

气动计算中的紧致格式与 迎风紧致格式* 1)

马延文 傅德薰

(中国科学院力学研究所)

A COMPACT SCHEME AND AN UPWIND COMPACT SCHEME FOR SOLVING AERODYNAMIC EQUATIONS

Ma Yan-wen Fu De-xun

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper a compact and an upwind compact scheme are discussed. The compact scheme has high accuracy with little computational work. To improve accuracy near the shock an upwind compact scheme with limiter is developed to solve the 1-D shock tube problem, high resolutions near the discontinuities are obtained.

§ 1. 引言

巨型计算机的发展为解决流体力学问题提供了强有力的手段。由于我们所面临的问题日趋复杂,在今天如何提高数值模拟精度和提高求解效率仍是计算流体力学工作者面临的重要课题。

自 Beam 和 Warming^[1] 提出隐式求解法以来,NS 方程的求解效率大为提高。此后人们在这方面作了很多工作,如在[2]中利用线 Gauss-Seidel 迭代法加快了迭代的收敛速度,[3]中利用特殊 Jacobian 系数矩阵分裂法简化了求解过程,[4,5]中提出的算子放大型和算子附加型修正法也有助于改善求解效率,其他如对角化算法以及求解序列法等也都有益于提高求解效率。

在提高精度和解的分辨率方面,近年来有了很大进展。为了提高数值解的分辨率,发展了很多有效的格式,如 CSCM^[6] 方法, TVD 格式^[7], ENO 格式^[8], NND 格式^[9]和 MmB 格式^[10]等。合理的网格布局对提高数值解的精度和提高求解效率方面都是有好处的。

采用高精度格式无疑对提高解的精度和求解效率都是有益的,因为可以用较少的网格点、较少的计算工作量,而得到较高精度的解。通常高精度格式较为复杂且格式与较多的网格点相联系。通常的高精度格式给边界条件和近边界点上的处理带来困难。紧致差分格式形式上可用较少的网格点而得到较高的精度,这种格式较易求解和容易处理边界

* 1989年12月5日收到。

1) 国家自然科学基金资助项目。

条件。1975年 S. G. Rubin 利用紧致格式求解了不可压 NS 方程^[11], 随后马延文于 1978 年利用紧致格式求解了钝头体超音速粘性绕流问题^[12], 在[14]中给出了更为简单的紧致格式求解法。

紧致格式虽然精度高, 但在间断附近数值解中存在伪振荡现象。为了提高紧致格式对激波的捕捉能力, [13]针对模型方程讨论了迎风紧致格式, 但该方法难以推广用于解决气动问题。本文给出了一个较为简单的迎风紧致格式, 通过限量函数 (Limiter) 控制格式中的耗散项。该方法兼顾到问题的求解效率、解的精度, 且有较好的激波捕捉能力。文中利用这一方法求解了一维激波管问题, 取得了较为满意的结果。本文还通过模型方程讨论了迎风紧致格式, 给出了逼近于 1-D Euler 方程的逼近式。

§ 2. 模型方程的紧致差分逼近

A. 紧致差分逼近

为简便起见, 首先讨论如下之线性 Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \text{const.}, \quad \text{Re} = \text{const.} \quad (1)$$

这是讨论 NS 方程的一个模型方程, 而讨论 Euler 方程的模型方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

设 $\frac{F_j}{\Delta x}$ 为对 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 在 j 点上的紧致差分逼近, $\frac{S_j}{\Delta x}$ 为 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的在 j 点上的紧致差分逼近, 于是

$$F_j = \frac{\delta_x^0}{1 + \frac{1}{6} \delta_x^2} u_j, \quad S_j = \frac{\delta_x^2}{1 + \frac{1}{12} \delta_x^2} u_j, \quad (3)$$

其中

$$\delta_x^+ u_j = u_{j+1} - u_j, \quad \delta_x^0 = \frac{1}{2} (\delta_x^+ + \delta_x^-),$$

$$\delta_x^- u_j = u_j - u_{j-1}, \quad \delta_x^2 = \delta_x^+ \delta_x^-.$$

(3)式的展开形式为

$$\frac{1}{6} F_{j+1} + \frac{2}{3} F_j + \frac{1}{6} F_{j-1} = \delta_x^0 u_j, \quad (4)$$

$$\frac{1}{12} S_{j+1} + \frac{5}{6} S_j + \frac{1}{12} S_{j-1} = \delta_x^2 u_j. \quad (5)$$

此时

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + a \frac{F_j}{\Delta x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{S_j}{\Delta x^2} \quad (6)$$

将以四阶精度逼近于(1)式。在实践中通常雷诺数 Re 很大, 为使一阶导数项的截断误差不会掩盖真实粘性项, 提高对一阶导数的逼近精度是很有必要的。逼近于(2)式的最简单紧致差分为

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} F_i^n,$$

式中 F_i^n 是由(4)式取 u_i^n 解代数方程而得。这一格式是不稳定的。可用如下两步法求解定常问题

$$u_i^{\overline{n+1}} = u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} F_i^n,$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} F_i^{\overline{n+1}}.$$

此时稳定条件为

$$|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

在[11]中给出如下无条件稳定的格式

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} F_i^{n+1}.$$

用这种方法求解多维气动问题较为困难,[14]利用如下方法:

$$\left(1 + \frac{\beta}{2} a^+ \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^- + \frac{\beta}{2} a^- \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^+\right) \delta_x u_i^{n+1} = -a \frac{\Delta t}{\Delta x} F_i^n. \quad (7)$$

该式可直接求解,也可通过如下近似因式分解法求解:

$$\left(1 + \frac{\beta}{2} a^+ \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^-\right) \left(1 + \frac{\beta}{2} a^- \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^+\right) \delta_x u_i^{n+1} = -a \frac{\Delta t}{\Delta x} F_i^n, \quad (8)$$

式中 $\delta_x u_i^{n+1} = u_i^{n+1} - u_i^n$, $a^+ + a^- = a$, $a^+ \geq 0$, $a^- \leq 0$.

当 $\beta \geq \sqrt{3}$ 时,(7)式是无条件稳定的。为了了解紧致格式(7)给数值解的精度带来的好处,在表中给出了如下模型问题:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= \cos(x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \\ u(t, 0) &= 0 \\ u(0, x) &= \frac{1}{2} \sin(x) \end{aligned} \quad (9)$$

的定常精确解 $u = \sin(x)$ (表中 No.1)、一阶精度迎风格式解(表中 No.2)、二阶精度 MacCormack 格式解(表中 No.3)以及四阶精度紧致格式解(No.4)在 $x = \frac{\pi}{2}$ 点上的比较。左侧为网格分点数。从表中可以看出,利用 129 个点迎风格式还不能很好地逼近精确解,具有二阶精度的 MacCormack 格式需要 65 个点才能给出较为满意的解,而利用具有四阶精度的紧致格式为得到同样的精度只需 9 个点。利用紧致格式求解多维问题与通常格式相比较只需增加很少的工作量,即只多了对三对角矩阵的求逆,然而却可大大减少网格点数。

B. 迎风紧致差分逼近

前面曾提到,紧致格式数值解在间断附近有伪振荡产生,采用迎风紧致格式有助于改善这一情况。这里针对方程(2)进行讨论,并设 $a \geq 0$ 。通常逼近于 $\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}$ 的表达式 F_i^n

不同格式的精度比较 ($x = \frac{\pi}{2}$)

| 格式 网点 | No.1 | No.2 | No.3 | No.4 |
|----------|--------------------|-------|--------------------|--------------------|
| 9 | .1000 ⁴ | .5754 | .1134 ⁴ | .1002 ⁴ |
| 17 | .1000 ⁴ | .7908 | .1039 ⁴ | .1000 ⁴ |
| 33 | .1000 ⁴ | .8986 | .1011 ⁴ | .1000 ⁴ |
| 65 | .1000 ⁴ | .9501 | .1003 ⁴ | .1000 ⁴ |
| 129 | .1000 ⁴ | .9753 | .1001 ⁴ | .1000 ⁴ |

为
$$F_j = \sum_k \alpha_k u_{j+k} \quad (10)$$

或
$$F_j = \sum_k \alpha_k (u_{j+k+1} - u_{j+k}), \quad (11)$$

也可采用更为一般的逼近形式:

$$\sum_k \alpha_k F_{j+k} = \sum_k a_k (u_{j+k+1} - u_{j+k}). \quad (12)$$

在本文中称(10)和(11)为 $\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}$ 的显式逼近, (12)为隐式逼近。将(12)式在 j 点进行 Taylor 级数展开, 并取相应系数相等, 可得

$$\sum_k \alpha_k k^{m-1} = \sum_k a_k \frac{(k+1)^m - k^m}{m}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (13)$$

M 为逼近精度, 它依赖所用网格点数。取(13)式中 $m = 1$ 得相容条件

$$\sum_k \alpha_k = \sum a_k. \quad (14)$$

常用的中心差分、两点迎风差分 and 三点迎风差分等是(12)式的具体显式形式。将(12)式在 j 点进行 Taylor 级数展开, 并利用关系式(13)可得

$$F_j = \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \sum_n \left(C_{2n} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} + C_{2n+1} \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} \right)_j. \quad (15)$$

如果 $(-1)^p C_{2p} > 0$, 则称(12)式为 $\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}$ 的迎风逼近, 这里

$$C_{2n} = 0, \quad n < p,$$

$$C_{2n} \neq 0, \quad n = p.$$

迎风逼近将给出正的耗散项。

在具体应用中采用了如下简单的具体隐式形式

$$\alpha_0 F_{j+1} + \beta_0 F_j + \gamma_0 F_{j-1} = (a_0 \delta_x^+ + b_0 \delta_x^-) u_j, \quad (16)$$

其中

$$\alpha_0 = \frac{1}{6} + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \quad a_0 = \frac{1}{2} - 2\varepsilon_4,$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{6} - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4, \quad b_0 = \frac{1}{2} + 2\varepsilon_4, \quad (17)$$

$$\beta_0 = \frac{2}{3} + 2\varepsilon_3.$$

(16)可形式地写为

$$F_j = \frac{\delta_x^0 - 2\varepsilon_4 \delta_x^2}{1 + 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_4)\delta_x^0 + \left(\frac{1}{6} - \varepsilon_3\right)\delta_x^2} u_j. \quad (18)$$

此时(15)式的具体形式为

$$F_j = \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} - 2\varepsilon_2 \Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon_3 \Delta x^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \varepsilon_4 \frac{\Delta x^4}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \quad (19)$$

对 ε_k 取不同值可得不同的逼近式,如取 $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = -\frac{1}{12}$, $\varepsilon_4 = \frac{1}{4}$ 时有

$$F_j = \frac{\delta_x^-}{1 - \frac{1}{2} \delta_x^-} u_j;$$

取 $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = -\frac{1}{12}$, $\varepsilon_4 = -\frac{1}{4}$ 时有

$$F_j = \frac{\delta_x^+}{1 + \frac{1}{2} \delta_x^+} u_j.$$

根据对 ε_k 的不同选取会得到不同精度的格式:

$\varepsilon_1 > 0$, 一阶精度迎风逼近,

$\varepsilon_2 = 0$, 二阶精度逼近,

$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, $\varepsilon_4 > 0$, 三阶精度迎风逼近,

$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$, 四阶精度紧致逼近.

可根据需要得出在边界点上对 F_j 的逼近关系式,此时只要选取适当的 ε_k ($k = 2, 3, 4$) 即可. 一般说来,此时会降低逼近精度. 在实际应用中,有时可以根据流动的物理状态来得到 F_j 在边界上的关系式,如在未受扰动的来流边界上可取 $F_j = 0$, 在 u_j 为对称的边界点上,如果对称点取在半网格点上,则 $F_1 = -F_2$ ($j = \frac{1}{2}$ 为对称点). (7.18) 式

稳定性分析的放大因子为

$$S = \frac{C + iD \sin \theta}{A + iB \sin \theta}, \quad (20)$$

$$A = \left[\frac{1}{3} (2 + \cos \theta) + 2\varepsilon_3 (1 - \cos \theta) \right] \left[1 + \frac{\beta}{2} a \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - \cos \theta) \right] \\ + \beta (\varepsilon_4 - \varepsilon_2) a \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin^2 \theta,$$

$$B = \frac{\beta}{2} a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{1}{3} (2 + \cos \theta) + 2\varepsilon_3 (1 - \cos \theta) \right] \\ + 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_4) \left[1 + \frac{\beta}{2} a \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - \cos \theta) \right],$$

$$C = A + 4\varepsilon_4 a \frac{\Delta t}{\Delta x} (\cos \theta - 1)$$

$$B = B - a \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

图 1 给出了 $a \frac{\Delta t}{\Delta x} = 100$, $\varepsilon_2 = .01$, $\varepsilon_3 = .1$, $\varepsilon_4 = .125$ 时对不同 β 值 ($\beta = 1.25, 1.5$,

2.0) $|S|$ 的变化曲线.

§ 3. 一维 Euler 方程的迎风紧致逼近

经无量纲化后的 1-D Euler 方程向量形式为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (21)$$

$$U = [\rho, \rho u, E]^T,$$

$$f = [\rho u, \rho u^2 + p, u(E + P)]^T,$$

$$p = \frac{1}{r M_\infty^2} \rho T, \quad E = \rho \left(C_v T + \frac{u^2}{2} \right). \quad (22)$$

为 A 为对应于 f 的 Jacobian 系数矩阵 $A = \frac{D(f)}{D(U)}$.

通过矩阵 A 的特征值对 A 和流通向量 f 进行分裂, A 的特征值为

$$\lambda_1 = u, \quad \lambda_2 = u - c, \quad \lambda_3 = u + c, \quad (23)$$

c 为无量纲化后的声速. 定义

$$\lambda_k^\pm = \frac{\lambda_k \pm |\lambda_k|}{2},$$

$$A^\pm = S^{-1} \Lambda^\pm S, \quad f^\pm = A^\pm U,$$

其中 S^{-1} 和 S 为相似变换矩阵, Λ^\pm 为由 λ_k^\pm 组成的对角矩阵

$$\Lambda^\pm = \begin{bmatrix} \lambda_1^\pm & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^\pm & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^\pm \end{bmatrix}.$$

逼近于方程(21)的差分格式为

$$\left[1 + \frac{\beta}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\delta_x^- A^+ + \delta_x^+ A^-) \right] \delta_t U_i^{n+1} = - \frac{\Delta t}{\Delta x} F_i^n, \quad (24)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \delta_t U_i^{n+1},$$

其中

$$F_i = F_i^+ + F_i^-,$$

$$F_i^\pm = \frac{\delta_x^0 - 2\varepsilon_2^\pm \delta_x^2}{1 + 2(\varepsilon_2^\pm - \varepsilon_4^\pm) \delta_x^2 + \left(\frac{1}{6} - \varepsilon_3^\pm \right) \delta_x^2} f_i^\pm, \quad (25)$$

$$\varepsilon_{2,4}^+ \geq 0, \quad \varepsilon_{2,4}^- \leq 0.$$

在计算一维微波管问题中取 $\varepsilon_i^\pm = \pm 0.125$,

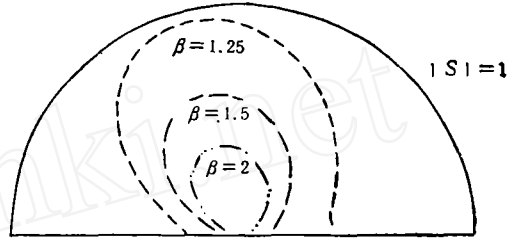


图 1 $a \frac{\Delta t}{\Delta x} = 100$, $\varepsilon_2 = .01$, $\varepsilon_3 = .1$, $\varepsilon_4 = .125$ 时 $\beta = 1.25, 1.5, 2.0$ $|S|$ 的变化曲线

$$\varepsilon_k \sim \Delta x(|u| + c)[1 - Q(r^+, r^-)]^{k-1}, \quad k = 2, 3,$$

限量函数 Q 取 Roe 的巨峰 (Super bee) 式^[7]:

$$Q(r^+, r^-) = \frac{r^- + |r^-|}{1 + r^-} + \frac{r^+ + |r^+|}{1 + r^+} - 1,$$

$$r_{i+\frac{1}{2}}^- = \frac{(\delta_x^- U_j, \delta_x^+ U_j)}{(\delta_x^+ U_j, \delta_x^+ U_j)},$$

$$r_{i+\frac{1}{2}}^+ = \frac{(\delta_x^+ U_j, \delta_x^+ U_{j+1})}{(\delta_x^+ U_j, \delta_x^+ U_j)},$$

这里 (\cdot, \cdot) 表示内积。不难看出, 按上面给定的 ε_k , 在空间方向格式(24)中光滑区将有三阶逼近精度, 而在极值点上具有二阶逼近精度。相对于一般迎风格式, 上面讨论的格式形式上利用了较少的网格点而有较高的逼近精度, 因而在本文中称其为迎风紧致差分。关于限量函数可见[7], 这里不做详细介绍。

§ 4. 一维激波管问题的计算

我们计算的物理问题如图 2 所示。在 $t = 0$ 时管中横隔膜的左侧其状态为 $\rho_1 = 1$, $p_1 = 1$, $u_1 = 0$; 膜右端的初始状态为 $\rho_2 = 0.125$, $p_2 = 0.1$, $u_2 = 0$ 。取管长 $l = 1$ 。膜在 $t = 0$ 时位于 $x = 0.5$ 处, 需计算膜破裂后的流动情况。在图 3—6 中分别给出了在 $t = 0.14$ 时刻的密度、速度、压力和内能的分布, 还给

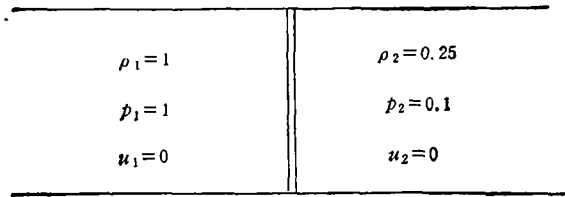


图 2 激波管问题 $t = 0$ 时刻的分布

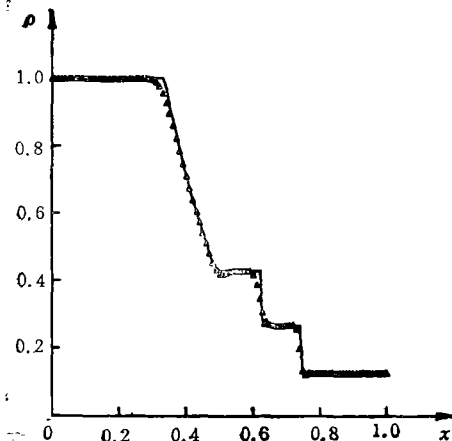


图 3 $t = 0.14$ 时刻的密度分布

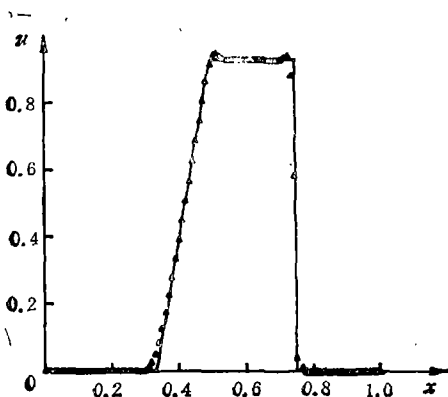


图 4 $t = 0.14$ 时刻的速度分布

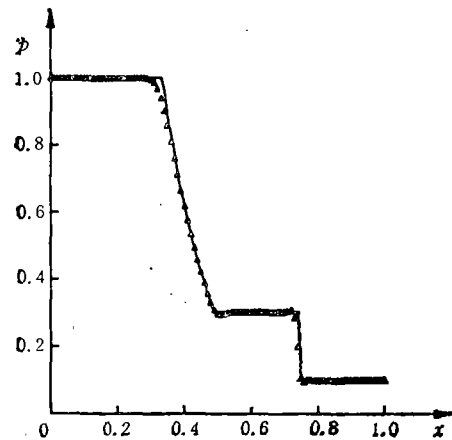
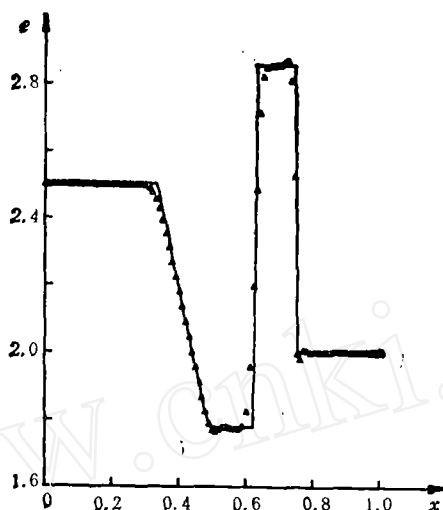


图 5 $t = 0.14$ 时刻的压力分布

图 6 $t = 0.14$ 时刻的内能分布

出了在同一时刻相应量的精确解。从图中可以看到, 在间断附近的解是令人满意的。

参 考 文 献

- [1] R. Beam, R. Warming, An implicit scheme for the compressible Navier-Stokes equations, *AIAA J.*, 16(1978), 393—402.
- [2] R. W. MacCormack, Curant status of numerical solutions of the Navier-Stokes equations, *AIAA*, No. 85-032.
- [3] Ma Yan-wen, Fu De-xun, A simple and efficient implicit scheme for the compressible Navier-Stokes equations, Proceedings of the 10th International Conference On Numerical Methods in Fluid Dynamics, Beijing, 1986.
- [4] 马延文, 人工不定常方法数值求解一维 Navier-Stokes 方程, 计算数学, No. 2, 1978.
- [5] Fu De-xun, Ma Yan-wen, A new modified semi-explicit difference scheme in aerodynamics, Proceedings of the 9th International Conference On Numerical Methods in Fluid Dynamics, Paris, 1984.
- [6] C. K. Lombard, J. Olinger, J. Y. Yang, W. C. Davy, Conservative supra-characteristics method for splitting the hyperbolic systems of gasdynamics with computed boundaries for real and perfect gases, *AIAA*, No. 82-0873, 1982.
- [7] H. C. Yee, Upwind and symmetric shock capturing schemes, *NASA*, TM 89646, 1987.
- [8] J. Y. Yang, C. K. Lombard, Uniform second order accurate ENO schemes for the Euler equations of gas dynamics, *AIAA*, No. 87-1166.
- [9] On non-oscillatory and parameter free finite difference schemes and its application to Numerical solution of Euler and Navier-Stokes equations, International Symposium on Computational fluid Dynamics, Nagoya, Japan, 1989.
- [10] Wu Hua-mo, New accurate high resolution TVD schemes-analysis and applications, International Symposium on Computational Fluid Dynamics, Nagoya, Japan, 1989.
- [11] S. G. Rubin, R. A. Jr. Graves, Viscous flow solution with a cubic spline approximation, *Computers & Fluids*, Vol. 3, No. 1, 1975.
- [12] 马延文, 董常铨, 高精度差分格式数值求解锁头体超音速粘性绕流问题, 计算空气动力学会议, 杭州, 1978.
- [13] I. Christie, Upwind compact finite differenceschemes, *J. of Comp. Physics*, 59: 3(1985).
- [14] Ma Yan-wen, Fu De-xun, Numerical solution of compressible flow with compact scheme, *AIAA*, No. 87-1123, 1987.