

隐式 ENO 格式及其在内流问题中的应用

马汉东

马延文

(北京空气动力研究所, 北京 100074)

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘 要 本文研究了文献[1]提出的隐式 ENO 格式, 并对其隐式求解过程进行了改进, 而且耦合以 CSCM 式的隐式特征边界处理。通过对超音速内流无粘流动 (Euler 方程) 以及粘性流动 (Navier-Stokes 方程) 的 ENO 格式数值解研究表明: 改进后的格式是成功的, 其稳定性好且节省内存。同时, 本文也讨论了一些尚待进一步研究的问题。

关键词 隐式 ENO 格式 内流 激波 分离

一、引 言

计算流体力学的不断发展是以计算方法上的创新和高速计算机的问世为先导的。尤其是近十年来, 各种优秀的有限差分格式相继出现, 使得求解效率以及对激波、分离等复杂物理现象的描述上都有了长足进展, 如单步二阶格式^[3], TVD 格式^[4]、NND 格式^[5]、CSCM 格式^[6]和 ENO 格式^[1]等等。

从气动方程的有限差分格式的发展上看, 新近研究的 ENO (Essentially Non-Oscillatory) 格式较早期的 TVD 格式将有着更好的性质, 在流场计算中它能够保持一致的高阶精度, 这样也就克服了 TVD 格式在局总极值点降低精度的缺点, 因此, 在 Hartan 等人的激励下, ENO 格式的研究正越来越受到人们的重视。

文献[1]发展了一种较实用的隐式 ENO 格式, 但就二维问题而言, 它需要求解二个三对角块矩阵方程, 因而, 对于较密网格或某一坐标尺度较大的区域 (如内流问题), 该方程的求解就比较费时。对此, 本文在流向站采用推进松弛迭代的思想, 简化了隐式部分的求解, 由此节省了机时, 也节省了内存。同时, 本文对其隐式边界处理引用了 CSCM 式的隐式同族特征边界方程^[6], 增强了数值求解过程的稳定性。

考虑到超音速内流问题所具有的复杂性 (含复杂的波系结构和分离等等) 以及在物理问题中的广泛应用, 本文首先采用改进后的 ENO 格式数值求解了 Euler 方程。给出了管内超音速绕凸弧流动的数值解。为了比较, 本文还计算了该问题的 TVD 格式解, 结果比较表明: ENO 格式有着较高的激波分辨率。其次, 鉴于作者目前尚未见到隐式 ENO 格式在有粘流动中的应用, 本文将直接应用于简化进气道超音速内流 N-S 方程的数值求解, 给出了壁面压力分布、波系结构以及分离流动, 并与 SIP/Beam-warming 格式的计算结果进行了比较和分析讨论, 从而进一步说明了本文所作的推广应用基本上是成功的。

二、控制方程及边界条件

设坐标原点位于管道出口中点, 所采用的坐标变换为:

1991年6月11日收到原稿。

$$\begin{cases} \tau = t \\ \xi = \xi(x) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

这里, 我们选取流动的主流方向为 ξ 方向。这样, 流动所满足的守恒 Navier-Stokes 方程为:

$$\partial_\tau Q + \partial_\xi F + \partial_\eta G = \partial_\xi F_v + \partial_\eta G_v \quad (2)$$

其中:

$$\begin{aligned} Q &= \hat{Q}/J, \quad J = \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \\ F &= (\xi_x \hat{F} + \xi_y \hat{G})/J \\ G &= (\eta_x \hat{F} + \eta_y \hat{G})/J \\ F_v &= (\xi_x \hat{F}_v + \xi_y \hat{G}_v)/J \\ G_v &= (\eta_x \hat{F}_v + \eta_y \hat{G}_v)/J \\ \hat{F} &= [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, u(e+p)]^T \\ \hat{G} &= [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, v(e+p)]^T \\ \hat{F}_v &= [0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + K T_x]^T \\ \hat{G}_v &= [0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + K T_y]^T \\ Q &= [\rho, \rho u, \rho v, e]^T \\ e &= \rho [C_v T + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)] \\ \tau_{xx} &= \frac{2\mu}{Re} (u_x - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{V}) \\ \tau_{yy} &= \frac{2\mu}{Re} (u_y - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{V}) \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \frac{\mu}{Re} (u_y + v_x) \\ K &= C_p / Re Pr \end{aligned}$$

并假定气体为理想气体, 即:

$$p = R \rho T \quad (R \text{ 为气体常数}) \quad (3)$$

粘性系数满足 Sutherland 定律:

$$\mu = T^{3/2} (1 + C) / (T + C) \quad (4)$$

这里:

$$C = 110.4 \text{ K} / T_\infty$$

当我们略去方程 (2) 右端粘性项时, 方程为:

$$\partial_\tau Q + \partial_\xi F + \partial_\eta G = 0 \quad (5)$$

则为 Euler 方程。

对于不同的流动问题, 流动除要分别满足上述方程以外, 还应满足如下边界条件:

进口: 给定来流条件

$$\begin{aligned} \text{物面:} \quad \frac{\partial p}{\partial n} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial n} &= 0 \\ v_n &= 0 & & \text{(无粘流动)} \\ u = v &= 0 & & \text{(有粘流动)} \end{aligned}$$

出口: 外插

(粘性出口边界选取在适当远处)

三、ENO 格式

在此, 我们将首先讨论 Euler 方程 (5) 式的 ENO 有限差分离散格式, 而后给出粘性 N-S 方程 (2) 式的有限差分逼近式。

由于方程 (5) 式为双曲系统方程, 所以其 Jacobian 系数矩阵有实特征根:

$$\Lambda_\xi = \text{diag} (U, U, U + C_\xi, U - C_\xi) \quad (6a)$$

$$\Lambda_\eta = \text{diag} (V, V, V + C_\eta, V - C_\eta) \quad (6b)$$

$$\begin{aligned} \text{其中:} \quad U &= \xi_x u + \xi_y v, \quad C_\xi = C \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \\ V &= \eta_x u + \eta_y v, \quad C_\eta = C \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \\ C &= \sqrt{\gamma p / \rho} \end{aligned}$$

并且满足下式:

$$A = \frac{\partial F}{\partial Q} = S_\xi \Lambda_\xi S_\xi^{-1} \quad (7a)$$

$$B = \frac{\partial G}{\partial Q} = S_\eta \Lambda_\eta S_\eta^{-1} \quad (7a)$$

容易验证存在相似转换矩阵 T_ξ 和 T_η 使得:

$$S_\xi = M T_\xi, \quad S_\eta = M T_\eta \quad (8)$$

其中:

$$\begin{aligned} M &= \partial \hat{Q} / \partial \hat{Q}^p \\ \hat{Q}^p &= (\rho, \rho u, \rho v, p) \end{aligned}$$

矩阵 M 、 T_ξ 及 T_η 的具体表达式可见文献 [7]。

现定义:

$$\tilde{A}^\pm = M T_\xi \tilde{D}_\xi^\pm T_\xi^{-1} M^{-1} \quad (9a)$$

$$\tilde{B}^\pm = M T_\eta \tilde{D}_\eta^\pm T_\eta^{-1} M^{-1} \quad (9b)$$

其中:

$$\tilde{D}_\xi^\pm = [I + \text{sgn}(\Lambda_\xi)] / 2$$

$$\tilde{D}_\eta^\pm = [I + \text{sgn}(\Lambda_\eta)] / 2$$

I 为单位矩阵

显然:

$$\begin{aligned}\tilde{A}^+ - \tilde{A}^- &= 1 \\ \tilde{B}^+ + \tilde{B}^- &= 1\end{aligned}$$

由上述系数矩阵的一些性质, 就可以利用它们来构造 ENO 格式了.

假设 F^M, G^M 为对应 F, G 的修正通量, 即:

$$F^M = F + E \quad (10a)$$

$$G^M = G + H \quad (10b)$$

则:

$$\partial_\tau Q + (\tilde{A}^+ + \tilde{A}^-) \partial_\xi F^M + (\tilde{B}^+ + \tilde{B}^-) \partial_\eta G^M = 0 \quad (11)$$

可以具有二阶精度逼近于方程 (5). 由方程 (11) 采用 Euler 法就可以构造如下隐式格式:

$$[I + \tilde{A}^+ \Delta_- A + \tilde{A}^- \Delta_+ A + \tilde{B}^+ \Delta_- B + \tilde{B}^- \Delta_+ B] \delta Q = RHS \quad (12)$$

这里, 对隐式部分, 我们已采用了如下近似:

$$\begin{aligned}A^M &= \frac{\partial F^M}{\partial Q} \approx A \\ B^M &= \frac{\partial G^M}{\partial Q} \approx B\end{aligned}$$

现在, 首先让我们来研究一下方程 (12) 右端显式项 RHS 部分的差分格式, 它是定常解的差分逼近方程, 代表着稳定解的逼近精度.

设 F^N, G^N 为分别对应于 F^M, G^M 的数值通量, 则有:

$$RHS = -\alpha_\xi (F_{i+\frac{1}{2},j}^N - F_{i-\frac{1}{2},j}^N) - \alpha_\eta (G_{i,j+\frac{1}{2}}^N - G_{i,j-\frac{1}{2}}^N) \quad (13)$$

其中:

$$\alpha_\xi = \Delta \tau / \Delta \xi$$

$$\alpha_\eta = \Delta \tau / \Delta \eta$$

余下我们仅给出 F^N 的表达式 (G^N 类似):

$$F_{i+\frac{1}{2},j}^N - F_{i+\frac{1}{2},j}^M - \tilde{A}_{i+\frac{1}{2},j}^+ \Delta_{i+\frac{1}{2},j} F^M \quad (14)$$

其中:

$$\Delta_{i+\frac{1}{2},j}(\quad) = (\quad)_{i+1,j} - (\quad)_{i,j}$$

通量修正量 $E_{i,j} = (e_1, \dots, e_4)_{i,j}^T$ 为:

$$\begin{aligned}e_{ij} &= m[\tilde{e}_{i,i+\frac{1}{2},j} - \beta \bar{m}(\Delta_+ \tilde{e}_{i,i+\frac{1}{2},j}, \Delta_- \tilde{e}_{i,i+\frac{1}{2},j}), \\ &\quad \tilde{e}_{i,i-\frac{1}{2},j} - \beta \bar{m}(\Delta_+ \tilde{e}_{i,i-\frac{1}{2},j}, \Delta_- \tilde{e}_{i,i-\frac{1}{2},j}),\end{aligned} \quad (15)$$

而 $\tilde{E}_{i+\frac{1}{2},j} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_4)_{i+\frac{1}{2},j}^T$ 表达式为:

$$\tilde{E}_{i+\frac{1}{2},j} = \text{sgn } A_{i+\frac{1}{2},j} [I - \alpha_\xi |A_{i+\frac{1}{2},j}| \Delta_{i+\frac{1}{2},j} F / 2 \quad (16)$$

其中:

$$\operatorname{sgn} A_{i+\frac{1}{2},j} = [S_{\xi} \operatorname{sgn}(\Lambda_{\xi}) S_{\xi}^{-1}]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$|A_{i+\frac{1}{2},j}| = (S_{\xi} |\Lambda_{\xi}| S_{\xi}^{-1})_{i+\frac{1}{2},j}$$

这里, 下标 $i+\frac{1}{2}$ 表示定义该量为在相邻节点 i 和 $i+1$ 之间的某种平均值, 本文在此取简单平均。函数 m 以及 \bar{m} 定义如下:

$$m(a, b) = \frac{\operatorname{sgn}(a) + \operatorname{sgn}(b)}{2} \min(|a|, |b|)$$

$$\bar{m}(a, b) = \begin{cases} a & |a| \leq |b| \\ b & |a| > |b| \end{cases}$$

当 $\beta=0$ 时, 上述差分为二阶 TVD 逼近; $\beta=0.5$ 时则为严格的 ENO 逼近^[1]。

至此, 我们已完整地给出了无粘部分显式项的差分格式。再让我们回过头来研究一下方程 (12) 的解法。

文献^[1] 对该式采用了 DDADI 予以分解求解, 这样就需要解二个三对角块矩阵方程。而本文采用推进松弛迭代的思想予以求解, 其内点格式为:

$$[-B^+, D, B^-] \delta Q = RHS + A^+ \delta Q_{i-1} - A^- \delta Q_{i+1} \quad (17)$$

其中:

$$D = I + |A| + |B|$$

对于上下管道边界(假定分别对应脚标 N 和 1) 本文采用 CSCM 型的隐式同族特征边界处理^[6]:

$$(D_1, (\tilde{B}^-)^{-1} B_1^-) \delta Q_1 = -(\tilde{B}^-)^{-1} \tilde{B}^- \Delta_+ G + R_1 \quad (18a)$$

$$(-(\tilde{B}^+)^{-1} B_N^+, D_N) \delta Q_N = -(\tilde{B}^+)^{-1} \tilde{B}^+ \Delta_- G + R_N \quad (18b)$$

这里:

$$D_N = I + |A| + (\tilde{B}^+)^{-1} B_N^+$$

$$D_1 = I + |A| + (\tilde{B}^-)^{-1} B_1^-$$

R 为方程中的其它项, $(\tilde{B}^{\pm})^{-1}$ 的一般处理方法可见文献^[6]。这种做法的实质是对特征值失效的那些行由相应边界条件予以补充。这样做的方便之处在于只需对内点格式中的 B 和 \tilde{B} 加以改动就可以作为边界方程了, 因而更为方便。

这样方程 (17) 和 (18) 式就构成了某个流向站上的三对角矩阵方程系统, 采用标准的做法也就可以求解了。

对于粘性 Navier-Stokes 方程中的粘性项, 在此, 我们仅考虑其对显式差分的贡献, 即在上述差分方程 RHS 项中增加粘性部分差分 RHS_v , 并按通常的中心差分处理, 于是, 我们就可以求解 N-S 方程了。

四、计算结果及分析

4.1 管内超音速流绕 4% 凸弧流动

此时, 来流 Mach 数为 $M_{\infty} = 1.4$, 流动满足 Euler 方程, 计算网格的划分为: 在 ξ 方向采用 Holst 坐标变换^[8]; 在 η 方向则采用分段代数变换^[3], 所形成的计算网格如图 1 所示。

为了比较 ENO 对 TVD 的改进效果, 本文采用显式 TVD 格式 ($\beta=0$) 计算了该问题, 它较文献[7]的为好 (限于篇幅, 文献[7]的结果在此也就不予以引用了)。

图 2 是 TVD 的计算结果; 图 3 是本文 ENO 的结果。从壁面 Mach 数分布、等 Mach 线、等密度线以及等压力线上看, 在凸弧前半部两者相差不大, 但就凸弧后半部流场而言, 两者差别较为明显, ENO 的上壁反射波更强, 而且凸弧后部拐角处压缩激波也优于 TVD 的结果, 激波伸展且较窄。

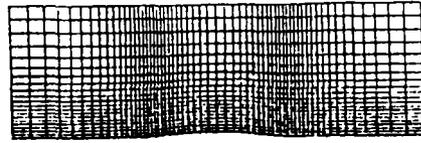


图 1 计算网格

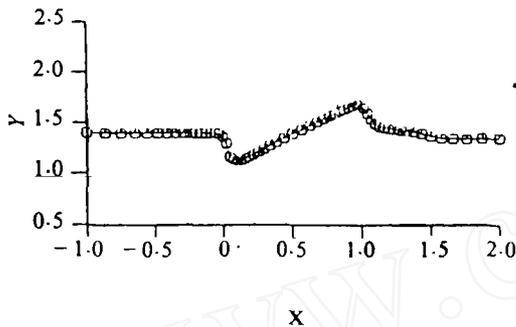


图 2(a) 下壁面 Mach 数分布 (TVD)

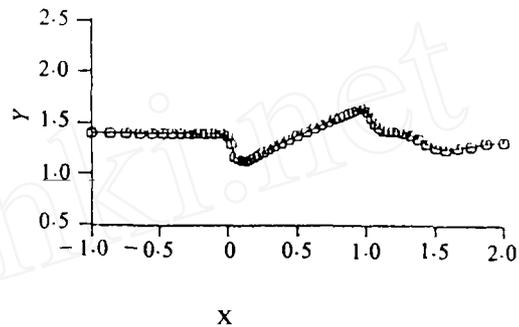


图 3(a) 下壁面 Mach 数分布 (ENO)



图 2(b) 等 Mach 线 (TVD)



图 3(b) 等 Mach 线 (ENO)



图 2(c) 等密度线 (TVD)

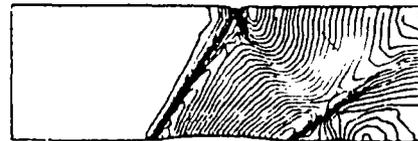


图 3(c) 等密度线 (ENO)



图 2(d) 等压力线 (TVD)



图 3(d) 等压力线 (ENO)

图 2 绕凸弧内流的 TVD 计算结果

图 3 绕凸弧内流的 ENO 计算结果

4.2 简化进气道内流

该流场结构简图如图 4 所示, 来流 Mach 数 $M_\infty=3$, 雷诺数为 $Re=11 \times 10^6$ 。网格节点数为 101×61 , 如图 5 所示。流动满足 N-S 方程。

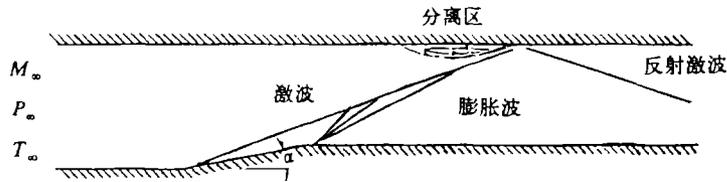


图 4 流场结构简图

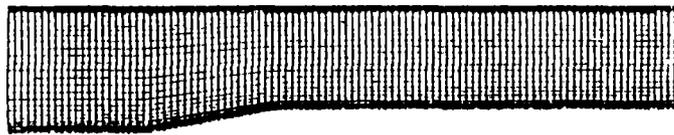


图 5 计算网格

文献[2] 计算了该情况的 SIP 格式结果, 它与 Beam - Warming 格式的结果完全一致。

图 6 为下壁压力分布的比较, 两者符合很好; 在变截面段壁面压力分布是平坦的, 这说明在激波后附近流形变化不大。

对上壁压力分布 (图 7) 而言, 在激波的反射点附近及近上游两者有明显差异。本文认为这种差别主要是由于两种格式对分离的刻划程度所造成的, 从压力分布上讲, 压力不仅应有突升 (激波), 而且在前部应有一段逆压梯度 (分离)。文献[2] 在该处所出现的压力峰值似乎更象“数值振荡”。

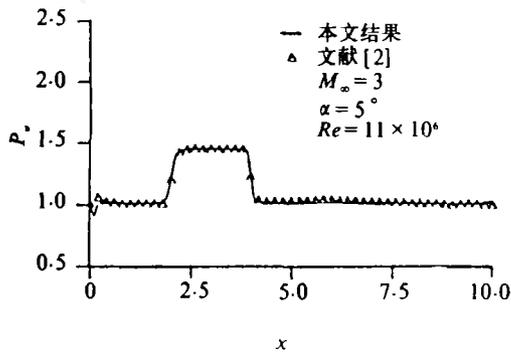


图 6 下壁压力分布的比较

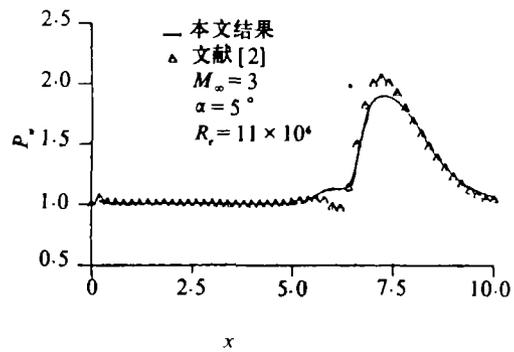


图 7 上壁压力分布的比较

图 8 为等压线图, 各种波系结构清晰可见, 在上壁激波反射点附近, 该图有几分类似于激波边界层干扰的图案^[9]。

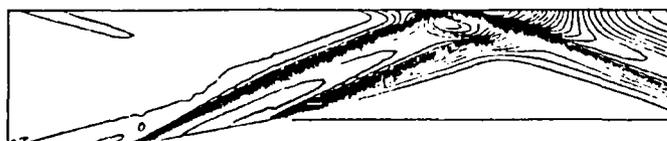


图 8 等压线 ($M_\infty=3$ $\alpha=5^\circ$ $Re=11 \times 10^6$)

图 9 为分离流场局部放大图, 由此可以看出分离的型态。遗憾的是, 文献[2]未能给出流场速度向量图。



图 9 局部流场: $X = 5.7\text{cm} - 7.0\text{cm}$ ($M_\infty = 3$ $\alpha = 5^\circ$ $Re = 11 \times 10^6$)

五、结束语

通过上述算例, 我们可以得出如下结论:

1. 本文对隐式求解的改进和隐式同族特征边界的处理基本上是成功的;
2. Enler 方程的 ENO 格式离散有助于激波捕捉能力的提高, 尤其是多道激波情况;
3. ENO 格式有一定的分离流场描述能力。

但是, 在实际计算中我们发现, ENO 格式迭代误差极值点有“跳动”现象; 而且在粘性流动情况下, ENO 格式对激波捕捉能力的改进效果仍比较模糊, 这也反映了 ENO 格式有待于更进一步的深入研究和探讨。

参 考 文 献

- [1] J. Y. Yang, C. K. Lombard: AIAA Paper No. 87-1166.
- [2] R. W. Walters, D. L. Dmoyer: AAIA Paper No. 84-0424.
- [3] Fu Dexun, Ma Yanwen, Proceedings of 9th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics Pairs (1984).
- [4] H. C. Yee: NASA TM 89464 may 1987.
- [5] 张涵信, 空气动力学报, V1.7 No.2 (1989).
- [6] 马汉东, 傅德薰, 空气动力学报, 9 (2) (1991),
- [7] J. Y. Yang: AIAA Paper No. 85-0292.
- [8] T. L. Holst: AIAA Paper No. 77-0224.
- [9] J. L. Thomas Walters RW, AIAA J, 25 (4) (1987), 527-535.

IMPLICIT ENO SCHEME AND ITS APPLICATIONS ON INTERNAL FLOW PROBLEMS

Ma Handong

Ma Yanwen

Beijing Institute of Aerodynamics

Institute of Mechanics, Academia Sinica

ABSTRACT In this paper, we present a modified implicit ENO scheme and combine it with CSCM-like implicit supra-characteristic boundary treatment. Numerical experiment with this scheme for 2-D channel supersonic flow about 4% circular arc has demonstrated the sharp shock-capturing capability of the scheme. The results are also compared with those of TVD scheme. The further application to the viscous flow in simplified inlet is made. They show a good agreement with the results of SIP/Beam-warming schemes except nearby the reflection point of shock. But our results seem to be more reasonable.

KEY WORDS ENO scheme, channel flow, shock, separation.