

断裂力学及边界元法在有限体 应变局部化问题中的应用

师自海

(中国科学院力学研究所,北京,100080)

堀井秀之

(东京大学工学部土木工学科)

摘要 微裂纹模型是研究砂土变形中应变局部化问题的微观力学模型。本文在前文^[1,2]的基础上建立了有限平面的微裂纹模型的基本方程。数值解析表明,微裂纹模型可再现应变局部化及应变软化现象。同时,本文简要地讨论了边界约束、尺寸效应及侧压对应变局部化的影响。

关键词 应变局部化,应变软化,微裂纹,局部剪胀,边界效应

一、引言

应变局部化是由材料变形的微观机理所致。因此,从材料的微观结构及其变形特性出发建立宏观现象的微观力学模型是研究应变局部化问题的一个重要方法。为研究砂土变形中的应变局部化问题,我们建立了一个新的微观力学模型,即微裂纹模型^[1,2]。这一模型应用断裂力学的理论研究在荷载作用下大量微裂纹的扩展规律,提出微裂纹间的相互干涉效应及剪胀效应导致应变局部化及应变软化的观点。在前文中我们略去边界效应对材料变形的影响,对无限平面建立了微裂纹模型的基本方程。数值解析表明,微裂纹模型能够较好地再现砂土变形中应变局部化及应变软化的过程,为研究应变局部化问题提供了一条有效途径。为进一步研究有限体中的应变局部化问题,特别是边界效应的影响,本文中我们利用边界元法给出了考虑边界约束后的微裂纹模型的数学解,并对应变局部化及应变软化的微观机理及其它一些影响材料变形的因素做了进一步的探讨。

二、微裂纹模型简述

密实砂土在荷载作用下,砂粒之间产生摩擦滑移、滚动及因砂粒的重新排列而引起的体积膨胀,即剪胀。为描述砂土变形的这一微观机制,我们考虑一个含有大量微裂纹的弹性体,如图1所示。这里微裂纹指一个初始缺陷及由此形成的两个滑移域,以此描述砂土的局部塑性变形。图中给出第*i*个微裂纹的初始缺陷长度及微裂纹总长度分别为 $2a_i$ 、

本文于1990年6月19日收到第一稿,于1991年3月19日收到修改稿。

及 $2c_i$ 。同时,微裂纹周围的弹性体对微裂纹的扩展提供必要的弹性约束。

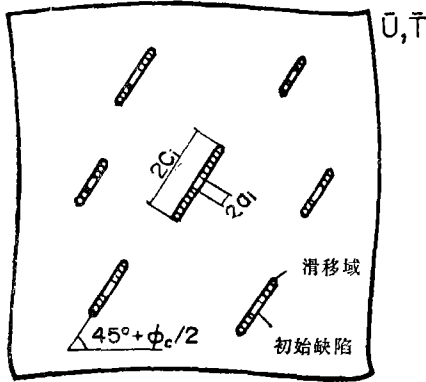


图 1

下面我们给出这一平面应变问题的微裂纹模型的边界条件。如图所示,有限体外侧的边界条件由位移 \bar{U} 或应力 \bar{T} 给定。作用于微裂纹上的剪应力由下面两式给出:

$$\tau_i^j = \sigma_n^i \tan \phi_0 \quad \text{沿初始缺陷,} \quad (2.1)$$

$$\tau_i^j = \sigma_n^i \tan \phi_c \quad \text{沿滑移域} (\phi_c > \phi_0). \quad (2.2)$$

这里, τ_i^j 、 σ_n^i 分别为作用于第 i 个微裂纹上的剪应力及正应力; ϕ_0 、 ϕ_c 分别为初始缺陷及滑移域上的内摩擦角。为引入剪胀效应,在微裂纹上定义一个与微裂纹长度成正比的附加正应力,即局部剪胀应力:

$$|\sigma_d^i| = \alpha_d c_i \quad (\sigma_d^i < 0) \quad (2.3)$$

这里, α_d 为剪胀系数。由于滑移域的存在,微裂纹两端的应力奇异性应当消失,即

$$K_{II} = 0 \quad (2.4)$$

满足条件(2.1—2.4)及给定的边界条件的弹性解给出荷载作用下的各微裂纹的长度。

微裂纹间的相互干涉效应及边界效应使得上述问题的求解变得较为复杂。利用边界元法及求解相互干涉问题的虚拟应力法^[3],上述问题可以简化为一组有关虚拟应力及微裂纹长度的非线性联立方程。通过数值计算可以进一步研究有限体内的大量微裂纹在外加荷载作用下的扩展规律。

三、微裂纹模型的基本方程

如图 2(a) 所示,有限平面中存在两个微裂纹,承受外加荷载的作用。下面我们推导这两个微裂纹的裂纹扩展基本方程,其结果很容易推广到 N 个微裂纹的情况。

采用虚拟应力法,原始问题可分解为 a、b、c 三个基本问题,如图所示。问题 a 为一不含微裂纹的弹性平面问题,其边界条件表达为未知的位移 U_{bb} 及应力 T_{bb} 。后面将引入这一弹性平面问题的边界积分方程及域内任意点的应力表达式。为进行数值计算,将边界分为 M 个单元,每一单元内,将未知函数用单元中点的值作常数近似。这样,第 i 个单元上的未知位移及应力分别为 (u_{bb}^i, v_{bb}^i) 和 $(\sigma_{bb}^i, \tau_{bb}^i)$ 。

对问题 b、c,我们考虑只含一个微裂纹的无限平面,且不受外力作用。图 2(a) 中的 σ_h^i 、 τ_h^i ($i = 1, 2$) 分别为问题 a 里第 i 个微裂纹位置上的正应力及剪应力; σ_d^i ($i = 1, 2$) 为作用于第 i 个微裂纹上的局部剪胀应力。

为求解这一微裂纹间的相互干涉问题,我们在问题 b、c 的微裂纹上引入虚拟剪应力 τ_p^i ($i = 1, 2$)。虚拟应力的确定应根据下面的原则,即所有基本问题的解进行迭加后,包括微裂纹在内的原始问题的所有边界条件必须得到满足。这里,我们仍假设作用在微裂纹上的虚拟应力为常量,以简化公式的推导。此外,每个微裂纹上还作用着由相互干涉效应引起的正应力 σ_{ir}^i ($i = 1, 2$)。如图 2(b) 所示,对问题 b、c 可做进一步分解。

直角坐标中由复变应力函数表达的应力、应变场为^[4]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2(\Phi' + \bar{\Phi}') \\ \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= 2(\bar{z}\Phi'' + \Psi') \\ 2G(u_x + iu_y) &= k\Phi - z\bar{\Phi}' - \bar{\Psi} \quad i = \sqrt{-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

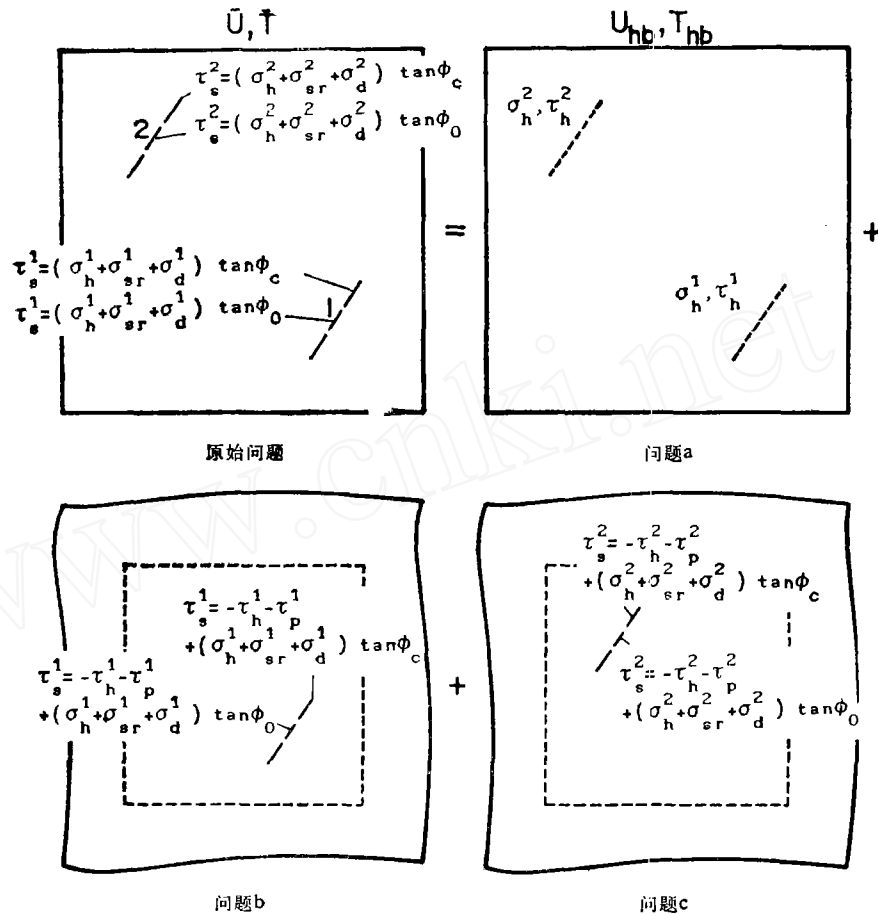


图 2 (a)

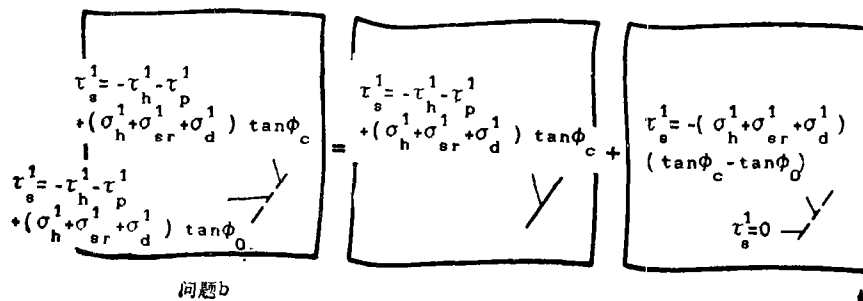


图 2 (b)

式中, G 为剪切模量, $k = 3 - 4\nu$ 与 $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ 分别对应于平面应变及平

面应力问题, ν 为泊松比。

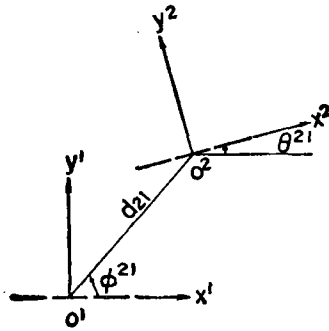


图 3

考虑两个局部坐标系 x^1y^1 、 x^2y^2 , 其坐标原点 o^1 、 o^2 分别位于微裂纹 1、2 的中点, 且 y^1 、 y^2 坐标分别垂直于微裂纹面 (图 3)。如图所示, x^1 坐标与 x^2 坐标间的夹角为 θ^{21} , o^1 与 o^2 间的距离为 d_{21} , x^1 与 o^1o^2 的夹角为 ϕ^{21} 。

问题 b、c 的应力函数为

$$\begin{aligned} \Phi^j(z_j) = & -\frac{1}{2\pi i(z_j^2 - c_j^2)^{1/2}} \int_{-c_j}^{c_j} \frac{\sqrt{t^2 - c_j^2}}{t - z_j} \\ & \cdot \{-\sigma_d^j - i[\tau_h^j + \tau_p^j - (\sigma_h^j + \sigma_{ir}^j + \sigma_d^j) \tan \phi_c]\} dt \\ & -\frac{1}{2\pi i(z_j^2 - c_j^2)^{1/2}} \int_{-c_j}^{c_j} \frac{\sqrt{t^2 - c_j^2}}{t - z_j} \\ & \cdot [-i2a_j(\sigma_h^j + \sigma_{ir}^j + \sigma_d^j)(\tan \phi_c - \tan \phi_0)\delta(t)] dt, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\Psi^j(z_j) = \overline{\Phi^j(\bar{z}_j)} - \Phi^j(z_j) - z_j \Phi^{j''}(z_j). \quad (3.3)$$

式中 $z_j = x^j + iy^j$, $\delta(t)$ 为 Dirac 函数。因设 $a_j/c_j \ll 1$, 故求解应力函数时将初始缺陷上的分布应力转换为一集中力。对(3.2)式进行积分及级数展开, 有

$$\begin{aligned} \Phi^j(z_j) = & -\frac{1}{4} \sigma_d^j \frac{c_j^2}{z_j^2} \\ & - i \frac{1}{4} [\tau_h^j + \tau_p^j - (\sigma_h^j + \sigma_{ir}^j + \sigma_d^j) \tan \phi_c] \frac{c_j^2}{z_j^2} \\ & - i \frac{1}{\pi} (\sigma_h^j + \sigma_{ir}^j + \sigma_d^j) (\tan \phi_c - \tan \phi_0) \frac{a_j c_j}{z_j^3} \end{aligned} \quad (3.4)$$

对(3.4)式求导, 得

$$\begin{aligned} \Phi^{j''}(z_j) = & \frac{1}{2} \sigma_d^j \frac{c_j^2}{z_j^3} \\ & + i \frac{1}{2} [\tau_h^j + \tau_p^j + (\sigma_h^j + \sigma_{ir}^j + \sigma_d^j) \tan \phi_c] \frac{c_j^2}{z_j^3} \\ & + i \frac{2}{\pi} (\sigma_h^j + \sigma_{ir}^j + \sigma_d^j) (\tan \phi_c - \tan \phi_0) \frac{a_j c_j}{z_j^3} \end{aligned} \quad (3.5)$$

及

$$\Psi^{j''}(z_j) = -\frac{1}{2} \sigma_d^j \frac{c_j^2}{z_j^2} \quad (3.6)$$

推导上面各式时, 因设 $|c_j/z_j| \ll 1$ 及 $|a_j/z_j| \ll 1$, 即微裂纹的长度远小于微裂纹之间的距离, 故省略了有关 c_j/z_j 和 a_j/z_j 的高次项。

为满足原始问题微裂纹上的应力边界条件, 令

$$\begin{aligned} \sigma_{ir}^i - i\tau_p^i = & \Phi^{i'}(z_i) + \overline{\Phi^{i'}(\bar{z}_i)} \\ & + e^{-i2\theta^{ij}} [z_j \Phi^{j''}(z_j) + \overline{\Psi^{j''}(z_j)}], \end{aligned} \quad (3.7)$$

这里 $(i, j) = (1, 2), (2, 1)$; z_j 为

$$z_j = d_{ij} e^{i\phi^{ij}}. \quad (3.8)$$

因只考虑相互平行的微裂纹, 故 $\theta^{ij} = 0$ 或 π . 将 (3.4)–(3.6) 式及 (3.8) 式代入 (3.7) 式并省略高次项, 得到 σ_{ir}^i 和 τ_p^i . 注意, $\sigma_{ir}^i = O[(c/d)^2]$ 及 $\tau_p^i = O[(c/d)^2]$ 并有 $c = O(c_j)$ 、 $d = O(d_{ij})$, 故等式右边有关 σ_{ir}^i 及 τ_p^i 的各项均作为高次项被省略.

对 N 个微裂纹, 则有

$$\begin{aligned} \sigma_{ir}^i = & \sum_{j=1}^N \left\{ \left(\frac{1}{2} \cos 4\phi^{ij} - \cos 2\phi^{ij} \right) \sigma_d^j \frac{c_j^2}{d_{ij}^2} \right. \\ & + \left[\frac{1}{2} (\tau_h^j - \sigma_h^j \tan \phi_c) \frac{c_j^2}{d_{ij}^2} \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{\pi} \sigma_h^j (\tan \phi_c - \tan \phi_0) \frac{a_j c_j}{d_{ij}^2} \right] (\sin 4\phi^{ij} - \sin 2\phi^{ij}) \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \tau_p^i = & \sum_{j=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} (\sin 4\phi^{ij} - \sin 2\phi^{ij}) \sigma_d^j \frac{c_j^2}{d_{ij}^2} \right. \\ & + \left[\frac{1}{2} (\tau_h^j - \sigma_h^j \tan \phi_c) \frac{c_j^2}{d_{ij}^2} \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{\pi} \sigma_h^j (\tan \phi_c - \tan \phi_0) \frac{a_j c_j}{d_{ij}^2} \right] \cos 4\phi^{ij} \right\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

由 (2.4) 式, 即裂纹两端 $K_{II} = 0$ 的条件, 得到下式:

$$\begin{aligned} c_i [\tau_h^i + \tau_p^i - (\sigma_h^i + \sigma_{ir}^i + \sigma_d^i) \tan \phi_c] \\ + \frac{2}{\pi} a_i (\sigma_h^i + \sigma_{ir}^i + \sigma_d^i) (\tan \phi_c - \tan \phi_0) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

以上各式中 $i = 1, 2, \dots, N$.

下面考虑问题的边界条件. 仍然选取两个局部坐标系 $x^i y^i$ 、 $x^j y^j$, 其坐标原点 O^i 、 O^j 分别位于第 i 个边界元素及第 j 个微裂纹的中点, 且 y^i 、 y^j 坐标分别垂直于边界及微裂纹面 (图 4). 如图所示, x^i 坐标与 x^j 坐标间的夹角为 θ^{ij} , O^i 与 O^j 间的距离为 d_{ij} , x^i 与 O^j 的夹角为 ϕ^{ij} . 根据上面的应力函数不难求得第 i 个边界单元上由第 j 个微裂纹引起的正应力及剪应力,

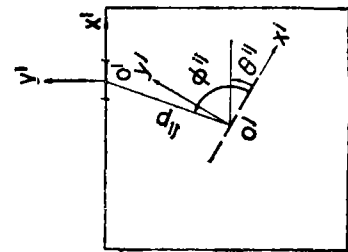


图 4

$$\begin{aligned} \sigma_{ib}^{ij} = & \frac{1}{2} [-\cos 2\phi^{ij} + \cos(4\phi^{ij} - 2\theta^{ij}) - \cos 2(\phi^{ij} - \theta^{ij})] \sigma_d^j \frac{c_j^2}{d_{ij}^2} \\ & + \frac{1}{2} [\sin(4\phi^{ij} - 2\theta^{ij}) - \sin 2\phi^{ij}] \left[(\tau_h^j - \sigma_h^j \tan \phi_c) \frac{c_j^2}{d_{ij}^2} \right. \\ & \left. + \frac{4}{\pi} \sigma_h^j (\tan \phi_c - \tan \phi_0) \frac{a_j c_j}{d_{ij}^2} \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \tau_{ib}^{ij} = & -\frac{1}{2} [\sin(4\phi^{ij} - 2\theta^{ij}) - \sin 2(\phi^{ij} - \theta^{ij})] \sigma_d^j \frac{c_j^2}{d_{ij}^2} \\ & + \frac{1}{2} \cos(4\phi^{ij} - 2\theta^{ij}) [(\tau_h^j - \sigma_h^j \tan \phi_c) \frac{c_j^2}{d_{ij}^2} \end{aligned}$$

$$+ \frac{4}{\pi} \sigma_h^i (\tan \phi_c - \tan \phi_0) \frac{a_j c_j}{d_{ij}^2} \quad (3.13)$$

若第 i 个边界单元上的原始问题的边界条件由应力条件 $\bar{\sigma}^i$ 、 $\bar{\tau}^i$ 给定, 则应有

$$\sigma_{hb}^i + \sum_{j=1}^N \sigma_{ij}^{jj} = \bar{\sigma}^i \quad (3.14)$$

$$\tau_{hb}^i + \sum_{j=1}^N \tau_{ij}^{jj} = \bar{\tau}^i \quad (3.15)$$

下面推导由微裂纹 j 引起的应力场。对应力函数 Φ' 、 Ψ' 积分, 得

$$\begin{aligned} \Phi^i(z_j) &= \frac{1}{4} \sigma_d^j \frac{c_j^2}{z_j} + i \frac{1}{4} [\tau_h^j + \tau_p^j - (\sigma_h^j + \sigma_{ir}^j + \sigma_d^j) \tan \phi_c] \frac{c_j^2}{z_j} \\ &\quad + i \frac{1}{\pi} (\sigma_h^j + \sigma_{ir}^j + \sigma_d^j) (\tan \phi_c - \tan \phi_0) \frac{a_j c_j}{z_j} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\Psi^i(z_j) = \frac{1}{2} \sigma_d^j \frac{c_j^2}{z_j} \quad (3.17)$$

由下式计算微裂纹的局部坐标系中的位移分量:

$$2G(u_x^{ij} + iu_y^{ij}) = k\Phi(z_j) - z_j \Phi'(z_j) - \overline{\Psi(z_j)} \quad (3.18)$$

经(3.18)式进行坐标转换, (3.20)、(3.21)两式给出第 i 个边界单元的位移分量 u_{ib}^{ij} 及 v_{ib}^{ij} :

$$u_{ib}^{ij} = -u_x^{ij} \sin \theta^{ii} + u_y^{ij} \cos \theta^{ii} \quad (3.19)$$

$$v_{ib}^{ij} = u_x^{ij} \cos \theta^{ii} + u_y^{ij} \sin \theta^{ii}$$

$$\begin{aligned} u_{ib}^{ij} &= \frac{1}{8G} \left\{ [-(k \cos \phi^{ij} + \cos 3\phi^{ij} - 2 \cos \phi^{ij}) \sin \theta^{ii} \right. \\ &\quad + (-k \sin \phi^{ij} + \sin 3\phi^{ij} - 2 \sin \phi^{ij}) \cos \theta^{ii}] \sigma_d^j \frac{c_j^2}{d_{ij}} \\ &\quad + [-(k \sin \phi^{ij} + \sin 3\phi^{ij}) \sin \theta^{ii} + (k \cos \phi^{ij} - \cos 3\phi^{ij}) \cos \theta^{ii}] \\ &\quad \times \left. \left[(\tau_h^j - \sigma_h^j \tan \phi_c) \frac{c_j^2}{d_{ij}} + \frac{4}{\pi} \sigma_d^j (\tan \phi_c - \tan \phi_0) \frac{a_j c_j}{d_{ij}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} v_{ib}^{ij} &= \frac{1}{8G} \left\{ [(k \cos \phi^{ij} + \cos 3\phi^{ij} - 2 \cos \phi^{ij}) \cos \theta^{ii} \right. \\ &\quad + (-k \sin \phi^{ij} + \sin 3\phi^{ij} - 2 \sin \phi^{ij}) \sin \theta^{ii}] \sigma_d^j \frac{c_j^2}{d_{ij}} \\ &\quad + [(k \sin \phi^{ij} + \sin 3\phi^{ij}) \cos \theta^{ii} + (k \cos \phi^{ij} - \cos 3\phi^{ij}) \sin \theta^{ii}] \\ &\quad \times \left. \left[(\tau_h^j - \sigma_h^j \tan \phi_c) \frac{c_j^2}{d_{ij}} + \frac{4}{\pi} \sigma_d^j (\tan \phi_c - \tan \phi_0) \frac{a_j c_j}{d_{ij}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

若第 i 个边界单元上的原始问题的边界条件由位移条件 \bar{u}^i 、 \bar{v}^i 给定, 则应有

$$u_{hb}^i + \sum_{j=1}^N u_{ib}^{ij} = \bar{u}^i \quad (3.22)$$

$$v_{hb}^i + \sum_{j=1}^N v_{ib}^{ij} = \bar{v}^i \quad (3.23)$$

对于每一个边界点, 在一个方向上, 其边界条件应由应力或位移条件确定。因此, 对

于 M 个边界单元, (3.14—3.15) 式和 (3.22—3.23) 式给出了 $2M$ 个边界条件。

如前所述, 问题 a 为一不含微裂纹的弹性平面问题。下面直接给出由边界积分确定的域内应力场^[5],

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^M \left[\int_{r_k} D_{ij} T_{hb}^k ds - \int_{r_k} s_{ij} U_{hb}^k ds \right], \quad i, j = 1, 2 \quad (3.24)$$

其中,

$$U_{hb}^k = \{u_{hb}^k, v_{hb}^k\}^T \quad (3.25)$$

$$T_{hb}^k = \{\sigma_{hb}^k, \tau_{hb}^k\}^T$$

$$D_{ij} = [d_{1ij} \quad d_{2ij}] \quad (3.26)$$

$$S_{ij} = [s_{1ij} \quad s_{2ij}]$$

对于二维弹性问题(平面应变), 基本张量 d_{kij}, s_{kij} 为

$$d_{kij} = \{(1 - 2\nu)[\Delta_{ki}r_{,i} + \Delta_{kj}r_{,i} - \Delta_{ij}r_{,k}] + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}\} \frac{1}{4\pi(1 - \nu)r} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} s_{kij} = & \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} [(1 - 2\nu)\Delta_{ij}r_{,k} + \nu(\Delta_{i,j}r_{,i} + \Delta_{j,k}r_{,i}) \right. \\ & - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] + 2\nu(n_{i,j}r_{,k} + n_{j,i}r_{,k}) \\ & \left. + (1 - 2\nu)(2n_{k,i}r_{,j} + n_{j,i}r_{,k} + n_{i,j}r_{,k}) - (1 - 4\nu)n_k\Delta_{ij} \right\} \\ & \times \frac{G}{4\pi(1 - \nu)r^2} \quad (3.28) \end{aligned}$$

上式, $r = r(\xi, x)$ 表示从力作用点 ξ 到场点 x 的距离, $r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i}$; Δ_{ij} 为 Kronecker 符号。

经坐标变换, 得到第 i 个微裂纹位置上的正应力 σ_h^i 与剪应力 $\tau_h^i (i = 1, 2, \dots, N)$:

$$\sigma_h^i = 0.5(1 + \sin \phi_c)\sigma_{11} + 0.5(1 - \sin \phi_c)\sigma_{22} - \cos \phi_c\sigma_{12} \quad (3.29)$$

$$\tau_h^i = -0.5 \cos \phi_c\sigma_{11} + 0.5 \cos \phi_c\sigma_{22} - \sin \phi_c\sigma_{12} \quad (3.30)$$

边界点的位移与应力之间, 存在下面的基本关系式:

$$\frac{1}{2} U_{hb}^i = \sum_{j=1}^M \left[\left(\int_{r_j} U^* ds \right) T_{hb}^j - \left(\int_{r_j} T^* ds \right) U_{hb}^j \right], \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.31)$$

其中,

$$U^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix}, \quad T^* = \begin{bmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

平面应变问题的基本解由下面两式给出:

$$u_{ij}^* = \frac{1}{8\pi G(1 - \nu)} \left[(3 - 4\nu) \ln \left(\frac{1}{r} \right) \Delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right] \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} t_{ij}^* = & - \frac{1}{4\pi(1 - \nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1 - 2\nu)\Delta_{ij} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right] \right. \\ & \left. - (1 - 2\nu) \left[\frac{\partial r}{\partial x_i} n_j - \frac{\partial r}{\partial x_j} n_i \right] \right\} \quad (3.34) \end{aligned}$$

上式中, u_{ij}^* 为无限平面中由 i 方向的单位力引起的 x 点上 j 方向的位移。同样, σ_{ij}^* 为 x 点上 j 方向的应力。

非线性联立方程组(3.9-3.11)式、(3.14-3.15)式、(3.22-3.23)式和(3.29-3.31)式确立了原始问题的基本方程。其未知变量包含每一个微裂纹上的 5 个未知量 ($\sigma_{ir}^i, \tau_{ip}^i, \sigma_{ib}^i, \tau_{ib}^i, c_i$) 及每一个边界单元上的 4 个未知量 ($\sigma_{ibb}^i, \tau_{ibb}^i, u_{ibb}^i, v_{ibb}^i$)。采用弧长控制法及 Newton-Raphson 法进行数值解析, 得到问题的数值解。

四、数值解析结果与讨论

1. 初始条件

参照砂样的三轴荷载试验的边界条件, 我们考虑一个平面变形的长方体, 如图 5 所示。数值计算中初始缺陷采取均匀布点, 其方法已在前文中予以说明(图 6)。受压后, 长方形顶部有一均匀向下的位移, 而底部固定, 两侧保持常压 σ_3 。同时, 因设长方体四周光滑, 故沿边界摩擦力为零。设无粘砂土的剪切模量 $G = 100\text{N/mm}^2$, 泊松比 $\nu = 0.4$, 内摩擦角 $\phi_0 = 0^\circ$ 及 $\phi_c = 45^\circ$, 侧压 $\sigma_3 = -1.0\text{N/mm}^2$ 。无量纲剪胀系数 $\alpha_d = 0.0005$ 。

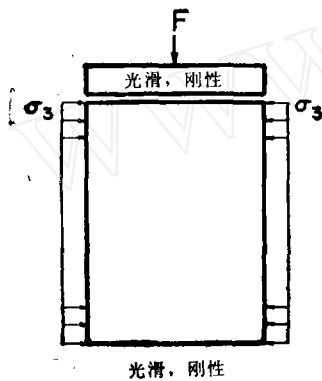


图 5

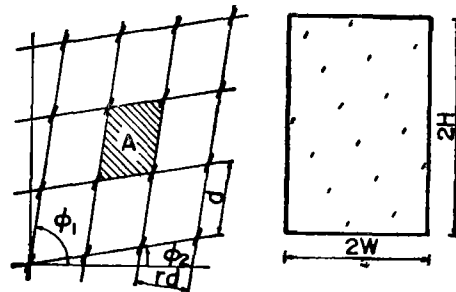


图 6

2. 应变局部化及应变软化

图 7 给出有限平面中 15 个微裂纹的荷载—微裂纹扩展曲线及对应于两个荷载阶段(最大荷载及发生应变软化后的荷载)的应变局部化形态。加载的初期阶段, 整个区域上的微裂纹呈均匀扩展状态。这一阶段微裂纹间的相互干涉作用及边界约束对微裂纹影响很小, 微裂纹的扩展取决于外加荷载的作用。随微裂纹的扩展, 微裂纹间的相互干涉效应及局部剪胀效应对微裂纹的影响逐渐增大。荷载值超过 5.8 时, 整个区域上的微裂纹的扩展呈局部化趋势; 位于主对角线上侧的狭长区域内的微裂纹开始迅速伸长, 其余的微裂纹的扩展则受到抑制, 其中大部分在最大荷载值前后开始收缩。在之后的卸载, 即应变软化过程中, 应变局部化区域内的微裂纹继续伸长形成一条偏离主对角线的滑移带。值得注意的是, 在砂土的三轴荷载试验中观测到的滑移带, 同样具有相似的形态; 滑移带往往发生在偏离对角线的狭长区域内。

前文中, 我们详细讨论了无限平面的应变局部化问题。通过对(3.9-3.10)式中的虚拟剪应力及正应力各项的分析, 明确了微裂纹间的相互干涉效应及局部剪胀效应对微裂

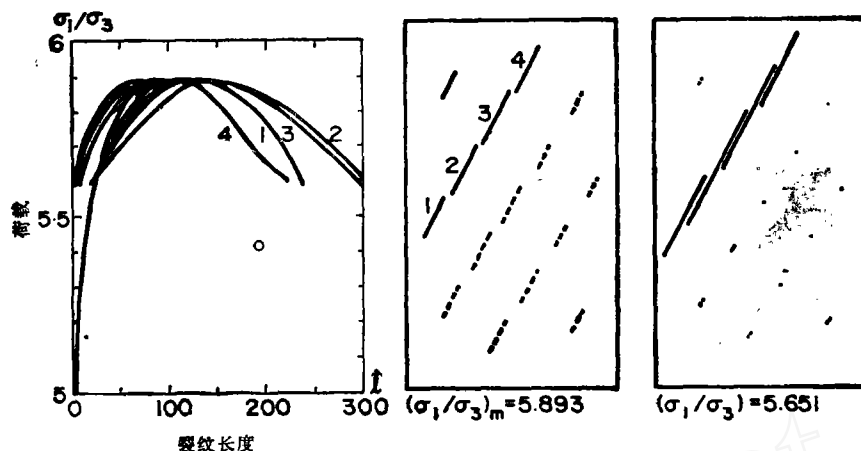


图 7 有限体中荷载-微裂纹扩展曲线及应变局部化形态

纹扩展的影响具有很强的方向性,两者是导致应变局部化及应变软化的重要微观机理。

在影响材料变形及强度特性的诸多因素中,边界效应是一个重要因素。这里我们着重讨论边界约束对应变局部化的影响。数值计算中,为消除刚体位移,设长方体底边上的一个边界元素的水平位移为零,即相应于在长方体底边设置一个水平链杆。因此,在加载过程中,这一点上的剪应力为零的边界条件无法满足。这一边界单元上的剪应力随长方体变形的增加而逐渐增大,对域内微裂纹的扩展产生较大的影响。同样,在砂土的荷载试验中,边界上的摩擦应力难以完全消除。研究包含这一因素在内的各种边界条件对砂土变形及强度特性的影响,一直是试验研究中的一个重要课题。对比采用同样的均匀布点得到的有限体及无限体中的滑移带(图 7、图 8)可知,边界效应是影响滑移带形态的重要因素。

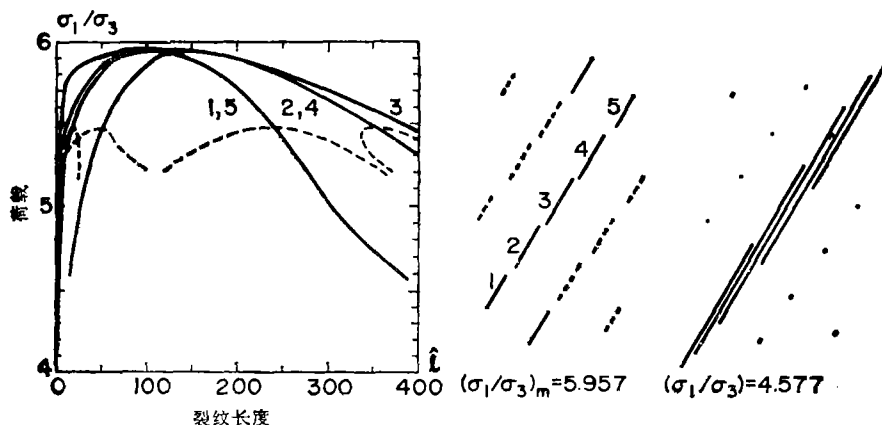


图 8 无限体中荷载-微裂纹扩展曲线及应变局部化形态

在研究应变局部化问题的各种宏观理论模型中,应变软化条件一般作为材料的固有特性而被引入描述连续体变形的本构方程。在微裂纹模型中,我们没有设立任何有关应变软化的条件,但仍然得到了应变软化曲线。特别是在达到最大荷载之前,即应变软化发

生之前,整个区域上的微裂纹的扩展便开始呈现应变局部化的趋势。这一事实表明,应变软化并非应变局部化发生的先决条件。事实上,我们的研究表明,应变局部化及应变软化,均是由微裂纹间的相互干涉作用及局部剪胀效应这些微观机理所致。由于本构关系无法完全描述材料变形的微观机制,用宏观理论研究应变局部化问题,有其局限性。

3. 尺寸效应及侧压的影响

实验表明,尺寸效应对砂土变形及强度特性的影响,主要表现在应变软化过程。随砂样尺寸的增加,应变软化过程中的减载幅度加大。数值计算中,我们考虑四个不同尺寸的正方体,边长比为1:1.25:1.5:1.75,在初始缺陷密度一定的条件下,计算相应的荷载-微裂纹扩展曲线。数值计算的结果,如图9所示,横坐标为滑移带中微裂纹的平均长度。随尺寸增加,最大荷载值略有减小(图10),但应变软化过程中的减载幅度明显增大。这一结果表明,微裂纹模型可以定性地再现尺寸效应对砂土试样的变形、强度特性的影响。至于这一尺寸效应的微观机理,这里不做进一步的探讨。

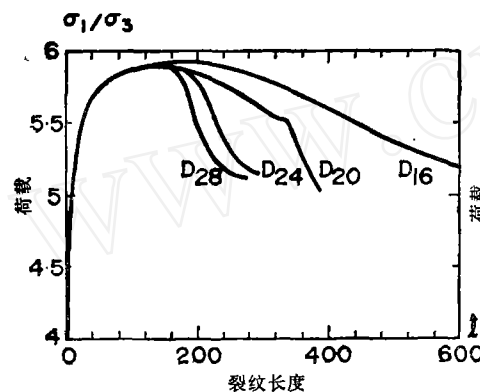


图9 尺寸效应对荷载-微裂纹扩展曲线的影响

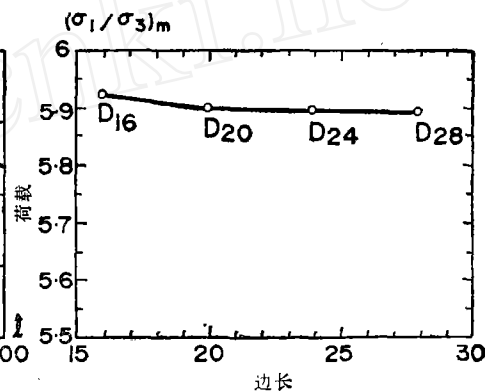


图10 尺寸效应对最大荷载值的影响

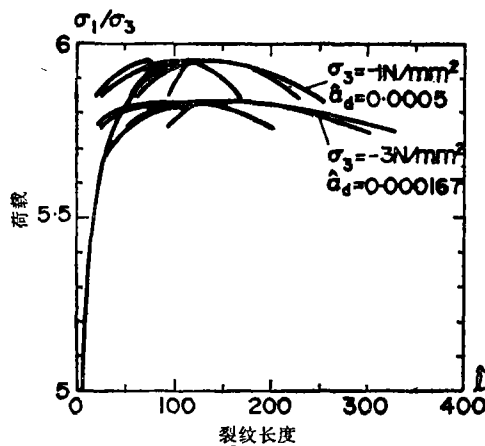


图11 侧压对荷载-微裂纹扩展曲线的影响

侧压是影响砂土变形特性的另一重要因素。综合大量的试验结果,可将侧压的影响简述如下:增加侧压使最大荷载值 σ_1/σ_3 有所降低,而应变增大,同时减小砂土的体积膨胀。由微裂纹模型的基本方程可知,无量纲剪胀系数 $\hat{a}_d = \alpha_d a_0 / |\sigma_3|$,即增加侧压相应于减小无量纲剪胀系数 \hat{a}_d 。图11给出对应于两个侧压值的荷载-微裂纹扩展曲线,定性地再现了侧压对砂土变形及强度特性的影响。这一结果进一步表明,局部剪胀是影响砂土变形特性的一个重要因素。

利用微裂纹模型可进一步研究包括边界条件,长细比在内的各种外界因素对砂土变形的影响。关于这个问题,这里不做进一步的探讨。

五、结 论

1. 微裂纹模型可以定性地再现密实砂土受压过程中应变局部化、应变软化及形成滑移带的全过程。
2. 微裂纹间的相互干涉效应及局部剪胀效应对微裂纹扩展的影响具有很强的方向依存性,是导致应变局部化及应变软化的微观机理。
3. 利用有限体的微裂纹模型得到的滑移带,与实验中观测到的滑移带具有相同的形态。边界效应是影响滑移带形态的重要因素。
4. 微裂纹模型可以定性地再现尺寸效应及侧压对砂土变形及强度特性的影响。利用微裂纹模型可进一步研究包括边界条件、长细比在内的各种因素对砂土变形的影响。

参 考 文 献

- [1] Shi Zihai and H. Horii, *Int. J. Mechanics of Materials*, 1989 8: 89.
- [2] Shi Zihai, *Microslip Model of Strain Localization*, Ph. D. Thesis, Univ. of Tokyo, Japan, 1989.
- [3] Horii, H. and S. Nemat-Nasser, *Int. J. Solids Struct.*, 1985, 21: 731.
- [4] Muskhelishvili, N. I., *Some Basic Problems in the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, Groningen 1953.
- [5] Brebbia, C. A., *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press Ltd. 1978.

APPLICATION OF FRACTURE MECHANICS AND BEM TO STRAIN LOCALIZATION PROBLEMS IN A FINITE BODY

Shi Zihai

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080, China*)

H. Horii

(*Department of Civil Engineering, University of Tokyo, Japan*)

Abstract The microslip model is a new approach to the mechanism of strain localization in sand deformation. As an extension of the previous study [*Mechanics of Materials* 8 (1989)89—102], the paper presents a mathematical formulation of the microslip model with boundary constraints, based on the method of pseudo-tractions and the boundary element method. Special attention is given to the effect of boundaries on strain localization. Some interesting aspects of the problem, such as the dependence of the deformation characteristics on sample size and confining pressure, as well as the strain softening phenomenon, are also discussed.

Key words strain localization, strain softening, microslip, local dilatancy, boundary effect

>