第9卷 第2期 复合材料学报 Vol.9 No.2
1992年 4月 ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA April 1992

复合材料蠕变本构关系及实验测定

Ⅰ. 本构关系

向小运 张双寅

中国科学院力学研究所 (北京100080)

摘要：蠕变是复合材料最重要的力学性能之一，实验表明：复合材料在蠕变条件下的变形可以分为弹性变形、粘弹性变形和粘塑性变形。应用不可逆过程的热力学和广义变量的概念可以分析材料的蠕变变形。本文首先回顾了热力学的基本方程；基于Schapery本构关系的假设和思路推导了蠕变本构关系的一般形式，其中包括弹性变形、粘弹性变形和粘塑性变形；考虑到广义力选取的不唯一性，本文提出了广义力选取的原则以使得到的本构关系尽可能地简单；由此本文给出了复合材料的一维蠕变、各向同性复合材料的二维蠕变和纤维增强复合材料平面内的蠕变的本构关系。

关键词：热力学，广义变量，复合材料蠕变，本构关系

一、引 言

目前，复合材料蠕变研究仅局限在一维问题上：在微观方面，De Silva[1]提出纤维增强复合材料的蠕变机理，进而Lichot[2]与McLean[3]从微观上推导了蠕变本构关系；在宏观方面，Findley[4]等人根据实验数据拟合了蠕变的经验公式，但是，在蠕变条件下材料内部将会出现损伤（孔洞、微裂纹），在分析微裂纹的演化、连结、以及宏观裂纹的扩展，要考虑周围复杂应力的作用，需要有多维的蠕变本构关系；此外，复合材料内部结构复杂，要完整地描述其蠕变变形，必须在理论上区别粘弹性变形和粘塑性变形。

二、基 本 方 程

将所考虑的材料看作是一个热力学系统，该系统具有N个状态变量，其中有K个显含变量q_m，有N-K个隐含变量q_r，定义其对应的广义力为Q_m和Q_r，约定求和范围为：

$$m、n=1,2,\cdots\cdots,k;\ r、s=k+1,k+2,\cdots\cdots,N \tag{2-1}$$

$$i,j=1,2,\cdots\cdots,N$$

由热力学分析（本文不考虑温度）[6][7][8][9]：

本文1990年2月收到

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$q_m=-\frac{\partial G}{\partial Q_m} \tag{2-2A}$$

$$\frac{\partial G}{\partial q_r}+a_D b_{rs}\frac{dq_s}{dt}=0 \tag{2-2B}$$

$$G=G(Q_m,\ q_r)=F-Q_m q_m \tag{2-3}$$

$$a_D=\begin{cases} a_D(Q_m) & Q_m>Q_m^* \\ 1 & Q_m\leqslant Q_m^* \end{cases} \tag{2-4}$$

其中：G为Gibbs自由能，F为Helmholtz自由能，Q_m^*是材料的线性范围的最大值，a_D体现材料变形的非线性，brs为常数，由热力学的熵增原理[7]方程中的brs为半正定阵；在平衡状态F取极小值或向平衡状态趋近时，F趋于极小值。

三、本构关系的一般形式

在线性条件下$Q_m\leqslant Q_m^*$，Gibbs自由能G*代入到（2-2）中要求q_m与Q_m呈线性关系，因此G*的中展开式中最高只能有二次项，即：

$$G^*=G_0+C_mQ_m+C_rq_r+\frac{1}{2}d_{mn}Q_mQ_n+d_{mr}Q_mq_r+\frac{1}{2}d_{rs}q_rq_s \tag{3-1}$$

式中C_m、C_r、d_{mn}、d_{mr}、d_{rs}均为常数，选取坐标系使$Q_m=0$时，$q_r=q_m=\dot{q}_r=\dot{q}_m=0$，则必有：

$$C_m=C_r=0 \tag{3-2}$$

将（3-1）、（3-2）代入列（2-2），并取$a_D=1$：

$$q_m=-d_{mn}Q_n-d_{mr}q_r \tag{3-3A}$$

$$d_{mr}Q_m+d_{rs}q_s+b_{rs}\frac{dq_s}{dt}=0 \tag{3-3B}$$

当$Q_m>Q_m^*$时，材料具有非线性，自由能G中含有Q_m和q_r的高阶项。将G延拓到$Q_m=0$，并展开在$Q_m=0$处的泰勒级数（具有无穷项）；代入到（2-2）中，其中q_r为微观量，忽略其二阶及更高阶项的影响。于是得到。

$$q_m=-d_{mn}Q_n-\frac{1}{2}e_{mnm_1}Q_nQ_{m_1}-\frac{1}{6}f_{mnm_1n_1}Q_nQ_{m_1}Q_{n_1}-\cdots\cdots$$

$$-(d_{mr}+e_{mn_r}Q_n+\frac{1}{2}f_{mnm_1r}Q_nQ_{m_1}+\cdots\cdots)q_r \tag{3-4}$$

其中d、e、f均为常数，选取另一组常数使：

$$e_{mnm_1}=d_{mn}e_{m_1}^{(mn)}\qquad e_{mn_r}=d_{mr}e_n^{(mr)} \tag{3-5}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$f_{mnm_1n_1}=d_{mn}f_{m_1n_1}^{(mn)} \qquad f_{mnm_1r}=d_{mr}f_{m_1n}^{(mr)}$$

代入（3-4）中得到：

$$q_m=-d_{mn}Q_n\left(1+\frac{1}{2}e_{m_1}^{(mn)}Q_{m_1}+\frac{1}{6}f_{m_1n_1}^{(mn)}Q_{m_1}Q_{n_1}+\cdots\cdots\right)$$

$$-d_{mr}q_r\left(1+e_{n_1}^{(mr)}Q_{n_1}+\frac{1}{2}f_{nm_1}^{(mr)}Q_nQ_{m_1}+\cdots\cdots\right) \tag{3-6}$$

括号里的量为标量函数，不妨分别设为$g_0^{(mn)}(Q_n)$ 和$g_1^{(mr)}(Q_m)$，则有：

$$q_m=-d_{mn}g_0^{(mn)}Q_n-d_{mr}g_1^{(mr)}q_r \tag{3-7A}$$

同样处理（2-2B）得到：

$$d_{mr}g_2^{(mr)}Q_m+a_G^{(rs)}d_{rs}q_s+a_Db_{rs}\frac{dq_s}{dt}=0 \tag{3-7B}$$

不难看出：（3-3）和（3-7）的方程是一致的，只要定义$Q_m\leqslant Q_m^*$时，$g_0^{(mn)}$、$g_1^{(mr)}$、$g_2^{(mr)}$、$a_G^{(rs)}$、a_D的值为 1，因此只需求解（3-7）。

将（3-1）、（3-2）、（3-3A）代入式（2-3）得到：

$$F=G_0-\frac{1}{2}d_{mn}Q_mQ_n+\frac{1}{2}d_{rs}q_rq_s$$

要使F取得极小值，则d_{mn}必为半负定阵，d_{rs}为半正定阵，此外b_{rs}为半正定阵，为求解方便，（3-7）改写为：

$$q_m=d_{mn}g_0^{(mn)}Q_n-d_{mr}g_1^{(mr)}q_r \tag{3-8A}$$

$$a_G^{(rs)}d_{rs}q_s+a_Db_{rs}\frac{dq_s}{dt}=-d_{mr}g_2^{(mr)}Q_n \tag{3-8B}$$

其中：d_{mn}、d_{rs}、b_{rs}均为半正定阵。

假设q_r建立在主坐标上，则d_{rs}、b_{rs}为对角阵，记作d_r、b_r，方程（3-8B）中各个方程不耦合，第r个方程为（对r不求和）：

$$d_ra_G^{(r)}q_r+b_ra_D\frac{dq_r}{dt}=-d_{mr}g_2^{(mr)}Q_m \tag{3-9}$$

假设$a_G^{(r)}$与r无关[9]，两边同除以$a_G^{(r)}$，并将时间t折合为ψ。

$$d\psi=\frac{dt}{a_6}、a_6=\frac{a_D}{a_G^{(r)}} \tag{3-10}$$

则（3-9）简化为：

$$d_rq_r+b_r\frac{dq_r}{d\psi}=-d_{mr}\frac{g_2^{(mr)}Q_m}{a_G^{(r)}} \tag{3-11}$$

根据d_{rs}、b_{rs}半正定性，有$d_r\geqslant 0$、$b_r\geqslant 0$

I）$d_r>0$、$b_r>0$：

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

解特征方程(3-11)，得到：

$$q_r=(e^{-\psi/\tau_r}-1)\frac{d_{mr}g_2^{(mr)}Q_m}{d_r a_G^{(r)}} \qquad \tau_r=b_r/d_r \tag{3-12}$$

Ⅱ) $d_r=0$，$b_r>0$：对于恒定载荷，由（3-9）积分得到：

$$q_r=-\frac{d_{mr}g_2^{(mr)}Q_m}{a_D b_r}t \tag{3-13}$$

Ⅲ) $d_r>0$，$b_r=0$

代入到（2-2）得到：$\frac{\partial G}{\partial q_r}=0$ (3-14)

此式说明（2-2A）中的q_m不受隐含变量q_r的影响，因此这一情况可以不考虑。

设N-K个隐含变量有r1个具有Ⅰ的特性，r2个具有Ⅱ的特性，（3-12）、（3-13）代入（3-8A）中：

$$q_m=d_{mn}g_0^{(mn)}Q_n-\sum^{r1}\frac{d_{mr}d_{nr}g_1^{(mr)}g_2^{(mr)}Q_n}{d_r a_G^{(r)}}(e^{-\psi/\tau_r}-1)$$

$$-\sum^{r2}(-1)\frac{d_{mr}d_{nr}g_1^{(mr)}g_2^{(nr)}Q_n}{a_D b_r}t \tag{3-15}$$

记作：

$$\Delta S_{mn}^{(mn)}=-\sum^{r1}\frac{d_{mr}d_{nr}g_1^{(mr)}g_2^{(nr)}}{d_r a_G^{(r)}}(e^{-\psi/\tau_r}-1) \tag{3-16A}$$

$$B_{mn}^{(mn)}=+\sum^{r2}\frac{d_{mr}d_{nr}g_1^{(mr)}g_2^{(nr)}}{a_D b_r}t \tag{3-16B}$$

当$Q_m\leqslant Q_m^*$时：$\Delta S_{mn}^{(mn)}(\psi,Q_m)=\Delta S_{mn}(\psi)$ (3-17A)

$B_{mn}^{(mn)}(t,Q_m)=B_{mn}t$ (3-17B)

当$Q_m>Q_m^*$时，将ΔS.B进行变量分离，

$$\Delta S_{mn}^{(mn)}(\psi,Q_m)=g_2^{(mn)}(Q_n)\Delta S_{mn}(\psi) \tag{3-18A}$$

$$B_{mn}^{(mn)}(t,Q_m)=g_3^{(mn)}(Q_n)B_{mn}t \tag{3-18B}$$

代入到（3-15）中：

$$q_m=d_{mn}g_0^{(mn)}Q_n+\Delta S_{mn}g_2^{(mn)}Q_n+B_{mn}g_3^{(mn)}Q_n t \tag{3-19}$$

其中：d_{mn}、ΔS_{mn}、B_{mn}均为对称的，第一项与时间无关，为弹性项，第二项对应的内变量在变形过程中具有弹性能，卸载后变形可逐渐恢复，即为粘弹性变形，对于变载荷作用应该作遗传积分，第三项对应的内变量在变形过程中没有弹性能（dr＝0），即为塑性流动，对于变载荷作用无遗传效应；

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$q_m = d_{mn} g_0^{(mn)} Q_n + \int_0^{\psi} \Delta S_{mn}(\psi - \psi') \frac{\partial (g_2^{(mn)} Q_n)}{\partial \psi'} d\psi' + \int_0^t B_{mn} g_3^{(mn)} Q_n dt' \tag{3-20}$$

式（3-20）即为本构关系的一般表达式

四、广 义 力 的 选 取

对于一个受多向载荷的系统，Q_m的选取并不是唯一的，但由变形的客观性，最后得到结果应该是一致的，Q_m选取的数目过多则要考虑变形的几何约束，太少又不能确定材料的变形，为了求解方便，可以依下列原则选取广义力和广义位移。

1）Q_m、q_m能完整地反映载荷和变形。

2）Q_m能唯一地决定q_m。

3）Q_m与q_m是对应于功的广义力和广义位移。

4）Q_m、q_m的选取应尽可能地使各个Q_m之间没有耦合作用，

5）Q_m，q_m选取的数目应尽可能地少以免考虑约束，

五、复合材料蠕变本构关系

1. 一维蠕变

一维蠕变本构关系包括各向同性复合材料单向受力、纤维增强复合材料的主方向受力和对称铺层复合材料的对称轴方向受力等情况，取：

$$Q_1 = \sigma, \quad q_1 = \varepsilon$$

则本构关系为：

$$\varepsilon = S_0 g_0 \sigma + \int_{-\infty}^{\psi} \Delta S(\psi - \psi') \frac{\partial (g_2 \sigma)}{\partial \psi'} d\psi' + \int_{-\infty}^{t} B g_3 \sigma dt'$$

2. 各向同性复合材料二维蠕变：

选取两个广义力：

$$Q_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \sigma_H, \quad Q_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau_s$$

式中σ_1、σ_2为主应力，σ_H为“静水压力”，广义位移ε_H为各向均匀应变，τ_s为与主应力方向成45°方向的剪应力，广义位移为该方向的剪应变，广义变量Q_1与Q_2无耦合效应。

$$\varepsilon_H = d_H g_0^{(H)} \sigma_H + \int_{-\infty}^{\psi} \Delta S_H(\psi - \psi') \frac{\partial (g_2^{(H)} \sigma_H)}{\partial \psi'} d\psi' + \int_0^t B_H g_3^{(H)} \sigma_H dt$$

$$\bar{v}_s = d_s g_0^{(s)} \tau_s + \int_{-\infty}^{\psi} \Delta S_s(\psi - \psi') \frac{\partial (g_2^{(s)} \tau_s)}{\partial \psi'} d\psi' + \int_{-\infty}^{t} B_s g_3^{(s)} \tau_s dt'$$

3. 纤维增强复合材料平面内蠕变

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

平面内的纤维增强复合材料具有方向性，需要选取三个广义力和广义位移，利用材料的对称性，选取材料主方向的正应力σ_1、σ_2及剪应力τ作广义力，其中剪应力与正应力无耦合效应，此外，纤维增强复合材料在纤维方向（设为1方向）的变形是由纤维控制的，其强度较高，具有线弹性，即有：

$$g_0^{(11)}=1 \qquad \Delta S_{11}=\Delta S_{12}=0 \qquad B_{11}=B_{12}=0$$

在横向正应变及剪应变中，变形主要是由基体控制的，而基体的非线性取决于基体的八面体上的剪应力[13]，因此所有的$g_0^{(mn)}$、$g_2^{(mn)}$、$g_3^{(mn)}$的值与（mn）无关，即有：

$$g_0^{(12)}=g_0^{(22)}=g_0^{(66)}=g_0 \qquad g_2^{(12)}=g_2^{(12)}=g_2^{(66)}=g_2$$

$$g_3^{(12)}=g_3^{(22)}=g_3^{(66)}=g_3$$

利用这些结果将（3-20）展开得到：

$$\varepsilon_1=d_{11}\sigma_1+d_{12}\sigma_2$$

$$\varepsilon_2=d_{12}g_0\sigma_1+d_{22}g_0\sigma_2+\int_0^{\psi}\Delta S_{22}(\psi-\psi')\frac{\partial(g_2\sigma_2)}{\partial\psi'}d\psi'+\int_0^{t}B_{22}g_3\sigma_2dt'$$

$$\gamma=d_{66}g_0\tau+\int_0^{\psi}\Delta S_{66}(\psi-\psi')\frac{\partial(g_2\tau)}{\partial\psi'}d\psi'+\int_0^{t}B_{66}g_3\tau dt'$$

六、小 结

1. 本文从热力学理论推导了多维的、适合于粘弹性、粘塑性变形本构关系的一般形式，它所对应的一维本构关系可以简化为粘弹性本构关系或粘塑性本构关系，并且与经验公式是一致的。

2. 和Schapery的一维粘弹性本构关系相比，本文求得粘弹性项的积分号外不含参函数g_1，其物理意义是：在载荷突变时，粘弹性变形具有连续性。这与粘弹性理论是一致的。

3. 从一般形式的本构关系到特殊情况的本构关系，必须按一定的原则选取广义力，以使求解结果简单。

感谢：本工作得到了国家自然科学基金与中科院力学所LNM科研项目的支持，特此致谢！

参 考 文 献

〔1〕De Silva, J.Mech.phys. Soli., 16, 3 (1968), P.159
〔2〕H. Licholt, Advances in Comp.Mater., G.Piatti ed., Appl. Sci. Pub. Ltd. (1978), P209.
〔3〕D. McLean, J. Mech. Phys. Soli., 7, 7 (1972), P.98
〔4〕W. N. Findley, Pteerson ASTM Proc., 58 (1958), P.841.
〔5〕M. A. Biot, J.Appl. Phys., 25 ,11 (1954), P.1385.
〔6〕M. A. Biot, Proc. 3rd. U. S. Nat. Cong., Appl. Mech., ASME (1958), P.1.
〔7〕R. A. Schapery, J. Appl. Phys., 35, 5 (1964), P.1451.
〔8〕R. A. Schapery, Proc.5th U. S. Nat. Cong. ,Appl. Mech., ASME (1966).

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

〔9〕 R. A. Schapery, "Further Developement of a Thermodynamic Constitutive Theory: Stress Formulation", Purdue Univ. Rept., 1968.

〔10〕 Y. C. Fung, Fundamental of Solid Mechanics, Prentice-Hall Inc., Engleword Cliffs, 1965, P.370.

〔11〕 M. E. Tuttle and H. F. Bringon, Experimental Mech., March, 1986. P.89.

〔12〕 C. Y. Hui, Elastic-Plastic Fracture, V.1, ASTM 803, 1983.

〔13〕 Y. C. Lou and R. A. Schapery, J. Comp. Mater., V.5, 1971.

CREEP CONSTITUTIVE EQUATION AND EXPERIMENTAL DETERMINATION OF COMPOSITE MATERIALS

Part I. Constitutive Equaiton

Xiang xiaoyun and Zhang Shuangyin

Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences,
Beijing, 100080, China

Abstract Creep is one of the most important mechanical behaviors of composite material. The results of creep-recovery experiments show that under creep condition deformation can be divided into three parts: elastic deformation, viscoelastic deformation which can recover slowly and visco-plastic deformation which cannot when the load is removed. The thermodynamics of irreverible processes and concept of generalized variables can be used to derive creep constitutive equation in which strain is expressed as observable variable. In this paper, the foundamental thermodynamics equations are reviewed. Based on the assumption and idea of Schapery's equation, the common formula of multi-dimensional creep constitutive equation is derived which includes elastic, viscoelastic and viscoplastic deformations. Considering that the generalized force is not unique, the authors proposed a principle for selecting variables so that the result is as simple as possible. According to such a principle, some special constitutive equations are presented, which include the equations for one-dimensional problems, two-dimensional problems of the isotropic material and the plane problems of fibre reinforced composite materials.

Key words thermodynamics, generalized variable, creep of composite materials, constitutive equation

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net