

λ 算法在轴对称情况的改进*

彭世谔 余少志 高 智**

廖 廖 铁 钊

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘 要 本文给出了一种改进的 λ 算法。该算法可以用于计算二维流动和轴对称流动。在导出了以广义黎曼变量表示的欧拉方程组后, 本文用两步两点迎风格式对方程组离散求解。由于采用了广义黎曼变量表示的方程组, 离散求解时充分考虑了变量的信息依赖域, 所以算法稳定性好; 由于仅用对待算点单侧一点构造格式, 所以算法简单, 编程容易, 同时也节省了计算时间。作为算例, 我们对钝体超音绕流进行了广泛计算, 结果表明, 本算法速度快, 稳定性好, 对初场不敏感。

关键词 欧拉方程 差分方法 钝体 超声速流动

1 引 言

由 Moretti 1979 年提出的 λ 算法以其高精度和优良的稳定性而醒目于世界^[1]。但由于此格式采用非守恒型方程, 激波需要拟合求解, 在波系比较复杂的流场中, 激波位置的探测和跟踪激波位置的变动均很困难, 应用上受到很大限制。进入八十年代后, 经过 Moretti 等人的努力, 解决了激波探测和跟踪问题^[2], 这一新发展使 λ 算法即克服了自身的弱点, 又突出了自身的长处, 十分引人注目。

1987 年 Moretti 又提出了一种改进的 λ 算法^[3]。该算法引入广义黎曼变量重构二维梯度形式基本方程组, 而后针对正交网格和非正交 H 型网格两种固定网格分别构造了两步两点迎风格式。并用此方法计算了二维跨音管流、超音进气道、超临界翼型和复杂马赫反射双曲线复杂流动^[4], 证明改进的 λ 算法在计算速度稳定性等方面更为优越。

本文将上述算法推广到轴对称流动, 因而可以用来处理包括二维平面流动和轴对称流动的一般二维流动问题; 另外, 由于在计算平面上构造算法, 因而抛弃了原算法对网格构造的要求, 对正交和非正交网格同等看待, 并可处理动网格问题。文中以钝头超音绕流为例对本文方法进行了考证。可以看出, 由于采用动网格, 激波被作为一条边界, 省去了激波检测和跟踪过程, 即节省了计算时间, 又简化了计算程序的编制。因为采用了一种无需迭代的激波处理方法, 使得计算时间大大缩短。数值计算表明, 本文方法速度快, 稳定性好, 对初场不敏感。如计算半球头绕流, 在 286 微机上仅需八分钟左右。可任意给定激波的初始脱体距离而不影响计算的快速收敛性。

1992 年 5 月 25 日收到原稿, 1993 年 5 月 29 日收到修改稿。

* 航空基金资助。 ** 南京航空学院。

本项目为国家自然科学基金资助项目。

2 黎曼型欧拉方程组

一般型式的欧拉方程组为：

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta} \frac{Da}{Dt} - \gamma a \frac{Ds}{Dt} + a \nabla q = 0 \\ \frac{Dq}{Dt} + \frac{a}{\delta} \nabla a - a^2 \nabla s = 0 \\ \frac{Ds}{Dt} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\delta = (\gamma - 1)/2$, γ 为比热比, a 、 q 、 s 分别为音速、速度矢、熵。

对任意一对正交单位矢量, 存在下列关系：

$$\begin{cases} \nabla \cdot q = n \cdot \nabla (q \cdot n) + \nabla (q \cdot \vec{\tau}) \cdot \vec{\tau} + b \times q \cdot \nabla \theta_0 + \sigma_1 [(q \cdot n) \sin \theta_0 \\ + (q \cdot \vec{\tau}) \cos \theta_0] (b \cdot \nabla \varphi_0) \\ W \cdot (q \cdot \nabla) q = q \cdot \nabla (w \cdot q) - q \cdot [(q \cdot \nabla) w] \\ (q \cdot \nabla) n = \vec{\tau} (q \cdot \nabla \theta_0) + [b (q \cdot \nabla \varphi_0) \sin \theta_0] \sigma_1 \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\sigma_1 = 1$ 对应于轴对称流动情况。 $\sigma_1 = 0$ 时, 对应于平面流动情况; n 、 $\vec{\tau}$ 为流动平面内的一对单位正交矢量; θ_0 为 n 与流动平面内某一参考方向的夹角; b 与 n 、 $\vec{\tau}$ 正交; w 为流动平面内任一单位矢量。 φ_0 为流动平面对某参考平面所张的角。

由方程组(1)可导出下列相容方程：

$$\begin{aligned} & \frac{a_t}{\delta} + w \cdot q + q \cdot \nabla \left(\frac{a}{\delta} + w \cdot q \right) - a s_t - a (q + a w) \cdot \nabla s \\ & + a w \cdot \nabla \left(\frac{a}{\delta} \right) + a n \cdot \nabla (n \cdot q) + a \vec{\tau} \cdot \nabla (\vec{\tau} \cdot q) \\ & - q \cdot [(q \cdot \nabla) w] + a (b \times q) \cdot \nabla \theta_0 + a [(q \cdot n) \sin \theta_0 \\ & + (q \cdot \vec{\tau}) \cos \theta_0] [b \cdot \nabla \varphi_0] = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

对于钝体头部流动的研究, 可采用球坐标系 (r, θ, φ) (对应于轴对称流动) 和极坐标系 (r, θ) (对应于二维平面流动)。如取 n 、 $\vec{\tau}$ 分别为子午面内的单位坐标向量, 则速度矢为: $q = u n + v \vec{\tau}$ 。由(3)式得到下列黎曼型欧拉方程组：

$$\begin{cases} \frac{a_t}{\delta} = a S_t - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \lambda_i' (R_{1r}' - a S_r) + \lambda_i^0 (R_{2r}' + a S_r) - F - \sigma_1 G \\ u_t = -\frac{1}{2} [\lambda_1' (R_{1r}' - a S_r) - \lambda_2' (R_{2r}' - a S_r)] - \lambda_3^0 u_\theta + \beta v \\ v_t = -\frac{1}{2} [\lambda_1^0 (R_{1\theta}^0 - a S_\theta) - \lambda_2^0 (R_{2\theta}^0 - a S_\theta)] - \lambda_3^0 v_\theta - \beta u \\ S_t = -[\lambda_3^0 S_\theta + \lambda_3' S_r] \end{cases} \quad (4)$$

其中, $R_1^r = \frac{a}{\delta} + u$, $R_2^r = \frac{a}{\delta} - u$, $R_1^0 = \frac{a}{\delta} + v$, $R_2^0 = \frac{a}{\delta} - v$, $\lambda_1^r = u + a$, $\lambda_2^r = u - a$,
 $\lambda_3^r = u$, $\lambda_1^0 = \frac{1}{r} (v + a)$, $\lambda_2^0 = \frac{1}{r} (v - a)$, $\lambda_3^0 = \frac{v}{r}$, $\sigma_1 = \begin{cases} 1, & \text{轴对称流动} \\ 0, & \text{平面流动} \end{cases}$, $\beta = \frac{v}{r}$,
 $F = \frac{au}{r}$, $G = \frac{a}{r} [u + v \operatorname{ctg} \theta]$.

3 动网格下的方程及算法构造

廖 廖 铁 钊

对物理区域作如下变换:

$$\begin{cases} X = \frac{r_s - r}{r_s - r_b} \\ Y = \frac{\pi - \theta}{\pi - \theta_{\min}} \\ \tau = t \end{cases} \quad (5)$$

其中, r_s 为激波方程, r_b 为物面方程, θ_{\min} 为下游边界的坐标。

方程组(4)变换后得到下列动网格下的方程组:

$$\begin{cases} a_\tau = \delta a S_t + \frac{1}{2} \delta [f_1^x + f_2^x + f_4^x - f_5^x + f_1^y + f_2^y + f_3^y + f_4^y] \\ u_\tau = \frac{1}{2} [f_1^x - f_2^x + 2f_3^y + f_2^y] \\ v_\tau = \frac{1}{2} [f_1^y - f_2^y + f_4^y + f_3^y + 2f_3^x + f_1^x] \\ S_\tau = f_6^x + f_4^y \end{cases} \quad (6)$$

其中,

$$\begin{aligned} f_1^x &= -\lambda_1^x (R_{1x}^x - a S_x) & , & & f_2^x &= -\lambda_2^x (R_{2x}^x - a S_x) \\ f_3^x &= -\lambda_3^x v_x & , & & f_4^x &= -\lambda_4^x (R_{1x}^x - a S_x) \\ f_5^x &= -\lambda_4^x (R_{2x}^x - a S_x) & , & & f_6^x &= -\lambda_3^x S_x \\ f_1^y &= -\lambda_1^y (R_{1y}^y - a S_y) & , & & f_2^y &= -\lambda_2^y (R_{2y}^y - a S_y) \\ f_3^y &= -\lambda_3^y u_y & , & & f_4^y &= -\lambda_3^y S_y \\ f_1^L &= -2\beta u & , & & f_2^L &= 2\beta v \\ f_3^L &= -2F & , & & f_4^L &= -2\sigma_1 G \\ F &= au/r & , & & \beta &= v/r \\ G &= a(u \sin \theta + v \cos \theta) / (r \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = \begin{cases} 1, & \text{轴对称流动} \\ 0, & \text{平面流动} \end{cases} .$$

$$\begin{aligned}
 R_1^x &= \frac{a}{\delta} + u, & R_2^x &= \frac{a}{\delta} - u \\
 R_1^y &= \frac{a}{\delta} + v, & R_2^y &= \frac{a}{\delta} - v \\
 \lambda_1^x &= U + X_r a, & \lambda_2^x &= U - X_r a, & \lambda_3^x &= U, & \lambda_4^x &= X_\theta \frac{a}{r} \\
 \lambda_1^y &= V + Y_\theta \frac{a}{r}, & \lambda_2^y &= V - Y_\theta \frac{a}{r}, & \lambda_3^y &= V \\
 U &= X_i + X_r u + X_\theta \frac{v}{r}, & V &= Y_\theta \frac{v}{r} \\
 X_i &= \frac{r - r_b}{(r_s - r_b)^2} \frac{\partial r_s}{\partial t}, & X_r &= -\frac{1}{r_s - r_b} \\
 X_\theta &= \frac{1}{(r_s - r_b)} \left[(r - r_b) \frac{\partial Y_s}{\partial \theta} + (r_s - r) \frac{\partial r_b}{\partial \theta} \right], & Y_\theta &= \frac{1}{\pi - \theta_{\min}}
 \end{aligned}$$

用两点两步迎风格式离散方程(6)即构造本文算法。下面以 f_i^x 为例说明离散过程。

令 $f_i^x = -\lambda_i^x \theta_x$, 则

第一步:

$$[f_i^x]_{n,m}^k = -\frac{1}{2\Delta x} [(\lambda_i^x)_{j,m} + (\lambda_i^x)_{j',m}] [\theta_{jm} - \theta_{j',m}]$$

其中, $j' = \begin{cases} n-1, & \lambda_{n,m}^x > 0 \\ n, & \lambda_{n,m}^x < 0 \end{cases}, j = j' + 1$

第二步:

$$[F_i^x]_{n,m}^{k+\frac{1}{2}} = 2[f_i^x]_{i,m}^{k+\frac{1}{2}} - [f_i^x]_{i,m}^k$$

其中, $i = \begin{cases} n-1, & \lambda_{n,m}^x > 0 \\ n, & \lambda_{n,m}^x < 0 \end{cases}$

先由 $[f_i^x]_{n,m}^k$ 等算出 $(k + \frac{1}{2})$ 时间层的参数, 再由 $[F_i^x]_{n,m}^{k+\frac{1}{2}}$ 等算出 $(k+1)$ 时间层的参数。

4 边界条件

由 λ_i^y 的表达式可知, 在下游(即 $Y=1$ 处), λ_i^y 大于零, 所以无需给定任何边界条件, f_i^y 由内点构造差分求得。物面边界条件为 $V \cdot n = 0$, 即物面法向速度为零。轴线上用对称条件。

激波边界用 Rankine-Hugoniot 条件, 先由下式得到激波运动加速度 W'_t :

$$W'_t = [N_{1c} (M_\infty \cos \theta + \frac{W'}{N_1^2 a_\infty} \frac{c_2}{c_1}) - N_{2c} M_\infty \sin \theta + \frac{(\gamma+1) \sum R_-}{4c_1 a_\infty}] N_1 a_\infty$$

其中, $N_{1t} = \frac{N_1 N_2}{r_s} (N_1 W'_\theta + N_2 W')$, $N_{2t} = \frac{N_1 N_1}{r_s} (-N_1 W'_\theta + N_2 W')$

谬 谬 $c_1 = 2 \sqrt{\frac{B}{A} + N_1 \left(1 + \frac{1}{M_{rs}^2}\right)}$, $c_2 = -\frac{1}{M_{rs}} + M_{rs}$

铁 钿 $\sum_R = 2f_1^X + f_4^X - f_5^X + f_1^Y + f_2^Y + f_3^Y + f_2^L + f_3^L + f_4^L$

$$A = \gamma M_{rs}^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \quad , \quad B = M_{rs}^2 \frac{\gamma - 1}{2} + 1$$

再由下式得到激波运动相对马赫数 M_{rs} :

$$M_{rs} = \frac{[M_\infty a_\infty (N_1 \cos\theta - N_2 \sin\theta) - W' / N_1]}{a_\infty}$$

代入 Rankine-Hugoniot 条件后得到波后各参数。

5 算例和结果分析

利用前述算法, 我们对超音速钝体头部绕流进行了计算, 计算实例包括圆头、抛物头、椭圆头、高次圆头 ($x^n + y^n = 1$) 等的轴对称流动和平面流动。与已有结果进行了比较表明, 本文得到的结果与其它计算结果符合得很好, 而计算时间大大减少。下面列出部分结果。

图 1 给出了本文方法与系数矩阵分裂法得到的球冠物面压力分布, 来流马赫数为 2.94。两种方法的结果符合得很好。

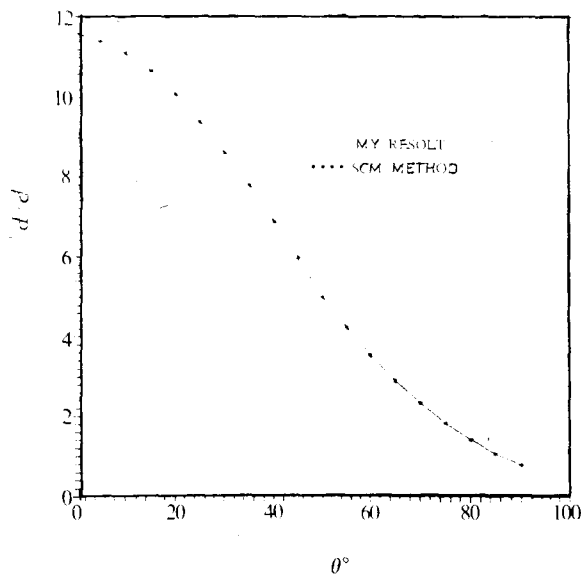


图 1 球冠绕流的物面压力分布曲线

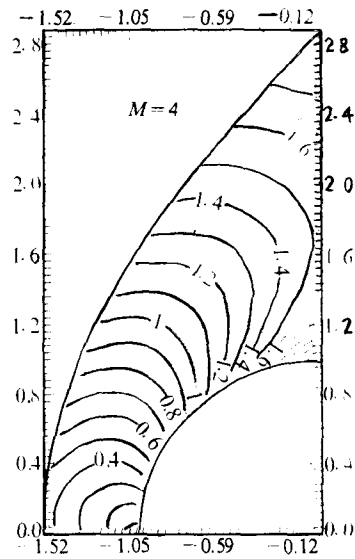


图 2 圆头平面绕流的等马赫数分布线

图 2 为平面圆头绕流的等马赫数线, 其结果与文献[5]中由谱方法得到的结果一致, 而前者的计算步数仅为后者的十分之一。计算时间在 286 微机 on 仅需 8 分钟左右。

其它算例的结果也令人满意, 因篇幅限制, 这里不一一列出。

参 考 文 献

- [1] Moretti G. The λ Scheme, *Computers & Fluids*, 1979, 7.
- [2] Moretti G. Valorani, Detection and Fitting of 2-D shockes, 7th GAMM Conf. Numer. Meth. Fluid Meth. Louvain-La-Neuve (1987).
- [3] Moretti G. A technique for Integrating 2-D Euler Equations, *Computers & Fluids*, 1987, 15.
- [4] Moretti G. Efficient Euler Solver with Many Applications, *AIAA J*, 1988, 26.
- [5] Hussaini MY. etc. Spectral Method for Euler Equations : Part II - Chebyshev Methods and Shock Fitting, *AIAA J*, 1984, 22.

A MODIFIED LAMBDA SCHEME FOR AXISYMMETRIC FLOW

Peng Shiliu, Yu Shaozhi and Gao Zhi*

Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences

(* *Nanjing Aeronautical Institute*)

ABSTRACT In this paper, a modified scheme is developed, which can be used for calculation of axisymmetric fluid flow. A set of Euler equations of generalized Riemann variable is derived and solved by two step upwind scheme. The convergence is good because of the consideration of dependent domain of information. Because of using only one point except the unknown one, this scheme is simple and coding is easy. As an example, this scheme has been used for the inviscid subsonic-supersonic flow around blunt bodies at supersonic speeds, the merits of this scheme is demonstrated by these numerical experiments.

KEY WORDS Euler equations, finite difference method, blunt body.