第24卷 第3期
1992年5月

力学学报
ACTA MECHANICA SINICA

Vol. 24 No. 3
May. 1992

气泡振动的非线性耦合模型*

周显初
（中国科学院力学研究所，北京，100080）

梅强中
（美国麻省理工学院土木系）

提要 我们推广了 Longuet-Higgins 关于各向同性气泡的非各向同性模式激发的二阶理论．着重注意“呼吸”模式和“变形”模式之间的相互作用，两个模式之间的能量交换足够强，以致于两个模式有同量级的振幅．文中指出：模式耦合的方程组类似于其他物理领域（如非线性光学、水波）所研究的方程组，并讨论了二种特解，考虑了平衡点及其稳定性．

关键词 气泡振动，气泡的声散射，二个模式的非线性共振

一、引言

尽管人们知道气泡表面振动是空蚀和波浪破碎产生的噪声的原因，但潺潺流水、波浪破碎和水下喷管射出的气泡的发声机理还远未被人们完全了解．首先对气泡的声波进行研究的是 Minnaert[1]，他指出：在实验中，气泡发声的频率接近于球形气泡的径向振动模式(所谓“呼吸模式”)的频率．按照线性理论，只有各向同性的具有单极子形式的呼吸模式能有效地辐射声波，其他的模式只产生局部的扰动，因为它们的体积守恒．完全的非线性气泡振动理论从 Neppiras[2] 的研究开始．早期的研究工作可参阅 Plesset 和 Prosperetti[3] 的评述．

最近 Longuet-Higgins[4] 指出，由二阶理论，一个频率为 σ 的一阶非各向同性模式能够产生频率为其二倍的二阶各向同性模式．这种机制与表面重力波的下述机制很相似：深入水下不到一个波长的频率为 σ 的一阶驻波可以产生频率为 2σ 的二阶压力，且此压力可达到很大深度而不衰减．他给出了具有给定变形的初值问题的解．由于他引入了各种阻尼，所以即使呼吸模式和变形模式正好处于共振频率时，呼吸模式的振幅还是有限的．

我们研究的气泡半径从 0.01cm 到 1cm． Toba[5] 指出：风波生成的气泡正好在这个范围之内．海洋声学感兴趣的频率范围很宽，从 100 赫到 10^5 赫．我们着重关心水面附近的气泡，所以可把气泡内的压力近似为一个大气压．Prosperetti[6] 指出，对于足够高的频率、足够大的气泡，阻尼很小，各向同性模式能够共振放大到二阶理论不再适用的程度．

本文于1990年9月5日收到第一稿，1991年3月25日收到修改稿．
* 国家自然科学基金委支持项目．

下面，我们提出弱阻尼情况下气泡共振相互作用理论．频率为 σ_n 的非各向同性模式(变形模式)之间存在非线性耦合．由于入射声波的共振散射也是探察海洋中的气泡的一种机制,我们考察强迫入射声波的影响．

二、量级估计

作为参考，我们写出大家熟知的不计及表面张力的半径为 R 的充气气泡的共振辐射频率的公式

$$\omega_0 = \sqrt{3\gamma p_b/\rho R^2} \tag{2.1}$$

其中 p_b 是气泡内的压力，γ 是空气的比热比，ρ 为水的密度．

在海洋表面附近，p_b 约为一个大气压，气泡的共振频率约为 $f_0 = \omega_0/2\pi = 327/R$ 赫[7],其中 R 是以 C_m 为单位的气泡半径．因此，$kR = \frac{2050}{c} \sim O(10^{-2})$,可作为小参数 ε．假定气泡在流体中被振幅为 A 的入射声波所共振，a 为气泡振动的振幅，于是我们可以期望

$$A/a = O(kR) \equiv O(\varepsilon) \ll 1 \tag{2.2}$$

在气泡表面，一阶振动量的量级为 $O(a/R)$，非线性影响的量级为 $O(a/R)^2$．入射声波的一阶扰动和非线性分别为 $O(kA)$ 和 $O(kA)^2$ 的量级．两个非线性之比为

$$(kA)^2/(a/R)^2 = (A/a)^2(kR)^2 = O(\varepsilon^4) \ll 1 \tag{2.3}$$

因此,考虑气泡表面的非线性时,远场声波的非线性可以忽略,所以用线性波动方程

$$c^2\nabla^2\phi = \phi_{tt} \tag{2.4}$$

描述远场就足够了,而速度和压力与 ϕ 的关系为

$$p = -\rho\phi_t \qquad \boldsymbol{V} = \nabla\phi \tag{2.5}$$

三、气泡的近场

在气泡附近，$r = O(R)$，水的压缩性可忽略,其误差为 $O(kR)^2$．速度势 φ 满足拉普拉斯方程．

对 $a/R \ll 1$ 的小振幅气泡振动,Longuet-Higgins 在平均气泡半径上展开运动学和动力学边界条件．在轴对称情况,令气泡界面为 $r = R + \eta(t,\theta)$，精确到 a/R 的二阶量,他给出[4]

$$\eta_t - \varphi_r = \eta\varphi_{rr} - \frac{1}{R^2}\eta_\theta\varphi_\theta \qquad r = R \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\varphi_t + \frac{T}{\rho R^2}(2 + \nabla_s^2)\eta - R\omega_0^2\bar{\eta} &= -\eta\varphi_{rt} - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 \\ &+ \frac{T}{\rho R^3}2\eta(1 + \nabla_s^2)\eta + \omega_0^2\left(\bar{\eta}^2 - \frac{3}{2}(\gamma + 1)\bar{\eta}^2\right), \quad r = R\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 ω_0 由(2.1)式给出，T 为表面张力系数，

$$\nabla_s^2 f = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}f\right) \tag{3.3}$$

$\bar{\eta}$ 记作球面平均

$$\bar{\eta}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\eta\sin\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\eta\sin\theta d\theta \tag{3.4}$$

把 η 和 φ 按小参数 ε 展开

$$\eta=\varepsilon\eta_1+\varepsilon^2\eta_2+\cdots,\quad \varphi=\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+\cdots \tag{3.5}$$

首项近似满足方程

$$\eta_{1t}-\varphi_{1r}=0 \tag{3.6}$$

$$\varphi_{1t}+\frac{T}{\rho R^2}(2+\nabla_1^2)\eta_1-R\omega_0^2\bar{\eta}_1=0 \tag{3.7}$$

首项解由各向同性模式和有子午线方向变形的各向异性模式组成

$$\eta_1=a_0e^{-i\omega t}+a_nP_n(\cos\theta)e^{-i\sigma_nt}+* \tag{3.8}$$

$$\varphi_1=b_0\frac{R}{r}e^{-i\omega t}+b_n\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}P_n(\cos\theta)e^{-i\sigma_nt}+* \tag{3.9}$$

其中 $P_n(\cos\theta)$ 是 n 阶 Legendre 多项式，$*$号表示复共轭项，振幅 a_0,a_n,b_0,b_n 随缓变时间 $t_1=\varepsilon t$ 而变，且

$$b_0=i\omega Ra_0,\quad b_n=\frac{i\sigma_n+Ra_n}{n+1} \tag{3.10}$$

这些模式的特征频率由下式给出

$$\omega^2=\omega_0^2-2T/(\rho R^3),\quad \sigma_n^2=(n-1)(n+1)(n+2)T/(\rho R^3) \tag{3.11}$$

尽管在一般的初始条件下所有 $n=2,3,4,\cdots$的模式都可能存在，但是我们只着重注意呼吸模式和第 n 次变形模式之间的接近于共振的相互作用，它们的频率下面的共振条件

$$\omega=2\sigma_n+\varepsilon\sigma\sigma_n \tag{3.12}$$

由于气泡半径不同，正确的共振条件很难满足，它们之间的失谐为 $\varepsilon\sigma\sigma_n$，$\sigma\leqslant O(1)$。

在气泡的平均表面上，二阶解必须满足下列边界条件

$$\eta_{2t}-\varphi_{2r}=\eta_1\varphi_{1rr}-\frac{1}{R^2}\eta_{1\theta}\varphi_{1\theta}-\eta_{1t_1} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{2t}+\frac{T}{\rho R^2}(2+\nabla_1^2)\eta_2-R\omega_0^2\bar{\eta}_2=&-\eta_1\varphi_{1rt}-\frac{1}{2}(\nabla\varphi_1)^2\\&+\frac{T}{\rho R^3}(2\eta_1)(1+\nabla_1^2)\eta_1+\omega_0^2\left[\bar{\eta}_1^2-\frac{3}{2}(\gamma+1)\bar{\eta}_1^2\right]-\varphi_{1t_1}\end{aligned} \tag{3.14}$$

该方程除了最后一项和一处印刷错误外，与[4]的方程相同。φ_2 是轴对称的、满足拉普拉斯方程，因此，φ_2、η_2 可以写为

$$\eta_2=c_0+\sum_{n=2}^{\infty}c_nP_n(\cos\theta) \tag{3.15}$$

$$\varphi_2=d_0\frac{R}{r}+\sum_{n=2}^{\infty}d_n\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}P_n(\cos\theta)+[\bar{d}_0e^{-i\omega t}+*] \tag{3.16}$$

其中 c_0、c_n、d_0 和 d_n 是 t 和 t_1 的待定函数，须要由(3.13)、(3.14)式决定，$\bar{d}_0$ 只依赖于 t_1，由与外场解匹配而定. 把(3.15)、(3.16)代入(3.13)，取球面平均，再利用 Legendre 函数的性质可得

$$\frac{\partial c_0}{\partial t}+\frac{1}{R}d_0=\left[\frac{2i\omega}{R}(a_0^2e^{-2i\omega t}+a_0a_0^*)+\frac{2i\sigma_n}{(2n+1)R}(a_n^2e^{-2i\sigma_n t}+a_na_n^*)-\frac{da_0}{dt_1}e^{-i\omega t}\right]+* \tag{3.17}$$

把(3.15)和(3.16)式代入(3.14)，进行同样运算可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial d_0}{\partial t}-R\omega^2c_0=\Big\{&\omega^2(a_0^2e^{-2i\omega t}+a_0a_0^*)+\frac{\sigma_n^2}{2n+1}(a_n^2e^{-2i\sigma_n t}+a_na_n^*)\\&+\frac{\omega^2}{2}(a_0^2e^{-2i\omega t}-a_0a_0^*)+\frac{\sigma_n^2}{2(n+1)}(a_n^2e^{-2i\sigma_n t}-a_na_n^*)\\&+\frac{2T}{\rho R^3}\left[(a_0^2e^{-2i\omega t}+a_0a_0^*)+\frac{1-n-n^2}{2n+1}(a_n^2e^{-2i\sigma_n t}+a_na_n^*)\right]\\&+\omega_0^2\left[-\frac{3\gamma+1}{2}(a_0^2e^{-2i\omega t}+a_0a_0^*)+\frac{1}{2n+1}(a_n^2e^{-2i\sigma_n t}+a_na_n^*)\right]\\&+\left[-iR\omega\frac{da_0}{dt_1}e^{-i\omega t}+i\omega\bar{d}_0e^{-i\omega t}\right]\Big\}+*\end{aligned} \tag{3.18}$$

从(3.17)和(3.18)式消去 d_0 可得关于 c_0 的方程. 为使 c_0 有均匀有效解，其长期性应为零，于是得到

$$\frac{da_0}{dt_1}=-is_0a_n^2e^{i\sigma\sigma_n t_1}+\frac{\bar{d}_0}{2R} \tag{3.19}$$

其中

$$s_0=\frac{(4n-1)\sigma_n}{8(n+1)(2n+1)R} \tag{3.20}$$

类似地，把(3.15)和(3.16)式代入(3.13)和(3.14)等号两边乘以 $P_n(\cos\theta)$，取球面平均，消去 d_n，可得 c_n 的方程，消去长期项可得

$$\frac{da_n}{dt_1}=-is_na_0a_n^*e^{-i\sigma\sigma_n t_1} \tag{3.21}$$

其中

$$s_n=\frac{(4n-1)\sigma_n}{2R} \tag{3.22}$$

方程(3.19)和(3.21)描述了复振幅 a_0、a_n 的发展是本文的基本方程. 其中的系数 $\bar{d}_0$ 由远场匹配决定. 近场的速度势(精确到二阶)为

$$\begin{aligned}\varphi=\Big\{&\varepsilon\left[b_0\frac{R}{r}e^{-i\omega t}+b_n\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}P_n(\cos\theta)e^{-i\sigma_n t}\right]\\&+\varepsilon^2\left[d_0\frac{R}{r}+\sum_n d_n\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}P_n(\cos\theta)+\bar{d}_0e^{-i\omega t}\right]\Big\}+*\end{aligned} \tag{3.23}$$

其中 b_0 和 b_n 由(3.10)式决定.

四、与远场匹配，气泡的发展方程

按前面的量级估计，远场 ($r \gg R$) 的声波势 ϕ 服从线性波动方程，可以写为

$$\phi = \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 = \left\{\varepsilon B_0 \frac{1}{kr} e^{i(kr-\omega t)} + \varepsilon[B_n P_n(\cos\vartheta) h_n(k_n r) e^{i(k_n r-\sigma_n t)}] + \varepsilon^2 \frac{ip_0}{\rho\omega} e^{i(kx-\omega t)}\right\} + * + \cdots \tag{4.1}$$

其中 $k_n = \sigma_n/c$，h_n 记为相应于辐射波的第一类 Hankel 球函数，系数 B_0、B_n 可以包含 $O(\varepsilon)$ 和 $O(\varepsilon^2)$ 项。在二阶项中包含了幅度为 p_0、频率与呼吸模式相同的平面入射压力波。

把远场和近场的速度势匹配到 $O(\varepsilon^2)$，即令 $\frac{r}{R} \gg 1$ 时的 (3.23) 式和 $kr \ll 1$ 时的 (4.1)式相等，得到

$$b_0 = B_0/kR = i\omega R a_0 \quad 或 \quad B_0 = i\omega k R R a_0 = O(\varepsilon) \tag{4.2a}$$

$$b_n = -B_n \frac{(2n-1)!!}{(k_n R)^{n+1}} \quad 或 \quad B_n = O(\varepsilon^{n+1}) \tag{4.2b}$$

$$\bar{d}_0 = -\left(\frac{kR}{\varepsilon}\right)\omega R a_0 + \frac{ip_0}{\rho\omega} \tag{4.2c}$$

这意味着：从气泡向外辐射的声波只是 $O(\varepsilon)$ 的量级，而且主要来自呼吸模式。

最终我们从(3.19)和(3.21)得到的 a_0 和 a_n 的发展方程为

$$\frac{da_0}{dt_1} = -is_0 a_n^2 e^{i\sigma\sigma_n t_1} - \frac{1}{2}\frac{kR}{\varepsilon}\omega a_0 + \frac{if_0}{2\rho\omega R} e^{i\sigma_n \Omega t_1} \tag{4.3}$$

$$\frac{da_n}{dt_1} = -is_n a_0 a_n^* e^{-i\sigma\sigma_n t_1} \tag{4.4}$$

其中，我们已经把平面入射压力波的振幅 p_0 表示为

$$p_0 = f_0 e^{i\sigma_n \Omega t_1} \tag{4.5}$$

f_0 是复数，(4.3)式的第二项代表辐射阻尼。

由(3.20)和(3.22)式可知，对于大的 n，$s_0 \sim \sigma_n/(4nR)$ 是小的，$s_n \sim 2n\sigma_n/R$ 比较大。因此，要影响 a_0，a_n 必须很大，而小的 a_0 却能影响 a_n。还可看出，频率为 σ_n 的平面入射波在二阶近似内，对这些发展方程没有影响。由(4.4)式可知，一个变形模式要参加共振相互作用，必须有非零的初值。

引入无量纲化如下：

$$\tau = t_1/T_0, \quad T_0 = \sqrt{2\rho\omega R/(|f_0| s_n)}$$

$$A_0 e^{i\Omega\sigma_n T_0 \tau} = (T_0 s_n) a_0, \quad A_n e^{\frac{1}{2}i(\Omega-\sigma)\sigma_n T_0 \tau} = T_0\sqrt{s_0 s_n}\, a_n$$

其中 $\varepsilon^2|f_0|$ 是远场入射声波的振幅。(4.3)和(4.4)式变为自治系统

$$\frac{dA_0}{d\tau} = -\mu_{10}A_0 - i\mu_{20}A_0 - iA_n^2 + iF \tag{4.6}$$

$$\frac{dA_n}{d\tau} = -i\mu_{2n}A_n - iA_0A_n^* \tag{4.7}$$

其中 F 是模为 1 的复数 $p + iq$,

$$\mu_{10} = \frac{1}{2}\frac{kR}{8}\omega T_0,\quad \mu_{20} = \Omega\sigma_n T_0,\quad \mu_{2n} = (\Omega - \sigma)\sigma_n T_0 \tag{4.8}$$

把(4.6)和(4.7)式的虚部和实部分开,得

$$\frac{d\alpha_0}{d\tau} = -\mu_{10}\alpha_0 + \mu_{20}\beta_0 + 2\alpha_n\beta_n - q \tag{4.9a}$$

$$\frac{d\beta_0}{d\tau} = -\mu_{20}\alpha_0 - \mu_{10}\beta_0 - (\alpha_n^2 - \beta_n^2) + p \tag{4.9b}$$

$$\frac{d\alpha_n}{d\tau} = \mu_{2n}\beta_n + (\beta_0\alpha_n - \alpha_0\beta_n) \tag{4.9c}$$

$$\frac{d\beta_n}{d\tau} = -\mu_{2n}\alpha_n - \alpha_0\alpha_n - \beta_0\beta_n \tag{4.9d}$$

其中

$$\alpha_0 + i\beta_0 = A_0,\quad \alpha_n + i\beta_n = A_n$$

五、特 解

首先,我们引入能量守恒,

$$\frac{d}{d\tau}(|A_0|^2 + |A_n|^2) = -2\mu_{10}|A_0|^2 + (iFA_0^* + *) \tag{5.1}$$

该式可用来校核数值计算.

第一种特解. 当 $F = \mu_{10} = \mu_{20} = \mu_{2n} = 0$ 时,也就是没有入射声波强迫项,不计辐射阻尼且没有失谐时,(4.6)、(4.7)式变为

$$\frac{dA_0}{d\tau} = -iA_n^2,\quad \frac{dA_n}{d\tau} = -iA_0A_n^* \tag{5.2}$$

若初始条件合适,(5.2)有解

$$A_0 = i\,\mathrm{th}(\tau + \tau_0),\quad A_n = i\,\mathrm{sech}(\tau + \tau_0) \tag{5.3}$$

这就是在非线性光学中著名的所谓二次谐波产生解[8]. 即当频率为 σ_n 的高强度的入射光通过石英晶体时会产生频率为 $2\sigma_n$ 的二次谐波. 若 $\tau_0 = 0$, 则 $\tau = 0$ 时 $|A_0| = 0$, $|A_n| = 1$,而当 $\tau \to \infty$ 时, $|A_0| \to 1$ 而 $|A_n| \to 0$. 这就是说,能量由频率为 σ_n 的变形模式完全转移到频率为 $2\sigma_n = \omega$ 的二次谐波(呼吸模式)上去了,使得原来不存在的二次谐波从一次谐波中吸取能量,逐渐成长而被激发,而原来存在的一次谐波则因被二次谐波抽吸能量而完全消失. 在浅水长波中也有类似的现象[9].

$\mu_{20} = \mu_{2n} = 0(\Omega = \sigma = 0)$ 时,有第二种特解

$$\alpha_0 = c_0\beta_0,\quad \alpha_n = c_n\beta_n \tag{5.4}$$

其中

$$c_0 = -q/p, \quad c_n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + c_0^2}}{c_0} = \frac{1}{q}(p \mp \sqrt{p^2 + q^2}) \tag{5.5}$$

若 $q = 0$,则 $c_0 = 0$, $c_n = 0$ 或 $c_n = \infty$,对应的解为

$$\alpha_0 = 0 \qquad \alpha_n = 0 \quad 或 \quad \beta_n = 0.$$

若 $p = 0$,则 $c_0 = \infty$, $c_n = \pm 1$,对应的解为

$$\beta_0 = 0 \quad \alpha_n = \pm \beta_n$$

第二种特解在相平面上的轨迹都是直线,随着时间的变化,在相平面上沿直线来回振动。

这二种特解的存在都已为数值计算证实。

六、平衡点及其稳定性

方程组(4.6)、(4.7)有二个平衡点。

第一个平衡点为

$$\bar{\alpha}_n = \bar{\beta}_n = 0$$

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{-\mu_{10}q + \mu_{20}p}{\mu_{10}^2 + \mu_{20}^2} \qquad \bar{\beta}_0 = \frac{\mu_{20}q + \mu_{10}p}{\mu_{10}^2 + \mu_{20}^2}$$

物理上,这是强迫力和呼吸模式的辐射阻尼之间的平衡,而变形模式不出现. 该平衡点的线性稳定性研究可知: 呼吸模式是稳定的,而变形模式的稳定性由下式决定

$$(\mu_{10}^2 + \mu_{20}^2)\mu_{2n}^2 \begin{matrix} > 1 & 稳定 \\ < 1 & 不稳定 \end{matrix} \tag{6.1}$$

这意味着,当 $\Omega \approx \sigma$ 时,即强迫力的失谐与变形模式的失谐相当接近时,变形模式总是不稳定的,它可以从呼吸模式吸取能量而成长.

第二个平衡点可用下法求得. 令

$$A_0 = |A_0| e^{i\theta_0}, \quad A_n = |A_n| e^{i\theta_n}, \quad F = e^{i\vartheta_F} \tag{6.2}$$

方程组(4.6)、(4.7)化为

$$\frac{d|A_0|}{d\tau} = -\mu_{10}|A_0| + |A_n|^2 \sin(2\vartheta_n - \vartheta_0) - \sin(\theta_F - \theta_0) \tag{6.3a}$$

$$|A_0|\frac{d\theta_0}{d\tau} = -\mu_{20}|A_0| - |A_n|^2 \cos(2\theta_n - \theta_0) + \cos(\vartheta_F - \theta_0) \tag{6.3b}$$

$$\frac{d|A_n|}{d\tau} = -|A_0||A_n| \sin(2\theta_n - \theta_0) \tag{6.3c}$$

$$|A_n|\frac{d\vartheta_n}{d\tau} = -\mu_{2n}|A_n| - |A_0||A_n| \cos(2\theta_n - \theta_0) \tag{6.3d}$$

平衡点由下式决定

$$|A_0| = (-1)^{n-1}\mu_{2n} \tag{6.4a}$$

$$|A_n| = \{\mu_{20}\mu_{2n} + (1 - \mu_{10}^2\mu_{2n}^2)^{1/2}\}^{1/2} \tag{6.4b}$$

$$\sin(\theta_F - \theta_0) = (-1)^n \mu_{2n}\mu_{10}, \qquad \cos(\theta_F - \theta_0) = \frac{1}{|A_0|}(\mu_{20}|A_0|^2 - \mu_{2n}|A_n|^2) \tag{6.4c}$$

$$\sin(2\theta_n - \theta_F) = -\mu_{10}\mu_{2n}, \quad \cos(2\theta_n - \theta_F) = \sqrt{1 - \mu_{10}^2\mu_{2n}^2} \tag{6.4d}$$

对于 $\mu_{2n} = 0$、即 $\Omega = \sigma$ 的情况,第二个平衡点为

$$\bar{\alpha}_0 = \bar{\beta}_0 = 0 \tag{6.5a}$$

$$|A_n| = 1, \quad \bar{\alpha}_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+p} \quad \bar{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-p} \tag{6.5b}$$

这意味着强迫力与变形模式频率相同时,呼吸模式最终会消失,而变形模式与强迫力之间则维持平衡.

第二个平衡点的线性稳定性分析导致下列特征问题

$$J_4\lambda^4 + J_3\lambda^3 + J_2\lambda^2 + J_1\lambda + J_0 = 0 \tag{6.6}$$

其中

$$J_0 = 4(\bar{\alpha}_n^2 + \bar{\beta}_n^2)r$$
$$J_1 = 4\mu_{10}(\bar{\alpha}_n^2 + \bar{\beta}_n^2)$$
$$J_2 = 4(\bar{\alpha}_n^2 + \bar{\beta}_n^2) + \mu_{10}^2 + \mu_{20}^2$$
$$J_3 = 2\mu_{10}$$
$$J_4 = 1$$
$$r = \sqrt{1 - \mu_{10}^2\mu_{2n}^2}$$

(6.6)式有实数部分小于零的根的充要条件是[10]

$$J_0 > 0, \ J_1 > 0, \ J_3J_4 > 0 \tag{6.7}$$

$$J_1(J_2J_3 - J_1J_4) - J_0J_3^2 > 0 \tag{6.8}$$

(6.7)式永远满足. 条件(6.8)限制了参数的范围. 固定 R 和 n,通过计算可以找出不稳定的范围 $\Omega_- < \Omega < \Omega_+$. 数值计算发现,这将导致 Hopf 分叉而进入浑沌状态. 有关数值计算方面的情况,我们准备另文发表.

七、结 论

我们用渐近匹配方法导出了气泡振动的呼吸模式和变形模式之间共振相互作用的基本方程(4.6)和(4.7),指出了二次谐波产生特解,讨论了稳定性,得到了如下结论:

1) 从匹配中知道,与变形模式频率相同的远场压力扰动在精确到 $O(\varepsilon^2)$ 项,对共振相互作用没有影响,而变形模式要参与相互作用,其初值不能为零.

2) 二次谐波产生特解说明: 在没有外部强迫力、没有辐射阻尼、没有失谐时,初值为零的呼吸模式可以被变形模式激励,而从无到有,把变形模式的能量全部吸收过来并取而代之.

3) 呼吸模式的辐射阻尼和外部强迫项处于平衡态附近,且强迫力的失谐与变形模式的失谐相接近时,呼吸模式是稳定的,初值小的变形模式总是不稳定的, 它可以从呼吸模式中吸收能量而成长.

4) 在第二个平衡点附近,外部激励的失谐满足 $\Omega_- < \Omega < \Omega_+$ 时,两种模式都不稳定,数值计算指出将导致 Hopf 分叉而进入浑沌状态.

参 考 文 献

[1] Minnaert M. On musical air-bubbles and the sounds of running water. Phil. Mag. 1933, 16: 235—248.

[2] Nottingk BE & Neppiras EA. Cavitation produced by ultrasonics. Proc. Phys. Soc. Lond. B, 1950, 63: 647—685.

[3] Plesset MS & Prosperetti A. Bubble dynamics and cavitation. Ann. *Rev. Fluid Mech.*, 1977, 9: 145—185.

[4] Longuet-Higgins MS. Monopole emission of sound by asymmetric bubble oscillations, Part 1. Normal modes, Part 2. An initial-value problem. *J. Fluid Mech.*, 1989, 201: 525—541, 543—565

[5] Toba Y. Drop production by bursting of air bubbles on the sea surface (3): Study by use of a wind flume. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto A, 1961, 29: 313—343

[6] Prosperetti A. Thermal effects and damping mechanisms in the forced radial oscillations of gas bubbles in liquids. *J. Acoust Soc. Amer*, 1977, 61(1): 17—27

[7] Brekhovskikh L & Lysanov Y. Fundamentals of Ocean Acoustics. Springer-Verlag, 1982

[8] Armstrong J A et al. Interactions between light waves in a nonlinear dielectric, *Phys. Rev*, 1962, 127: 1918—1939

[9] Mei CC. & Ünlüata Ü. Harmonic generation in shallow water waves. In: Meyer RE, ed. Waves on Beaches. New York: Academic, 1972, 181—202

[10] Sethna PR. Vibrations of dynamical systems with quadratic nonlinearities. Trans ASME *J. Applied Mech*, 1965, 32: 576—582

[11] Miles J. Resonantly forced motion of two quadratically coupled oscillators. Physica (D), 1984, 13: 247—260

[12] Gu XM & Sethna PR. Resonant surface waves and chaotic phenomena. *J Fluid Mech*, 1987, 183: 543—565

NONLINEAR MODEL COUPLING OF BUBBLE OSCILLATIONS

Zhou Xianchu

(Institute of Mechanics, Academia Sinica Beijing, 100080)

Mei C. C.

(Civil Engineering Department, MIT, U. S. A.)

Abstract We extend a second order theory of Longuer-Higgins on the excitation of isotropic bubble oscillations by an anisotropic mode. Our attention is focused on the resonant interaction where the energy exchange between two modes is strong enough so that both can attain comparable amplitudes. We show that the modecoupling equations resemble those known in other physics. Two special solutions are discussed. The fixed points and their stabilities are considered.

Key words bubble oscillation, sound scattering wy bubble, nonlinear oscillation resonance between two modes