中 国 科 学

1992 年 1 月　　A 辑　　第 1 期

多面体区域上非光滑函数的迹

丁 桦

(中国科学院力学研究所，北京 100080)

摘　要

本文给出了一类非光滑函数在多面体区域边界上的迹的定义，研究了它们的性质并给出了它们的结构形式。

关键词：迹，多面体区域，非光滑函数

一、引　言

迹在偏微分方程的边值问题的研究中，有着极其重要的地位．一定泛函空间中的函数的迹的存在与否，直接涉及到在此空间上提边值问题的合理性．

迹的研究是一经典问题．人们从一开始在泛函空间上讨论偏微分方程的边值问题时，就提出了这一问题．有很多著名的数学家在此问题上做了大量的工作．

Sobolev 嵌入定理指出 $W^s_p(\Omega)$ 中的函数当 $s>n/p$ 时是连续的(直到边界)[1]．这样就使我们可以考虑这样的函数在区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的值了．但很多时候我们需要用较弱的意义给出函数在边界上的值．1960 年前后 Lions 和 Magenes[2] 给出了光滑区域 Ω 上 Sobolev 空间 $W^s_p(\Omega)$ 中函数的迹的一个系统的结果．这样，光滑区域上 Sobolev 空间的函数的迹的问题就得到了圆满的解决．非光滑区域给人们带来了很多困难，因而很难给出一系统的结果．1957 年对于 Lipschitz 边界区域 Ω 上的 Sobolev 空间 $W^1_p(\Omega)$，Gagliardo[3] 给出了一个漂亮的结果．由于 Lipschitz 边界的可微性的限制，使得我们在边界上定义高阶 Sobolev 空间发生困难．Grisvard 对多边形区域边界上的迹做了较系统的研究[4]，他给出了 Sobolev 空间 $W^s_p(\Omega)$ 当 $s>1/p$ 时，多边形侧边上迹的性质以及相邻侧边上的迹之间的相容条件．对于多面体和多边形区域由于边界外法向在棱和角点处的不确定性，这就给非光滑函数在其上的值的定义带来了一定的困难，而对于较光滑函数因棱和角的测度(对于边界所在空间而言)为零，我们可以忽略函数在它们上的值而只在这里提出协调条件．

本文主要考虑 Laplace 算子在 $L^p(\Omega)$ 空间的最大定义域 $D_\Delta(L^p(\Omega))$ 中的函数在多面体边界上的迹，并给出了相对于线弹性方程组的类似结果1)．

本文 1990 年 3 月 2 日收到，1991 年 4 月 16 日收到修改稿．

1) 本文的工作是在法国期间，在 Grisvard 教授指导下完成的．

二、预 备 知 识

设 Ω 是 R^n 中一具有 Lipschitz 边界 $\partial\Omega$ 的有界开集， u 是在 Ω 及其边界上都连续的函数，即 $u\in C(\bar{\Omega})$. 若将 u 限制在 $\partial\Omega$ 上:

$$\gamma u = u|_{\partial\Omega},$$

则 $\gamma u\in C(\partial\Omega)$. 当 $u\in W_p^1(\Omega)$ 时，我们不能保证 u 在 $\bar{\Omega}$ 上的连续性，但我们有 (Gagliardo[3]):

定理 1. 设 Ω 是 R^n 中一具有 Lipschitz 边界 $\partial\Omega$ 的有界开集. 那么定义在 $C^{0,1}(\Omega)$ 上的映照 $u\to\gamma u$ 可以唯一地连续延拓为 $W_p^1(\Omega)$ 到 $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ 上的映照. 这一映照有一独立于 p 的右连续的逆.

由于延拓是唯一的，以后我们将延拓后的映照仍记为 γ. 在较弱的意义下讨论函数的迹时，我们需要下列 Green 公式[5]:

定理 2. 设 Ω 为 R^n 中一具有 Lipschitz 边界 $\partial\Omega$ 的有界开集. 那么对任意的 $u\in W_p^2(\Omega)$, $v\in W_q^2(\Omega)$ 我们有:

$$\int_\Omega \Delta uvdx-\int_\Omega u\Delta vdx=\int_{\partial\Omega}\gamma\frac{\partial u}{\partial n}\gamma vd\sigma-\int_{\partial\Omega}\gamma u\gamma\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma,$$

其中 $1/p+1/q=1$, n 为 $\partial\Omega$ 的外法向单位向量.

由定理 2 我们不难得到

推论 1. 设 Ω 为 R^n 中一有界多面体区域，其边界为 $\partial\Omega=\bigcup_{j=1}^{l}\Gamma_j$ (Γ_j 为 Ω 的第 j 个侧面). 那么，对任意的 $u\in W_p^2(\Omega)$, $v\in W_q^2(\Omega)$, $1/p+1/q=1$, 我们有

$$\int_\Omega \Delta uvdx-\int_\Omega u\Delta vdx=\sum_{j=1}^{l}\left\{\int_{\Gamma_j}\gamma_j\frac{\partial u}{\partial n_j}\gamma_j vd\sigma-\int_{\Gamma_j}\gamma_j u\gamma_j\frac{\partial v}{\partial n_j}d\sigma\right\},$$

其中 $\gamma_j=\gamma|_{\Gamma_j}$.

在后面的各节中我们还需要以下结果[4].

引理 1. 设 G 为 R^{n-1} 中一具有 Lipschitz 边界的有界开集. $(\varphi_0,\varphi_1)\in\mathscr{D}(G)$, 那么，存在 $v^\varphi\in W_q^2(\mathrm{R}^n)$, 使得 $\gamma v^\varphi|_G=\varphi_0$, $\gamma\frac{\partial v^\varphi}{\partial x_n}\Big|_G=\varphi_1$, 其中 $\mathscr{D}(G)$ 为 G 上无限可微并具有紧致支撑集的函数的全体，并有 $\|v^\varphi\|_{W_q^2(\mathrm{R}^n)}\leqslant C(\|\tilde{\varphi}_0\|_{W_q^{2-1/q}(\mathrm{R}^n)}+\|\tilde{\varphi}_1\|_{W_q^{1-1/q}(\mathrm{R}^n)})$, 其中

$$\tilde{\varphi}=\begin{cases}\varphi & \text{在 } G,\\ 0 & \text{在 } \mathrm{R}^{n-1}\backslash G.\end{cases}$$

在以后各节里我们将 Laplace 算子在 $L^p(\Omega)$ 中的最大定义域记为

$$D_\Delta(L^p(\Omega))=\{u|u\in L^p(\Omega);\quad \Delta u\in L^p(u)\}.$$

三、迹的泛函表示

在下面的讨论中我们将把 R^n 上定义的函数 v 在 Ω 上的限制仍记为 v.

定义 1. 设 Ω 为 R^n 中一具有 Lipschitz 边界的有界开集. 对于 $u\in D_\Delta(L^p(\Omega))$ 我们定义广义函数 $\mathscr{K}u\in W_p^{-2}(\mathrm{R}^n)$:

$$\langle \mathscr{K} u, v\rangle_{W_p^{-2}\times W_q^2(\mathrm{R}^n)} = (u,\Delta v)_{L^p\times L^q(\Omega)} - (\Delta u, v)_{L^p\times L^q(\Omega)}.$$

对于任意的 $v\in W_q^2(\mathrm{R}^n)$，其中 $1/p+1/q=1$.

注 1. 若记 $\tilde{w}$ 为 Ω 上的函数 w 在 R^n 上的零延拓 (即: $\tilde{w}|_\Omega = w$, $\tilde{w}|_{\mathrm{R}^n\setminus\Omega}=0$)，则(在广义函数定义下)

$$\mathscr{K} u = \Delta\tilde{u} - (\Delta u)^\sim.$$

命题 1. 设 Ω 为 R^n 中一具有 Lipschitz 边界的有界开集，设 $u\in D_\Delta(L^p(\Omega))$，则有

$$\operatorname{supp}\mathscr{K} u \subset \partial\Omega,$$

这里 $\operatorname{supp}\mathscr{K} u$ 是指 $\mathscr{K} u$ 的支撑集.

证. 设 $v\in\mathscr{D}(\mathrm{R}^n\setminus\partial\Omega)$，则由定理 2 容易得到

$$\langle \mathscr{K} u, v\rangle = (u,\Delta v) - (\Delta u, v) = 0,$$

这样就得到命题 1.

由 $u\Delta v$ 和 $v\Delta u$ 的可积性我们可以给出 $\mathscr{K} u$ 的近似表示:

命题 2. 在命题 1 的假设下，对于 Ω 中的区域系列 $\{\Omega_\varepsilon\}$, $\Omega_\varepsilon\to\Omega(\varepsilon\to 0)$ (即 $\mathrm{mes}(\Omega-\Omega_\varepsilon)\to 0$) 我们有

$$\mathscr{K}^\varepsilon u \xrightarrow{W_p^{-2}} \mathscr{K} u, \quad \varepsilon\to 0,$$

其中 $\mathscr{K}^\varepsilon u$ 定义为

$$\langle \mathscr{K}^\varepsilon u, v\rangle_{W_p^{-2}\times W_q^2(\mathrm{R}^n)} = (u,\Delta v)_{L^p\times L^q(\Omega_\varepsilon)} - (\Delta u, v)_{L^p\times L^q(\Omega_\varepsilon)}.$$

对任意的 $v\in W_q^2(\mathrm{R}^n)$, $1/p+1/q=1$.

定义 2. 设 Ω 为 R^n 中具有 Lipschitz 边界的有界开集，我们定义

$$X_q^U = X_q^U(\Omega) = \{v\in W_q^2(\mathrm{R}^n) \quad \gamma v = 0\},$$

$$X_q^N = X_q^N(\Omega) = \left\{v\in W_q^2(\mathrm{R}^n) \quad \gamma\frac{\partial v}{\partial n} = 0\right\}.$$

由定理 1，γv 和 $\gamma\dfrac{\partial v}{\partial n}$ 都是有定义的，不难证明 X_q^U 和 X_q^N 都是 $W_q^2(\mathrm{R}^n)$ 的闭子空间.

定义 3. 设 Ω 为 R^n 中具有 Lipschitz 边界的有界开集. 我们定义迹算子 U 和 N 分别为: $(1/p+1/q=1)$

$$U: D_\Delta(L^p(\Omega)) \to (X_q^U)',$$

$$\langle Uu, v\rangle_{(X_q^U)'\times X_q^U} = \langle \mathscr{K} u, v\rangle_{W_p^{-2}\times W_q^2(\mathrm{R}^n)}\ \forall v\in X_q^U$$

和

$$N: D_\Delta(L^p(\Omega)) \to (X_q^N)',$$

$$\langle Nu, v\rangle_{(X_q^N)'\times X_q^N} = \langle -\mathscr{K} u, v\rangle_{W_p^{-2}\times W_q^2(\mathrm{R}^n)}\forall v\in X_q^N,$$

即:

$$Nu = -\mathscr{K} u|_{X_q^N}, \quad Uu = \mathscr{K} u|_{X_q^U}.$$

由定理 2 我们容易得到

命题 3. 设 Ω 为 R^n 中具有 Lipschitz 边界 $\partial\Omega$ 的有界开集，$u\in W_p^2(\Omega)$，则

$$Nu = \gamma\frac{\partial u}{\partial n}\otimes\delta_{\partial\Omega}, \quad Uu = \gamma u\otimes\frac{\partial\delta_{\partial\Omega}}{\partial n},$$

即

$$\langle Nu,v\rangle=\int_{\partial\Omega}\gamma\frac{\partial u}{\partial n}\gamma v d\sigma,\quad \forall v\in X_q^N,$$

$$\langle Uu,v\rangle=\int_{\partial\Omega}\gamma u\gamma\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma,\quad \forall v\in X_q^U.$$

由文献[2]中的结果我们有

命题 4. 设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中一光滑(如 C^∞ 级的)有界开集，设 $u\in D_\Delta(L^p(\Omega))$ 则

$$Nu=\gamma\frac{\partial u}{\partial n}\otimes\delta_{\partial\Omega},\quad Uu=\gamma u\frac{\partial\delta_{\partial\Omega}}{\otimes\partial n},$$

其意义为

$$\langle Nu,v\rangle=\left\langle\gamma\frac{\partial u}{\partial n},\ \gamma v\right\rangle_{W_p^{-1-1/p}\times W_q^{1+1/p}(\partial\Omega)},\quad \forall v\in X_q^N,$$

$$\langle Uu,v\rangle=\left\langle\gamma u,\gamma\ \frac{\partial v}{\partial n}\right\rangle_{W_p^{-1/p}\times W_q^{1/p}(\partial\Omega)},\quad \forall v\in X_q^U.$$

注 2. 我们可以使 $\mathscr{K}u,Nu,Uu$ 的定义更一般化. 对于 $u\in L^p(\Omega)$，$\Delta u\in(W_q^2(\Omega))'$，我们可在前面的一些定义中将 $\langle\Delta u,v\rangle$ 换作 $\langle\Delta u,v\rangle_{(W_q^2)'\times W_q^2(\Omega)}$. 这里 $1/p+1/q=1$.

四、多面体区域上迹的结构形式

在这一节里我们假设 Ω 是一以 $\partial\Omega=\bigcup_{j=1}^{J}\Gamma_j$ 为边界的 $\mathbf{R}^n$ 中的多面体域，其侧边 Γ_j 为 $\mathbf{R}^{n-1}$ 中的多面体域，并假设对任意的 $i,k=1,\cdots,J$ 都有

$$\Gamma_i\cap\Gamma_k=\varnothing.$$

这就是说多面体侧面之间只有棱是相交处，也就是说 Ω 中没有裂纹. 有裂纹的情况需单独考虑，由于篇幅的限制这里我们就不加叙述了. 我们还设 $1/p+1/q=1,p\geqslant1$.

设 $\varphi_0,\varphi_1\in\mathscr{D}(\Gamma_k)$，$k$ 是 1 到 J 间的一个定数，那么，由引理 1 存在 $v^\varphi\in W_q^2(\mathbf{R}^n)$ 使得

$$\gamma_k v^\varphi=\varphi_0,\quad \gamma_k\frac{\partial v^\varphi}{\partial n_k}=\varphi_1.$$

我们可以构造一个函数 $\psi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，它在集合 $\mathrm{supp}\varphi_0\cup\mathrm{supp}\varphi_1$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的一个邻域内恒为 1，并在 $\bigcup_{j\neq k}\Gamma_j$ 的一个邻域内恒为零. 使得

$$\begin{cases}\gamma_k v=\varphi_0,\quad \gamma_k\dfrac{\partial v}{\partial n_k}=\varphi_1,\\[2ex] \gamma_j v=\gamma_j\dfrac{\partial v}{\partial n_j}=0\quad j\neq k\end{cases}\tag{$*$}$$

及

$$\|v\|_{W_q^2(\mathbf{R}^n)}\leqslant C\{\|\varphi_0\|_{\widetilde{W}_q^{2-1/q}(\Gamma_k)}+\|\varphi_1\|_{\widetilde{W}_q^{1-1/q}(\Gamma_k)}\},\tag{$**$}$$

这里 $v=\psi v^\varphi$，C 与 ψ 无关(或说与 (φ_0,φ_1) 的支集无关)(见附录). $\widetilde{W}_q^s(G)$ 是 $W_q^s(G)$ 中可作零延拓到 $W_q^s(\mathbf{R}^n)$ 中的函数的全体 $(G\subset\mathbf{R}^n)$. 对于 $w\in\widetilde{W}_q^s(G)$ 其范数定义为:

$$\|w\|_{\widetilde{W}_q^s(G)}=\|\widetilde{w}\|_{W_q^s(\mathbf{R}^n)}.$$

我们知道 $\mathscr{D}(G)$ 是 $\widetilde{W}_q^2(G)$ 中的稠密子集这样通过连续延拓我们有

命题 5. 对于给定 k，设 $\varphi=(\varphi_0,\varphi_1)\in\widetilde{W}_q^{2-1/q}\times\widetilde{W}_q^{1-1/q}(\Gamma_k)$，则存在 $v\in W_q^2(\mathrm{R}^n)$ 使得(*)和(**)式成立.

定理 3. 对于给定 k，$W_p^2(\Omega)$ 上定义的映照：$u\to\left\{\gamma_k\dfrac{\partial u}{\partial n_k},\gamma_k u\right\}$ 可以连续地延拓为 $D_\Delta(L^p(\Omega))$ 到 $(\widetilde{W}_q^{2-1/q}\times\widetilde{W}_q^{1-1/q}(\Gamma_k))'$ 的线性连续算子.

证. 设 $(\varphi_0,\ \varphi_1)\in\mathscr{D}\times\mathscr{D}(\Gamma_k)$，那么存在 $v\in W_p^2(\mathrm{R}^n)$ 使得 (*) 式成立，由于 v 在 $\bigcup_{j\neq k}\partial\Gamma_j$ 的邻域内为零. 而我们知道，对于 $u\in D_\Delta(L^p(\Omega))$，$u$ 在光滑边界上邻近是属于 W_p^2 的，即 $u\in W_p^2(\mathrm{supp}v)$. 由推论 1 可得

$$\int_{\Gamma_k\cap\mathrm{supp}v}\left(\gamma_k\frac{\partial u}{\partial n_k}\varphi_0-\gamma_k u\varphi_1\right)d\sigma=\int_\Omega\Delta uvdx-\int_\Omega u\Delta vdx.$$

由命题 5 可得

$$\left|\int_{\Gamma_k\cap\mathrm{supp}v}\left(\gamma_k\frac{\partial u}{\partial n_k}\varphi_0-\gamma_k u\varphi_1\right)d\sigma\right|\leqslant C\|u\|_{D_\Delta(L^p(\Omega))}\|v\|_{W_q^2(\mathrm{R}^n)}$$
$$\leqslant C\|u\|_{D_\Delta(L^p(\Omega))}\|\varphi\|_{\widetilde{W}_q^{2-1/q}\times\widetilde{W}_q^{1-1/q}(\Gamma_k)}.$$

由 $\mathscr{D}\times\mathscr{D}(\Gamma_k)$ 在 $\widetilde{W}_q^{2-1/q}\times\widetilde{W}_q^{1-1/q}(\Gamma_k)$ 中的稠密性，就可以得到定理中的结论.

我们将定理 3 中延拓后的映照记为

$$u\to\left\{\gamma_k\frac{\partial u}{\partial n_k},\gamma_k u\right\},$$
$$D_\Delta(L^p(\Omega))\to(\widetilde{W}_q^{2-1/q}\times\widetilde{W}_q^{1-1/q}(\Gamma_k))'.$$

推论 2. 设 $u\in D_\Delta(L^p(\Omega))$，那么对任意的 $W_q^2(\mathrm{R}^n)$ 中的在 $\bigcup_{j=1}^{J}\partial\Gamma_k$ 的邻域内为零的函数 v 有

$$\int_\Omega\Delta uv-\int_\Omega u\Delta v=\sum_{j=1}^{J}\left\{\left\langle\gamma_j\frac{\partial u}{\partial n_j},\gamma_j v\right\rangle_{(\widetilde{W}_q^{2-1/q})'\times\widetilde{W}_q^{2-1/q}(\Gamma_j)}\right.$$
$$\left.-\left\langle\gamma_j u,\gamma_j\frac{\partial v}{\partial n_j}\right\rangle_{(\widetilde{W}_q^{1-1/q})'\times W_q^{1-1/q}(\Gamma_j)}\right\}.$$

对于 $p\neq 2$，我们知道 $\widetilde{W}_q^{2-1/q}\times\widetilde{W}_q^{1-1/q}(\Gamma_j)$ 是 $W_q^{2-1/q}\times W_q^{1-1/q}(\Gamma_j)$ 中的闭子空间，那么由 Hohn-Banach 定理[6]我们可以将 $\left\{\gamma_j\dfrac{\partial u}{\partial n_j},\gamma_j u\right\}$ 延拓为 $W_q^{2-1/q}\times W_q^{1-1/q}(\Gamma_j)$ 上的线性连续泛函. 下面我们将看到这种延拓的非唯一性可以解释 $\partial\Gamma_j$ 上迹的值的定义.

定义 4. 设 $u\in D_\Delta(L^p(\Omega))$，$p\neq 2$，$\left(\gamma_j\overline{\dfrac{\partial u}{\partial n_j}},\overline{\gamma_j u}\right)$ 为 $\left(\gamma_j\dfrac{\partial u}{\partial n_j},\gamma_j u\right)$ 从 $\widetilde{W}_q^{2-1/q}\times\widetilde{W}^{1-1/q}(\Gamma_j)$ 到 $W_q^{2-1/q}\times W_q^{1-1/q}(\Gamma_j)$ 上的延拓(对于 $p=2$ 如果是可延拓的，我们也作同样的处理). 我们定义广义函数 $\mathfrak{T}u\in W_p^{-2}(\mathrm{R}^n)$：

$$\langle\mathfrak{T}u,v\rangle_{W_p^{-2}\times W_q^2(\mathrm{R}^n)}=\sum_j\left\{\left\langle\gamma_j\overline{\frac{\partial u}{\partial n_j}},\gamma_j v\right\rangle_{(W_q^{2-1/q})'\times W_q^{2-1/q}(\Gamma_j)}\right.$$

$$-\left\langle\overline{\gamma_j u},\gamma_j\frac{\partial v}{\partial n_j}\right\rangle_{(W_q^{1-1/q})'\times W_q^{1-1/q}(\Gamma_j)}\Bigg\},$$

对任意的 $v\in W_q^2(\mathrm{R}^n)$.

这样我们就有

定理 4. 设 $u\in D_\Delta(L^p(\Omega))$，则

$$\mathscr{K}u=\mathfrak{Z}u+\mathscr{R}u,$$

其中 $\mathscr{R}u\in W_p^{-2}(\mathrm{R}^n)$，$\mathrm{supp}\mathscr{R}u\subset\bigcup_{j=1}^{l}\partial\Gamma_j=\partial\Omega\Big\backslash\bigcup_{j=1}^{l}\Gamma_j$.

证. 事实上若我们取 $v\in\mathscr{D}\left(\mathrm{R}^n\backslash\bigcup_{j=1}^{l}\partial\Gamma_j\right)$，则由推论 2 有 $\langle\mathscr{K}u-\mathfrak{Z}u,v\rangle=0$，即

$$\mathrm{supp}(\mathscr{K}u-\mathfrak{Z}u)\subset\bigcup_{j=1}^{l}\partial\Gamma_j.$$

注 3. 若 $\Omega\subset\mathrm{R}^n$ 则 $\bigcup_{j=1}^{l}\partial\Gamma_j$ 是 $n-2$ 维的.

推论 3. 设 Ω 为多边形(即 $n=2$)，$\{s_i\}$ 为多边形的角点，则

$$\mathscr{K}u=\begin{cases}\sum_j\gamma_j\overline{\dfrac{\partial u}{\partial n_j}}\otimes\delta_{\Gamma_j}+\sum_i c_i\delta(s_i)+\sum_j\overline{\gamma_j u}\otimes\dfrac{\partial\delta_{\Gamma_j}}{\partial n_j}, & q\leqslant 2\\ \sum_j\gamma_j\overline{\dfrac{\partial u}{\partial n_j}}\otimes\delta_{\Gamma_j}+\sum_i c_i\delta(s_i)+\sum_j\overline{\gamma_j u}\otimes\dfrac{\partial\delta_{\Gamma_j}}{\partial n_j}+\sum_{|\alpha|=1,i}b_i^\alpha\delta^{(\alpha)}(s_i), & q>2\end{cases}$$

$$Nu=\sum_j\gamma_j\overline{\frac{\partial u}{\partial n_j}}\otimes\delta_{\Gamma_j}+\sum_i c_i\delta(s_i),$$

$$Uu=\begin{cases}\sum_j\overline{\gamma_j u}\otimes\dfrac{\partial\delta_{\Gamma_j}}{\partial n_j}, & q\leqslant 2,\\ \sum_j\overline{\gamma_j u}\otimes\dfrac{\partial\delta_{\Gamma_j}}{\partial n_j}+\sum_{\substack{i\\|\alpha|=1}}b_i^\alpha\delta^{(\alpha)}(s_i), & q>2.\end{cases}$$

证. 由定理 4 得

$$\mathrm{supp}(\mathscr{K}u-\mathfrak{Z}u)\subset\{s_i\}.$$

因而有

$$\mathscr{R}u=\sum_{i,\alpha}a_i^\alpha\delta^{(\alpha)}(s_i).$$

由于 $\mathscr{R}u\in W_p^{-2}(\mathrm{R}^2)$，则对 $\delta^{(\alpha)}(s_i)\notin W_p^{-2}(\mathrm{R}^n)$ 有 $a_i^\alpha=0$.

我们同样有

推论 4. 设 Ω 为 R^3 中的多面体，$\{A_i\}$ 为 Ω 的棱，$\{s_k\}$ 为 Ω 的角点，则

$$\mathscr{K}u-\mathfrak{Z}u=\sum_i\left(\varphi_i^0\frac{\partial\delta_{A_i}}{\partial n}+\varphi_i^1\delta_{A_i}\right)+\sum_k c_k\delta(s_k)+\sum_k b_k^\alpha\delta^\alpha(s_k),\text{一般性况}$$

$$= \sum_i \varphi_i \delta_{A_i} + \sum_k c_k \delta(s_k), \quad q < 2,$$

即对 $q < 2$ 有

$$Nu = \sum_j \gamma_j \overline{\frac{\partial u}{\partial n_j}} + \sum_i \varphi_i \delta_{A_i} + \sum_k c_k \delta(s_k),$$

$$Uu = \sum_j \overline{\gamma_j u}.$$

用这一节给出的结果，就可对有集中载荷作用在边界棱和角点上时 Laplace 方程的解的边值给予一精确的数学表述。

例. 在二维一个扇形域上考虑 Laplace 方程在区域角点作用一集中载荷，这时解是以其极弱形式给出的[7,8]：$\Omega = \{(r,\theta)\ 0 < r < R, 0 < \theta < \omega < 2\pi\}$

$$\begin{cases} u \in L^2(\Omega), \\ \int_\Omega u\Delta v = -v(0), \quad \forall v \in E_0(\Omega), \end{cases}$$

这里 $E_0(\Omega)$ 是所有 $\Delta u \in L^2(\Omega)$ 的变分解组成的 $H^1(\Omega)$ 中的闭子空间。 $E_0(\Omega) \supset H^2(\Omega)$. 由前面的结果可以推出 $Nu = \delta(0)$. 如果我们看边界上的情况

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\theta=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\theta=\omega} = 0,$$

它们的延拓为

$$\left.\overline{\frac{\partial u}{\partial n}}\right|_{\theta=0} = c_0\delta(0), \quad \left.\overline{\frac{\partial u}{\partial n}}\right|_{\theta=\omega} = a_\omega\delta(0),$$

这里 a_0, a_ω 可以是任意常数。这样

$$Nu = a_0\delta(0) + a_\omega\delta(0) + a\delta(0),$$

从而有

$$a_0 + a_\omega + a = 1.$$

上面的讨论说明角点上的集中载荷可以认为是各边端点作用载荷的和，只要其和不变，与作用分配无关。

最后应指出，本文的结果可以推广到一般的椭圆方程和椭圆方程组[8].

附 录

现在我们来构造 ψ，使得(**)式中的 C 与 ψ 的选取无关(即按下面的构造方法选取的 ψ 可以使(**)式中的 C 与 ψ 无关).

利用区域上函数的单位分解定理我们可将问题转化到一个角点的邻域内，即研究在一多面体锥 G 上函数 u 具有紧致支集的情况。根据区域不包含裂纹的假设，可知存在一个锥形域 Q(一般仍可作一多面体锥)使得

$$\Gamma_k \subset Q, \quad \Gamma_i \cap Q = \varnothing, \quad i \neq k.$$

为了构造满足条件的 ψ 需要下面的引理[9]，它们不难从 Hardy 不等式得到.

引理 1. 设 $u \in W_q^2(\mathbf{R}^n)$，且 supp$u$ 有界. 若存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$u|_{\Gamma_k \cap (r<\varepsilon)} = \left.\frac{\partial u}{\partial n_k}\right|_{\Gamma_k \cap (r<\varepsilon)} = 0,$$

那么我们有

$$\left\|\frac{u}{r}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{W_q^1(\mathbb{R}^n)},$$

$$\left\|\frac{u}{r^2}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{W_q^2(\mathbb{R}^n)},$$

其中 C 与 ε, u 无关.

引理 2. 设 $u \in W_q^2(\mathbb{R}^n)$，且 $\operatorname{supp} u$ 有界. 设 γ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一子集. 若 u 在 γ 的一邻域内为零，则存在与 u 无关的常数 C 使得：

$$\left\|\frac{u}{\rho}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{W_q^1(\mathbb{R}^n)},$$

$$\left\|\frac{u}{\rho^2}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{W_q^2(\mathbb{R}^n)},$$

其中 ρ 为到 γ 的距离.

现在用递归法来构造 ψ. 首先我们假设 $n=2$. 记 a 为 Q 与单位圆 S^1 的交，即 $a=Q\cap S^1$. 取 $\Phi \in \mathscr{D}(S^1)\cap\mathscr{D}(a)$ 使得在 $\Gamma_k \cap S^1$ 的邻域内有

$$\Phi = 1,$$

同时取 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+)$ 使得

$$\varphi(r) = 0, \qquad r < \frac{1}{2},$$

$$\varphi(r) = 1, \qquad r > 1.$$

令

$$\psi_m(r,\omega) = \varphi(mr)\Phi(\omega),$$

则有对任意的 $m, \psi_m \in \mathscr{D}(Q)$. 并且

$$\Gamma^m = \{x \mid x \in \Gamma_k, \psi_m(x) = 1\} \to \Gamma_k$$

因此对 Γ_k 上任一紧致子集 Γ 都存在一 M_Γ，使得 $m > M_\Gamma$ 时 $\Gamma \subset \Gamma^m$. 下面我们来证明这样的 ψ_m 能使(**)式成立，其中的常数 C 与 m 无关.

事实上利用前面的引理我们有(因 $u|_{\Gamma_k} \in \mathscr{D}(\Gamma_k)$)

$$\sum_{1\leqslant|\alpha|+|\beta|\leqslant 2} \int_Q |(D^{\alpha+\beta}\psi_m)u|^q dx$$

$$\leqslant CM^q \int_{B_m} \left(\left|\frac{u}{r}\right|^q + \left|\frac{u}{r^2}\right|^q\right) dx \to 0, \quad m \to \infty$$

这里

$$M = \max(|\varphi''\Phi|, |\varphi'\Phi'|, |\varphi\Phi''|, |\varphi'\Phi|, |\varphi\Phi'|, |\varphi\Phi|),$$

$$B_m = \left\{x \mid |x| \leqslant \frac{1}{m}\right\}.$$

因此有对 $|\alpha| \leqslant 2$

$$D^\alpha(\psi_m u) \xrightarrow{L^q(Q)} D^\alpha u \quad (m \to \infty).$$

故存在与 m 无关的 C 使得

$$\|\psi_m u\|_{W_q^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{W_q^2(\mathbb{R}^n)}.$$

这样，已证明了在 $n=2$ 时结论是成立的. 假设在 $n-1$ 时结论成立，现在来证明在 n 时结论也成立.

设 ψ_m^{n-1} 为 $n-1$ 维情况下得到的 ψ_m. 现在令：

$$\psi_{m_1,m_2}^n(r,\omega) = \varphi\left(m_1\left(r - \frac{d}{m_2}\right)\right)\psi_{m_2}(\omega),$$

其中 d 是一大于 Q 的锥度的常数，可以验证 $\operatorname{supp}\psi^{n}_{m_1,m_2}(r,\omega)$ 是一个包含在 Q 中的锥，当 m_1, m_2 趋于∞时这个锥与 Γ_h 的交趋于 Γ_h。这样剩下的就是要证明这样的 $\psi^{n}_{m_1,m_2}$ 满足

$$\|\psi^{n}_{m_1,m_2}u\|_{W^2_q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{W^2_q(\mathbb{R}^n)}. \tag{\#}$$

同前一样这只需证明当 $m_1, m_2 \to \infty$ 时 $\psi^{n}_{m_1,m_2}$ 的导数在 $L^q(Q)$ 中趋于零。事实上 $(\varphi_m(r) = \varphi(mr))$:

$$\begin{aligned}&\int_Q |D^\alpha\varphi_{m_1} D^\beta \psi^{n-1}_{m_2} u|^2 dx \\ &\leqslant C\int_{|r|<\frac{1}{m_1}}\int_{|\rho|<\frac{1}{m_2}} \frac{|u|}{r^{|\alpha|}}\frac{|u|}{\rho^{|\beta|}}\,dx.\end{aligned}$$

利用 Cauchy 不等式和前面的引理可知上式右端的积分项趋于零，故(#)式中的 C 可选取与 m_1, m_2 无关。注意上面要求 $|\alpha| = |\beta| = 1$，对于 $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ α, β，其中一个为零的情况可直接利用前面的引理。

参 考 文 献

[1] Adams, R., *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[2] Lions, J. L. & Magenes, E., 2 *Annales de l'institut de Fourier*, **11** (1961), 137—178; 3 *Annali S.N.S. Pisa*, 15 (1961), 39—101.

[3] Gagliardo, E., *Ren. Sem. Mat. Univ. Padova*, 27(1957), 284—305.

[4] Grisvard, P., *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains.*, Pitman, 1985.

[5] Nečas, J., *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson, Paris, 1967.

[6] Céa, J., *Optimisation Théorie et Algorithmes Dunod*, Paris, 1971.

[7] Ding, H., *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 303, Serie I n°20, 1986, 983—986.

[8] Ding, H., *Thesis of Doctorat*, Université de Nice, 1986.

[9] Grisvard, P., *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, Series 3, 3 (1963), 17: 255—296.