性作用。表 1 列出本文结果与其他结果的比较。这里要说明的是文献[5]采用 41×11 个网格，文献[6]采用 61×21 个网格，其中收缩段占用了大部分网格。本文的网格则集中于喉部，便于更好地分析喉部流场。

5.2 二维喷管无激波跨音速流场

由图 2(b)可看出 Mach 数为 1.6 的等 Mach 线上游，本文结果与文献[6]结果符合较好。在其下游两种结果从定性的角度上看是一致的：喉部壁面附近有强烈的再压缩；在等

x线上流场从壁面Mach数较大逐渐转变成轴线上Mach数较大。喉道部分的特征数值计算结果见表1。从二维和轴对称喷管结果可看出，二维喷管入口处的Mach数较大，无量纲音速线在轴上几乎相同，在壁面上相差较大。轴对称和二维喷管的音速线与y轴的交点分别为0.67(2.3喉道半宽)和0.58(3.5喉道半宽)。在出口截面，轴对称流已基本均匀，出口Mach数为2.3；二维喷管流尚未达到均匀，最大Mach数约为2.0。

表1 无激波喷管流场特征数值的计算结果

		无量纲音速线位置		喉部Mach数		收缩因子	喉部压力系数	
		轴上	壁面	轴上	壁面		轴上	壁面
轴对称	本文	0.266	−0.186	0.79	1.403	0.894		
	文献[5]	0.24	−0.16	0.81	1.35	0.9828		
	文献[6]	0.240	−0.180	0.81	1.30			
	实验[7]	0.266	−0.182	0.80	1.40	0.95		
二维	本文计算	0.269	−0.273	0.83	1.49		0.58	0.27
	文献[6]计算	0.239	−0.254	0.85	1.48			

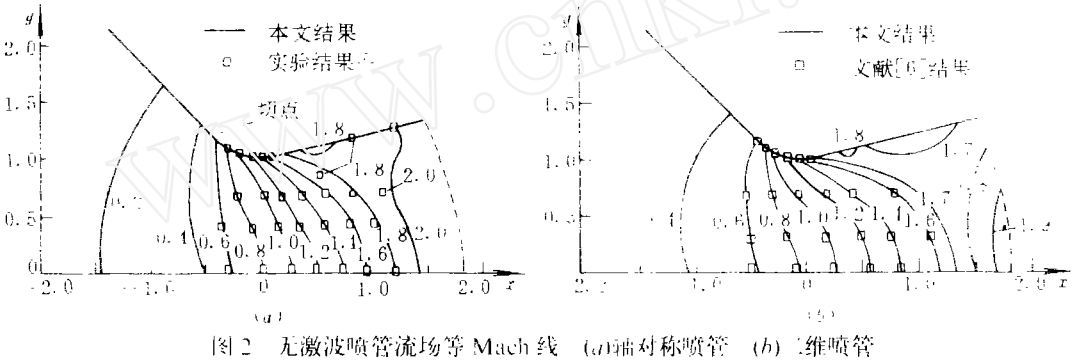

图2 无激波喷管流场等Mach线 (a)轴对称喷管 (b)二维喷管

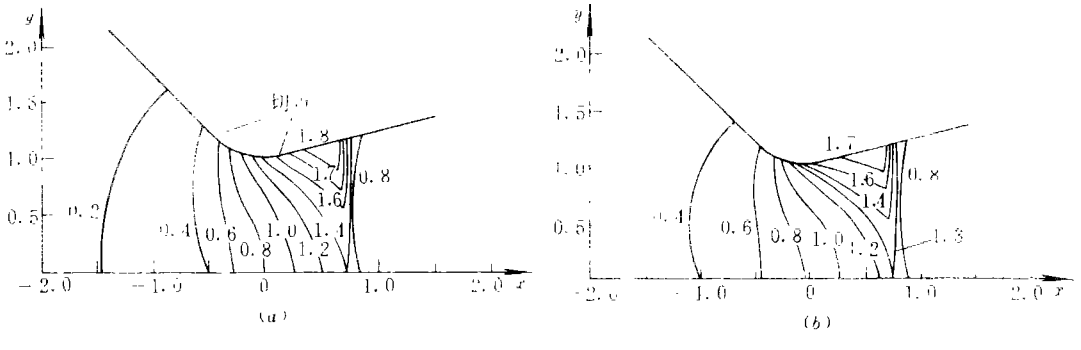

图3 反压$p_e=0.75$喷管的Mach数分布 (a)轴对称喷管 (b)二维喷管

5.3 喷管中带激波的跨音速流动

由于算例中喷管型线的扩张段较短，因此当反压提高时管内激波接近正激波。反压$p_e=0.75$时，激波宽度约为两个网格；位于截面积从1.17到1.20(无量纲，下同)的一段区域内。按准一维理论，出口截面积为1.38时正激波发生在截面积1.20处。对二维或轴对称喷管，激波位置基本相同(图3)。图中激波域内等亚音速线在对称线附近稍向后弯，这在物理上是不可能出现的。数值解出现这种现象的原因是对称线附近的边界条件处理欠

妥。在计算中发现，若将计算区域越过对称线扩大到整个喷管就会克服这种现象。激波上游流场与反压无关，只由上游条件决定。图 4 是二维和轴对称喷管在有、无激波时壁面与轴线 Mach 数比较。从图中可见，二维喷管 Mach 数在激波上游略高于无激波时的相应值；而轴对称喷管则相反。

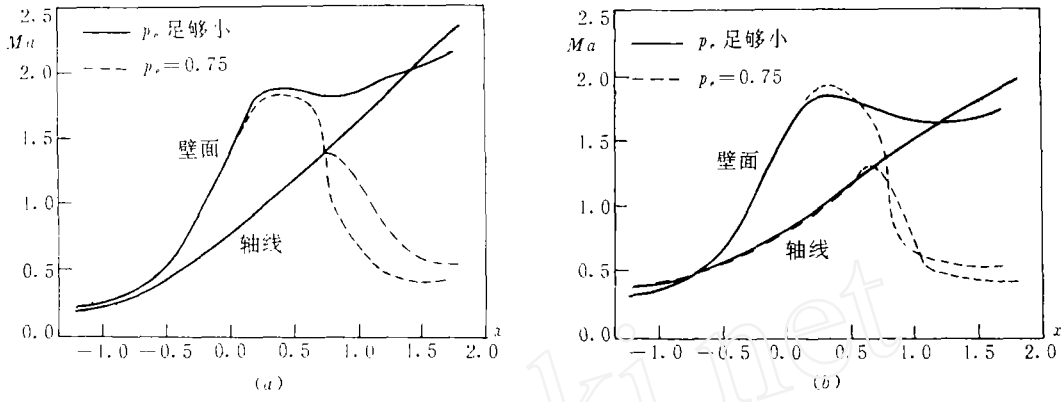

图 4　喷管壁面与轴线 Mach 数分布　(a)轴对称喷管　(b)二维喷管

进一步增大反压，可在喉部壁面附近得到一个以弱激波作为终止线的超音速泡。图 5 给出 $p_e=0.9$ 时轴对称喷管喉部的超音速泡，此超音速泡以弱激波作为终止线。

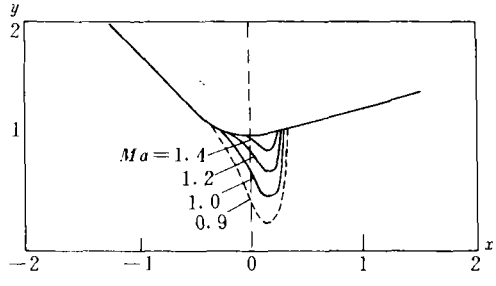

图 5　反压 $p_e=0.9$ 时轴对称喷管喉部的超音速泡

致谢　作者在构造差分格式的过程中与于欣、冀伟二同志进行过有益的讨论，在此向他们表示感谢。

参 考 文 献

1　李德元等. 二维非定常流体力学数值法. 北京：科学出版社，1987.

2　Warten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. J Comput Phy，1983，49: 357～393

3　于欣. 非齐次双曲型守恒律方程组的高分辨率差分格式. 数值计算与计算机应用，1987，(4):239～248

4　Jameson A，*et al*. Some Recent Developments in Numerical Methods for Transonic Flows. Comput Meth Appl Mech Eng，1985，51: 467～493

5　方丁酉. 用时间相关法计算喷管跨音速流场；空气动力学学报，1987，(2):10～18

6　Essers J A. Computational Fluid Dynamics. Washington: Hemisphere Publishing Corporation，1980，330～399

7　Cuffel R F，*et al*. Transonic Flowfield in a Supersonic Nozzle with Small Throat Radius of Curvature. AIAA J，1969，7(7):1364～1366

8　Pulliom T H，*et al*. Recent Improvements in Efficiency，Accuracy and Convergence for Implicit Approximate Factorization Algorithms. AIAA paper 85-0360，1985.

9　Yee H C，*et al*. Implicit TVD Schemes for Hyperbolic Conservations Laws in Curvilinear Coordinates. AIAA paper 85-1513，1985.