第 24 卷 第 3 期
1992 年 5 月

力 学 学 报
ACTA MECHANICA SINICA

Vol. 24, No. 3
May, 1992

小 Kc 数振荡流中圆柱绕流流场结构的数值分析*

何福森　林同骥　张蝶丽
(中国科学院力学研究所，北京 100080)

提要　本文综合 Chorin 的涡方法、网格涡方法和泊松方程快速解法的优点，采用固定离散涡的数目和位置，随时间变化调整离散涡强度的计算方法，对 Kc 数在 1 到 5 之间，β 数在 10 到 1665 之间圆柱在振荡流动中的流场结构进行了数值模拟．并与U型振荡水槽中的流场涡结构显示照片比较，计算结果表明，数值解在稳定性和收敛性方面都是比较好的．与显示照片相比，其符合程度也是令人满意的．

关键词　振荡流动，圆柱绕流流场结构，离散涡方法

一、引　言

均值为零的简谐振荡流绕圆柱流动的研究是流体力学中的基本问题，也是研究海洋工程中波浪力的基础．与单向均匀流相比，振荡绕流更加复杂，流动现象更加丰富，无论在学科内容还是工程应用上都具有重要意义．

目前，对圆柱在振荡流动中绕流研究以实验为主[1~4]，数值模拟尚在初期阶段，文献[5]采用随机涡结合网格涡方法求解简谐振荡流动中圆柱绕流，流场结构为模糊的涡云图案．文献[6]采用高阶精度差分方法计算圆柱振荡绕流，得到初期流场结构．现有结果缺乏与实验的比较，而且计算量大．

小振幅振荡流中柱体表面旋涡的产生、运动以及相互作用是研究振荡绕流的基础，也是正确分析柱体受力的基础．尽管近几年这类问题的研究受到很大重视，但由于对流场结构重视不够，对小振幅振荡绕流流场仍缺乏研究，数值分析工作尚未见到．本文以小振幅振荡流中圆柱绕流流场结构为研究对象，在文献[5]的基础上，综合 Chorin 涡方法[7]及网格涡方法的优点，采用固定流场中离散涡数目和位置，随时间变化调整离散涡强度计算方法，对速度场在 Euler 网格上求解，涡量场采用点涡运动的 Lagrange-Euler 混合观点求解．通过数值模拟 $1\leqslant Kc\leqslant 5$，$10\leqslant\beta\leqslant 1665$ 圆柱在振荡流动中流场结构，揭示了流场中旋涡产生和演化规律，并与U型振荡水槽中流动显示实验结果进行了比较．

本方法适用于计算长时间．多周期问题．

本文于 1990 年 12 月 18 日收到，1991 年 4 月 8 日收到修改稿．
* 国家自然科学基金资助项目．

二、基本方程和边界条件

考虑不可压缩流体振荡流绕圆柱流动，设来流速度为 U_∞，以向右流动为正，且有：

$$U_\infty = U_m \cos \frac{2\pi}{T} t \tag{1}$$

基本方程采用无量纲形式的涡量 ζ-流函数 ψ 为变量的涡量输运方程和不可压连续方程：

$$\frac{1}{2Kc}\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \{[\nabla \times (\psi \boldsymbol{k})] \cdot \nabla\}\zeta = \frac{2}{\mathrm{Re}}\nabla^2\zeta \tag{2}$$

$$\nabla^2\psi = -\zeta \tag{3}$$

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{4}$$

其中

$$Kc = \frac{U_m T}{2a}, \quad \beta = \frac{4a^2}{\nu T}, \quad \mathrm{Re} = \frac{2U_m a}{\nu} \tag{5}$$

这里 U_m 为流体来流最大速度，T 为流体振荡周期，a 为圆柱半径，t 为无量纲时间变量。

相应的定解条件为：

初始条件，$t \leqslant 0$，$\psi = 0$，$\zeta = 0$　　(6)

壁面条件，$t > 0$，$r = 1$，$\psi = 0$，$\zeta = \zeta_b$　　(7a)

远场条件，$t > 0, r = r_\infty$，$\psi = \left(r_\infty - \frac{1}{r_\infty}\right)\sin\theta\cos 2\pi t$，$\zeta = 0$.　　(7b)

其中 ζ_b 表示壁面上的涡量值。

三、数 值 方 法

对小 Kc 数振荡流动，粘性影响集中在圆柱壁面附近，离散涡方法是求解该问题的有效方法。将连续涡量场以一组 N 个离散涡近似：

$$\zeta(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} \zeta_i \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i) \tag{8}$$

这里 $\zeta_i, \boldsymbol{r}_i$ 分别为第 i 个点涡的涡量和位置，$\delta(\boldsymbol{r})$ 为 Dirac 函数。涡量场随时间步 Δt 的发展通过下述方法模拟。

(i) 流函数满足的 Poisson 方程在 Euler 网格上求解，并求网格点上速度分布。

(ii) 点涡以当地速度运动，并用面积加权平均方法将运动后离开网格的点涡转化为网格角点上的点涡。

(iii) 涡量粘性扩散效应采用差分方法求解。

(iv) 在壁面上布新涡层以满足壁面无滑移条件。具体求解细节如下。

1. Poisson 方程求解

对 Poisson 方程(3)，采用快速解法[8]，由于要求计算域为矩形域，引入变换。

$$\rho = \ln r \tag{9}$$

将方程(3)变换为:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -e^{2\rho}\zeta \tag{10}$$

其中 ζ 为坐标 (r, θ) 下的涡量. 如果流场中涡量分布已知, 加上适当的流函数边界条件,可从方程(10)的五点差分方程中求得流函数 ψ 的分布. 流场中网格点涡量分布,采用面积加权平均得到. 网格内离散点涡将其涡量 ζ_i 分配到网格的四个角点上. 见图 1.

$$\zeta_k = \frac{\zeta_i A_k}{A}, \quad k = 1, 2, 3, 4 \tag{11}$$

式中 A 为网格面积.

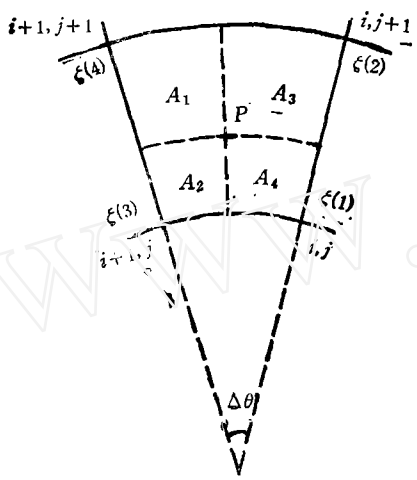


图 1 网格中涡量分配的面积加权算法

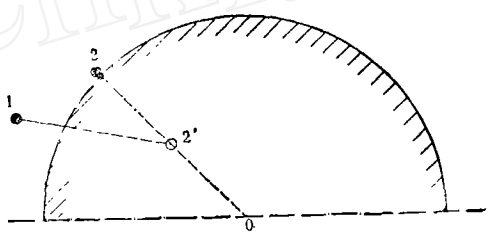


图 2 穿壁涡的处理

2. 涡的扩散与对流

方程(2)求解采用时间分裂算法.

$$\left.\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right|_1 = -\{[\nabla \times (\psi \boldsymbol{k}) \cdot \nabla]\}\zeta \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right|_2 = \frac{4Kc}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \zeta \tag{13}$$

其中,

$$\frac{1}{2Kc}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left.\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right|_1 + \frac{1}{2Kc}\left.\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right|_2 \tag{14}$$

方程(12)表明,涡量沿流线不随时间变化.

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i, \quad \frac{dy_i}{dt} = v_i \tag{15}$$

其中 u_i, v_i 是第 i 个点涡在 Cartensian 坐标下的速度分量.

由此得二阶精度的点涡对流位移:

$$\boldsymbol{r}_i(t+\Delta t)=\boldsymbol{r}_i(t)+\frac{\Delta t}{2}[3\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}_i,t)-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}_i,t-\Delta t)] \tag{16}$$

对穿越固壁的点涡，令其沿壁面滑动到相应的位置，见图 2。

方程(13)采用预测-校正差分格式求解。

综合(12)、(13)式的解，即得 $t+\Delta t$ 时刻涡的对流和扩散。

3. 壁面条件的满足

方程(2)、(3)式的求解仅满足壁面法向边界条件，在壁面上切向速度不为零，这意味着在壁面上有涡层存在。如果把壁面上涡层离散为若干微元段，可得边界上涡强分布[5]，见图 3。

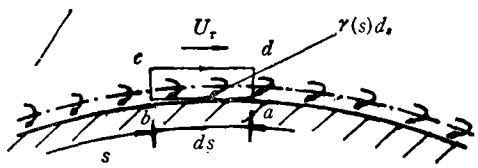


图 3　固体壁面的涡层分布

$$\mathrm{K}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b} \tag{17}$$

其中K称为影响矩阵，仅由物面几何形状决定。$\boldsymbol{r}$ 为壁面上涡量强度，$\boldsymbol{b}$ 为来流和流场中已存在的离散涡在壁面上产生的切向速度矢量。

Smith, P. A. 和 Stansby, P. K.[9] 指出，涡量输运方程(2)的时间分裂解法的收敛性正比于 $\mathrm{Re}^{-1}\Delta t$，在本问题中，取 $\Delta t\leqslant 0.02$，可以保证解是收敛的。

四、算例与讨论

我们对小 Kc 数简谐振荡来流绕圆柱流动流场进行了计算，引入对称条件，计算圆柱上半平面流场，网格选取如表 1 所示，时间步长取 0.001，来流速度向右为正。取图 4 所示时刻流场来阐述振荡绕流的复杂流场结构。

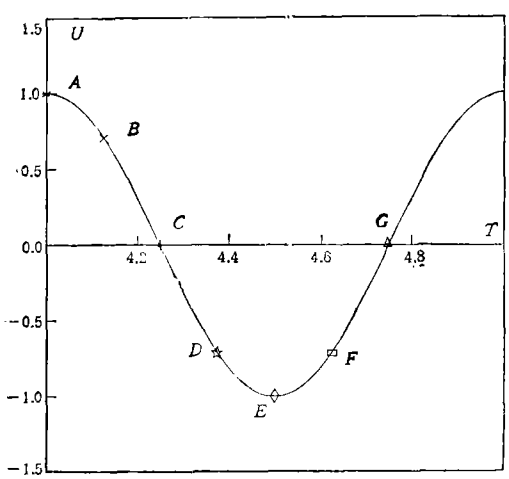


图 4　来流速度随时间变化曲线

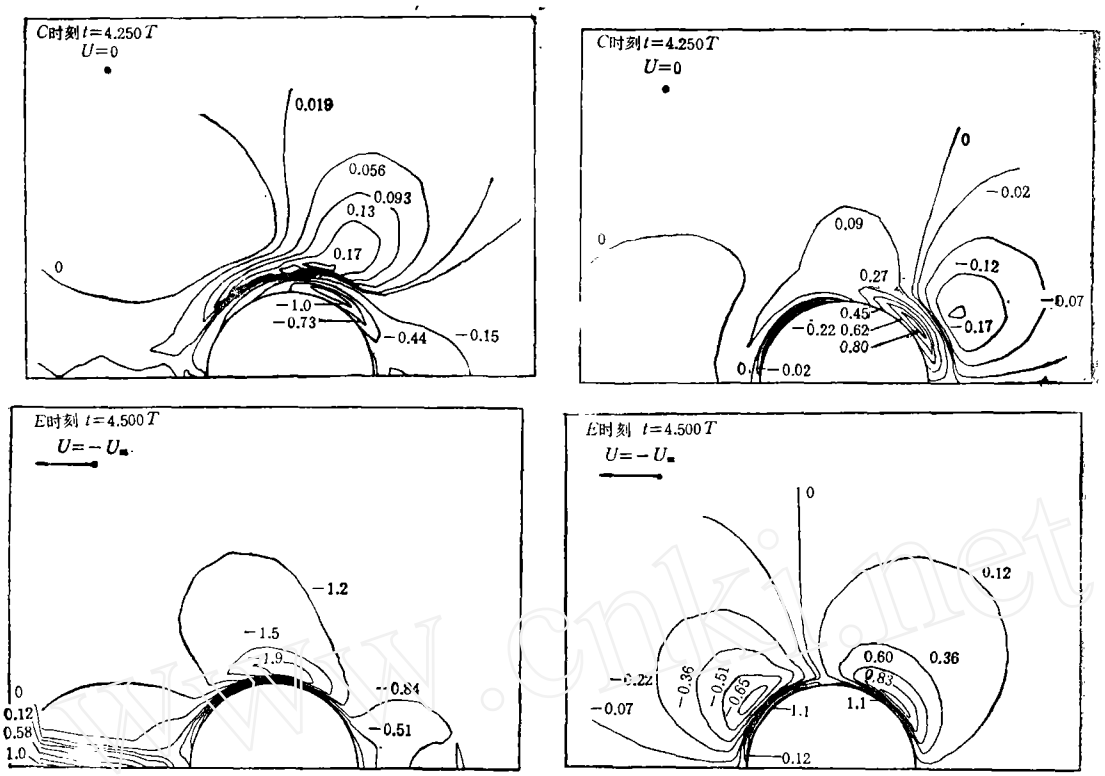
1. $Kc=2,\beta=100$

流向速度及横向速度等值线图见图 5。流体由于往复运动，速度场十分复杂。在柱体壁面有较大的横向速度，对流动分离、附面涡形成和运动有较大影响。

表 1　网格及计算边界选取

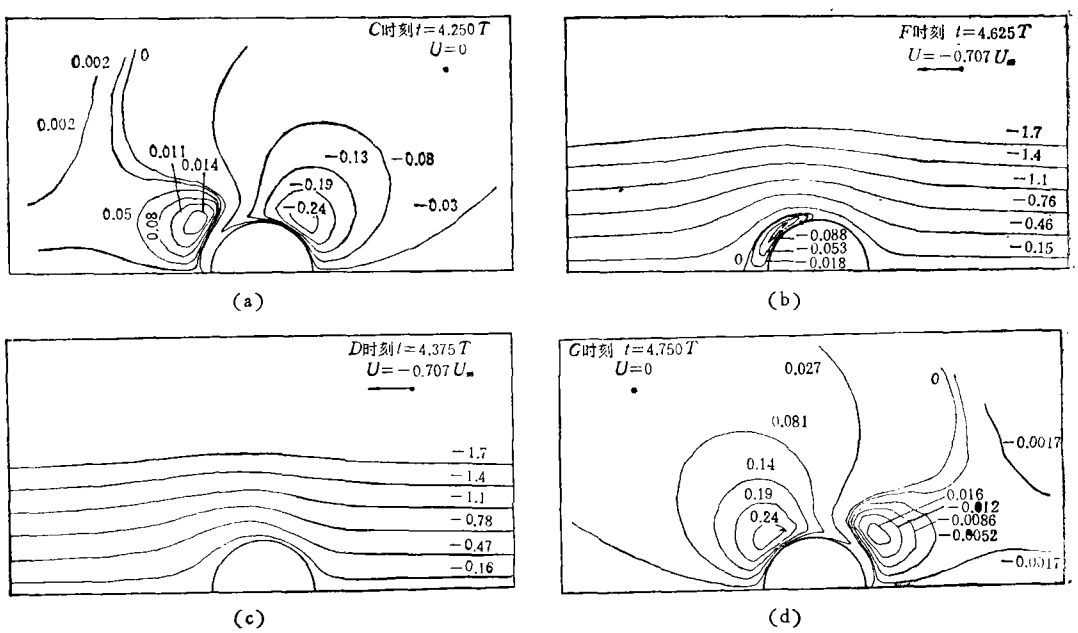
	网格点(周向×径向)	径向外边界
细网格	65×49	5a
粗网格	33×33	25a

流谱见图 6。在时刻 C 流体来流速度为零，在柱体两侧出现旋转方向相反的旋涡。在流动加速过程，圆柱右侧的旋涡逐渐被拉开，并将左侧的旋涡压扁，使其接近圆柱壁面。C 到 D 是旋涡对消的过程，流谱逐渐接近于无粘流。D 到 F 表明，流场中存在的大涡基本对消后，由于粘性效应，在流动下游又形成新的旋涡。流体减速运动时，旋涡紧贴壁面向



(a) 流向速度等值线 (b) 横向速度等值线

图 5



(a) (b)

(c) (d)

图 6 流谱图

上游移动。到 G 时刻，流体来流速度又减为零，圆柱两侧又出现旋转方向相反的旋涡。

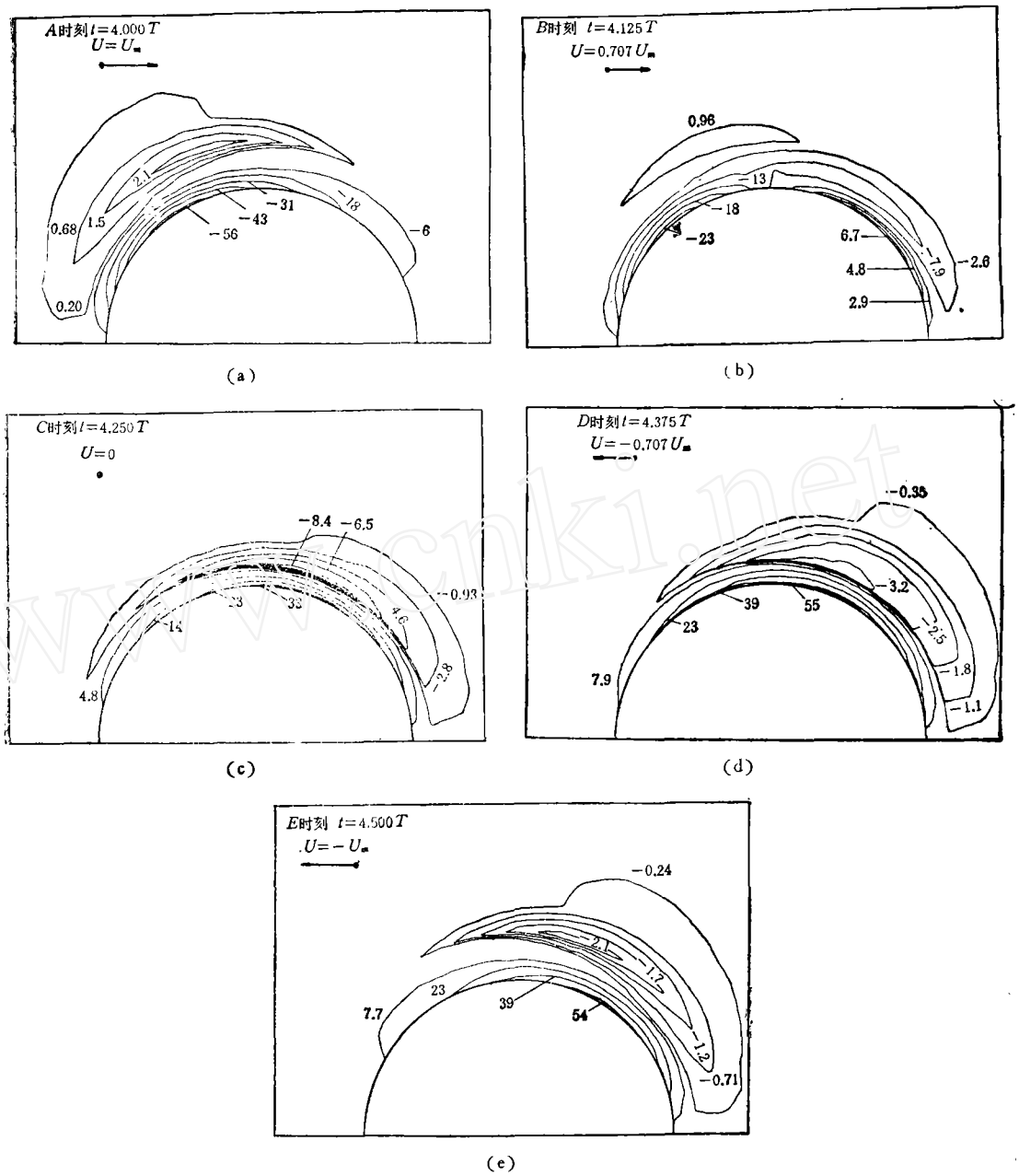


图 7　涡量等值分布

图 7 为涡量等值分布．在时刻 A，流体向右运动，来流速度达到最大值，上周期反向流动产生的正涡量层向柱体表面运动．在时刻 B，流体减速向右流动，新生负涡层变厚并与正涡量层相互抵消．在柱体靠流动下游一侧由于减速，又有正涡量层生成．在时刻 C，流体来流速度为零，新生正涡层将负涡层全部排挤出圆柱壁面．从 C 到 E，流体加速流动，负涡层在流体带动下向柱体运动，由于正、负涡的相互诱导，正、负涡层在随流体运动的同时，还要相互绕其惯性中心缓慢旋转，负涡层在运动过程中逐渐向上抬起，很象皮球打在

障碍物上被"弹回"的现象，这与文献[10]中入射涡向圆柱运动被弹回现象类似。定义正、负涡的涡心如下：

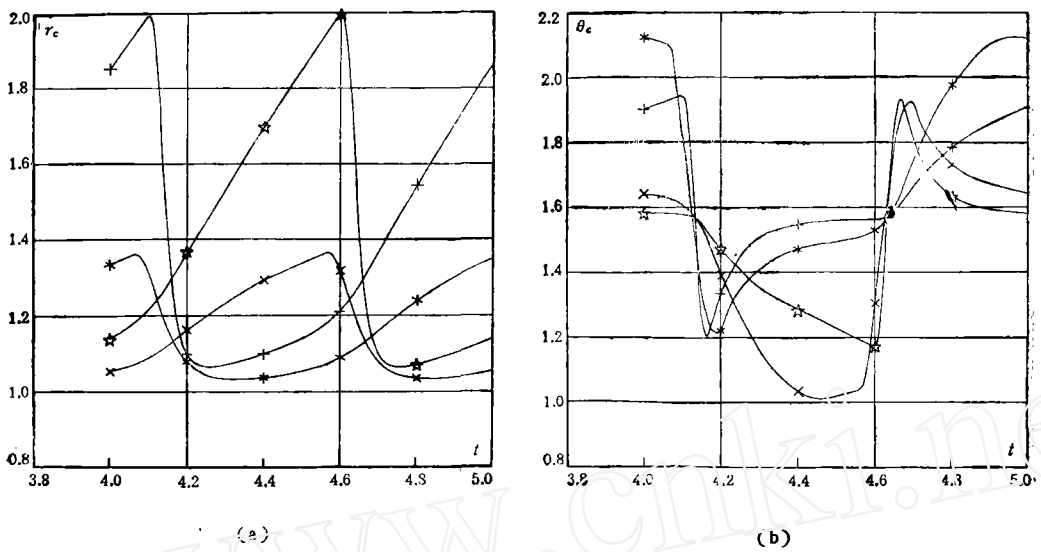


图 8 一周期内正、负涡心轨迹变化曲线

(* $Kc=2$, $\beta=100$ 正涡涡心；× $Kc=2$, $\beta=100$ 负涡涡心；+ $Kc=5$, $\beta=10$ 正涡涡心；☆ $Kc=5$, $\beta=10$ 负涡涡心)

$$r_{cp}=\frac{\sum r_{ip}\zeta_{ip}}{\sum\zeta_{ip}},\quad r_{cn}=\frac{\sum r_{in}\zeta_{in}}{\sum\zeta_{in}} \tag{18}$$

这里下标 cp 表示正涡层涡心，cn 表示负涡层涡心，$r_i=(r_c,\theta_c)$ 为极坐标系下位置矢量。一周期内正、负涡心变化见图 8。可知正、负涡量区涡心在流场中有限区域内往复运动，对 $Kc=2$, $\beta=100$ 其运动区域为：$1.03a<r_{cp}<1.364a$, $1.21<\theta_{cp}<2.13$; $1.03a<r_{cn}<1.368a$, $1.007<\theta_{cn}<1.925$。另外，比较图 7(a)和图 7(e)，可知涡量随时间增长不断地向外扩散。

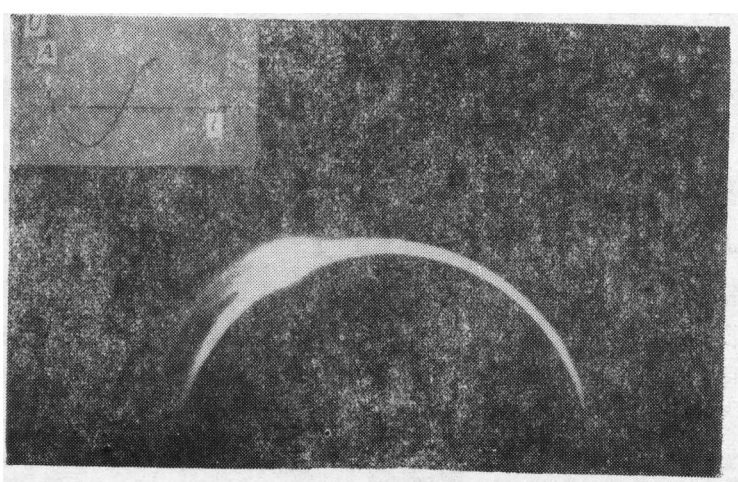


图 9 流场显示涡层分布，对应图 7 中 Δ 时刻 ($Kc=1.05$, $\beta=344$)

对计算所得流场特征，通过实验定性检验，见图 9. 与图 7(a)相比，其形状符合程度是令人满意的. 图 10 为涡量沿圆柱壁面的分布，可知并不是任何时刻圆柱表面都存在 $\zeta=0$ 的点，表明在振荡流动中，圆柱绕流的分离点随时间的变化而不断地变化，在一周期内既有流动分离，如图 6(c)，又有流动再附，如图 6(d).

2. $Kc=5$, $\beta=10$

从总的情况看，整个流场结构与上节所述基本类似. 但由于流动速度很低，涡的回弹现象不明显，附体涡层运动的最主要特征是涡层沿柱体表面往复运动. 比较图 8 中两种参数的涡心轨迹，粘性扩散效应强于 $Kc=2, \beta=100$ 情况.

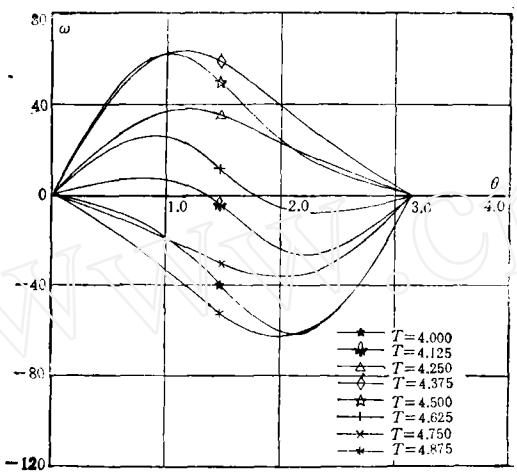


图 10　涡量沿圆柱壁面分布

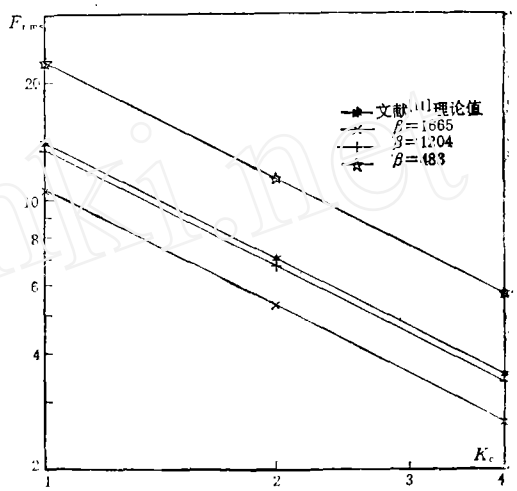


图 11　阻力系数均方根值与 Kc 数的关系

在 $Kc\leqslant 5$ 的振荡流动中，圆柱受力仅为流向阻力，其阻力系数均方根值 F_{rms} 如图 11 所示，与 Bearman 等[11]的理论值比较，F_{rms} 在小 β 数时高于理论值，在大 β 数时低于理论值，表明本方法在圆柱壁面附近对涡量采用面积加权平均再离散时，新的涡量场与真实涡量场有差别，从而使阻力均方根值与理论值有偏差. 但本方法可很好地描述流场特征，对振荡流动中圆柱受力的计算，本方法有待进一步改进.

五、结　　论

1. 本文所采用的定点离散涡方法是网格涡方法的改进，适用于计算长时间多周期问题和复杂流场，计算结果也是满意的.

2. 在小 Kc 数和低 β 数范围内，涡量主要集中在圆柱附近. 圆柱表面的附体涡层沿柱面在一定区域往复运动，并且正、负涡层成对出现. 新生涡层与流动前半周期产生的符号相反的涡层存在混合和对消过程，反映在流谱上是圆柱表面交替出现流动分离和再附现象. 这是小 Kc 数和低 β 数范围内基本流动特征.

3. 实验检验了数值计算的有效性.

4. 本方法可在微机上实现.

参 考 文 献

[1] Sarpkaya T. *J. F.M.* 1986, **165** 61—71
[2] Honji H. *J.F.M.* 1981, **107** 509—520
[3] Williamson C H K. *J.F.M.* 1985, **155** 141—174
[4] Tatsuno M & Bearman PW. *J.F.M.* 1990, **211** 157—182
[5] Stansby PK & Dixon AG. *Applied Ocean Res.* 1983, 5 167
[6] Nobuhiro B. etc. *J. Comput. Phys.* 1987, **69** 362—396
[7] Chorin AJ. *J.F.M.* 1973, **57** 785—796
[8] Hockney R W. Rapid elliptic solver, in Numerical Methods in Applied Fluid Dynamics. ed· Hunt. B. 1980
[9] Smith P A & Stansby P K. *J.F.M.* 1988, **194** 45—77
[10] Yamada H. etc. *J. Flow Visual. Soc. Japan* 1988, **7** 223—231
[11] Bearman P W. etc. *J.F.M.* 1985, **154** 337—356

NUMERICAL ANALYSIS OF FLOW STRUCTURE AROUND A CIRCULAR CYLINDER IN OSCILLATORY FLOW AT LOW *Kc* NUMBERS

He Fusen T. C. Lin Zhang Dieli
(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences)

Abstract This paper presents an improved algorithm which combines the advantages of Chorin's vortex method, Vortex-in-Cell method and rapid elliptic algorithm. In the present method, the numbers and positions of the discrete vortices are fixed on meshes, and the vorticities of the discrete vortices are adjusted with the time advances. Numerical simulations of flow structure around a circular cylinder in oscillatory flow, ranging in *Kc* from 1 to 5 and β from 10 to 1665, are presented in the paper. The comparison of the numerical results to the pictures of flow visualization is also made in order to test and verify the calculation results. The numerical solutions are good in stability and convergence, and the comparison is satisfactory.

Key words oscillatory flow, flow structure around a circular cylinder, discrete vortex method.