

十字叠层板横向剪切刚度的计算方法

张双寅

中国科学院力学研究所, 北京100080

摘要: 本文研究了十字叠层板横向剪切刚度系数的计算方法。指出前人采用的横向剪应力为抛物线分布的假设不够准确, 使 C_{11} 的计算值产生误差。本文首先推导了横向剪应力沿厚度分布的计算公式, 然后用幂级数拟合了近似权函数, 用权函数法和能量法对两种铺层结构的碳/环氧十字叠层板的 C_{11} 进行了计算。对比了两种方法的结果, 并与文献[1]的方法作了对比。结果表明, 对于对称层板本文权函数法与文献[1]的结果基本一致; 而对于非对称叠层板, 二者差别明显。能量法结果与权函数法对比, 前者更精确。

关键词: 十字叠层板, 权函数法, 横向剪切刚度。

一、前言

树脂基纤维复合材料横向剪切模量比沿纤维方向的拉伸模量小得多。对于常用复合材料来说, E_{11} 比 G_{13} 大20~50倍, 因此, 在研究由这类材料构成的叠层板的弯曲、屈曲和振动问题时, 需考虑横向剪切变形的影响。

由于叠层板中各层的刚度性能差别很大, 横向剪应力沿厚度分布为分段光滑函数, 且分布形式因铺层结构不同而有巨大差异。所以, 确定横向剪切刚度的问题, 亦即均质板的横向剪切修正系数的问题, 引起不少人的兴趣^{[1][2][3]}。

Vinson等人^[1]不管层间材料性质不连续性造成的剪应力分布的分段光滑的特性, 以及非对称铺层造成的剪应力曲线非对称的特性, 假定剪应力为抛物线型分布。对剪应力乘上权函数 $f_1(z)$,

$$f_1(z) = \frac{5}{4} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] \quad (1)$$

然后沿板厚积分, 通过剪力合力等效原则得到了计算剪切刚度系数的近似公式:

$$C_{11} = \frac{5}{4} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{11}^k \left(h_k - h_{k-1} - \frac{4}{3} \frac{h_k^3 - h_{k-1}^3}{h^2} \right) \quad (2)$$

本文1989年12月收到

其中 h 与 h_1 的物理意义请参看图1。

不难看出,权函数 $f_1(z)$ 对称于 $z=0$ 坐标面,并且满足在叠层上下表面,即 $z=\pm\frac{h}{2}$,剪应力为零的条件。通过简单地积分运算可以证明,权函数 $f_1(z)$ 在剪力合力等效意义下符合均匀材料矩形截面梁剪切刚度修正因子等于 $\frac{6}{5}$ 的结论。文献[5]在处理复合材料叠层板问题时也采用了这个结果。

与文献[1]相似,文[2]也假定了剪应力为抛物线分布,提出权函数 $f_2(z)$:

$$f_2(z) = \frac{3}{2} \left[1 - \frac{4}{h^2} \left(z - \frac{h}{2} - h_0 \right)^2 \right] \quad (3)$$

由图1可知, $h_0 = -\frac{h}{2}$, 所以式(3)与(1)之差别仅在于系数不同。文献[2]采用余能等效原则导出了计算 C_{11} 的公式。可以证明,在余能等效意义下 $f_2(z)$ 的系数 $\frac{3}{2}$ 也符合矩形梁剪切修正因子为 $\frac{6}{5}$ 的结论。

由于文献[1]和[2]都预先假定了剪应力为抛物线型分布,这个假设往往与实际情况的差别甚大,显然会造成可观的误差。而这个误差的大小又难以估计。本文放弃对剪切应力分布作假定,拟合接近实际剪应力分布的权函数来计算剪切刚度,因此可以认为此法较精确。此外,本文探讨了计算 C_{11} 的能量法。以十字叠层板(Cross-ply Laminate)为对象,

叙述了这两种确定 C_{11} 的计算方法,并以计算结果与文[1]的方法进行了对比。

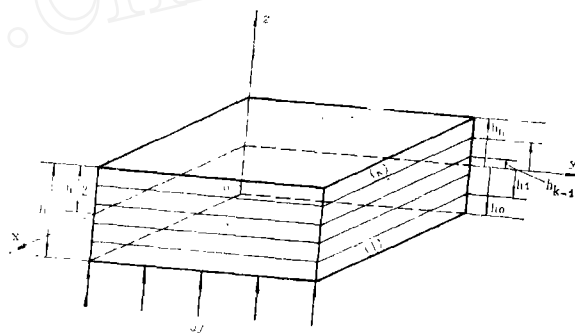


图1 叠层板几何与坐标示意图

二、横向剪应力分布

由于 $x-z$ 与 $y-z$ 这两个方向上剪切刚度系数的计算方法完全相同,这里只讨论 $x-z$ 方向上的剪切刚度系数就足够了。

考虑图1所示的十字叠层板的悬臂弯曲问题。因为是柱面弯曲变形,对于任意一层我们有如下平衡方程:

$$\frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}^k}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

于是, 横向剪应力 τ_{xz} 的分布可以通过积分上式而得到。对于第 1 层, τ_{xz}^1 沿厚度分布公式为:

$$\tau_{xz}^1 = \int_{h_0}^z -\frac{\partial \sigma_x^1}{\partial x} dz, \quad h_0 \leq z \leq h_1 \quad (5)$$

τ_{xz} 沿其他各层厚度的分布为: 当 $h_1 \leq z \leq h_n$ 时

$$\tau_{xz}^k = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{h_{i-1}}^{h_i} -\frac{\partial \sigma_x^i}{\partial x} dz + \int_{h_{k-1}}^z -\frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} dz \quad (6)$$

另外, σ_x 可根据叠层板广义虎克定律由应变和曲率得出:

$$\langle \sigma \rangle^k = [\bar{Q}]^k \{ \langle \varepsilon^0 \rangle + z \langle k \rangle \} \quad (7)$$

其中 $\langle \sigma \rangle$ 为应力向量, $\langle \varepsilon^0 \rangle$ 为中面应变向量, $\langle k \rangle$ 为曲率向量, 它们的表达式分别为:

$$\langle \sigma \rangle = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \langle \varepsilon^0 \rangle = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}; \quad \langle k \rangle = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

它们与内力 $\langle N \rangle$ 和内力矩 $\langle M \rangle$ 的关系为⁽⁴⁾:

$$\begin{Bmatrix} \langle \varepsilon^0 \rangle \\ \langle k \rangle \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A' & B' \\ B' & D' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle N \rangle \\ \langle M \rangle \end{Bmatrix} \quad (8)$$

其中

$$\langle N \rangle = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \langle M \rangle = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

将式(8)代入式(7), 然后对它的第一行求偏导数, 求得 $\frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x}$ 的表达式; 考虑到结构的对称性和正交性, 我们有

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = \frac{\partial N_y}{\partial x} = \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \text{而} \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} = Q_x \quad (9)$$

于是, 得出

$$\frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} = (\bar{Q}_{11}^k B_{11}^k + \bar{Q}_{12}^k B_{12}^k + \bar{Q}_{16}^k B_{16}^k) Q_x + z (\bar{Q}_{11}^k D_{11}^k + \bar{Q}_{12}^k D_{12}^k + \bar{Q}_{16}^k D_{16}^k) Q_x \quad (10)$$

引入记号:

$$\bar{B}_{11}^k = \bar{Q}_{11}^k B_{11}^k + \bar{Q}_{12}^k B_{12}^k + \bar{Q}_{16}^k B_{16}^k \quad (11)$$

$$\bar{D}_{11}^k = \bar{Q}_{11}^k D_{11}^k + \bar{Q}_{12}^k D_{12}^k + \bar{Q}_{16}^k D_{16}^k \quad (12)$$

式(10)可以简写成:

$$\frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} = (\bar{B}_{11}^k + \bar{D}_{11}^k z) Q_x \quad (13)$$

将上式代入式(5)与式(6), 合并成一式为:

$$\tau_{xz}^k = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{h_{i-1}}^{h_i} -(\bar{B}_{i1}^k + z\bar{D}_{i1}^k)Q_x dz + \int_{h_{k-1}}^z -(\bar{B}_{i1}^k + z\bar{D}_{i1}^k)Q_x dz \quad (14)$$

对于第一层上式中的第一项等于零。

由式(14)可知, 剪应力 τ_{xz} 分布不仅依赖于坐标 z , 也依赖于叠层板的刚度分布。除单层板或相同单层材料平行铺设的多层板剪应力分布为光滑抛物线分布外, 绝大多数叠层板的剪应力为分段光滑曲线, 并非抛物线分布; 对于非对称叠层板, 剪应力 τ_{xz} 不对称于几何中面。

三、权函数的确定

已知剪应力分布后就可确定剪切刚度系数。为此须首先确定权函数。由于剪应力为分段光滑曲线, 不可能用简单函数来描述。多数情况下需用多项式拟合, 拟合方法如下:

令真实的剪应力函数为 $\tau_{xz}(z)$; 用多项式逼近的近似剪应力函数为 $\tau_{xz}^*(z)$ 。根据最小二乘法, 我们可以给出:

$$\Delta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\tau_{xz}(z) - \tau_{xz}^*(z)]^2 dz \quad (15)$$

近似函数多项式系数的“最佳”值应使上式的变分等于零, 即:

$$\delta\Delta = 0 \quad (16)$$

式(16)给出一组线性代数方程组, 由此可确定多项式系数。已知权函数, 可按[1]的方法确定 C_{11} 。

应该指出, 由于剪应力分布形态依赖于叠层板铺层顺序。所以多项式的函数形式也因叠层结构不同而不同, 不可能给出一个“普适”权函数。

四、确定横向剪切刚度的能量法

上节根据剪应力分布拟合了权函数, 由于它近似代表应力分布曲线, 用此法确定 C_{11} , 必然带来一定误差。现在, 我们讨论另一种计算 C_{11} 的方法——能数法。

1, 对于整个叠层板, 横向剪切应变能为。

$$U_1 = \frac{1}{2} S_{55} Q_x^2 \quad (17)$$

其中 S_{55} 为叠层板在 $x-z$ 面内的横向剪切柔度, $S_{55} = \frac{1}{C_{55}}$ 。 Q_x 为剪切合力, 可由下式计算

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \quad (18)$$

将式(14)代入上式, 分层积分再求和可得 Q_x ,

2. 将各层的剪切应变能相加也可求得整个层板的应变能, 即:

$$U_1 = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{1}{2} S_{55}^k \tau_{xz}^2 dz \quad (19)$$

其中 $S_{55}^k = \frac{1}{G_{xz}^k}$ 为第 k 层的剪切柔度。对于 0° 层 $G_{xz}^k = Q_{55}$, 对于 90° 层 $G_{xz}^k = Q_{44}$ 。

令式(19)与式(17)相等, 得:

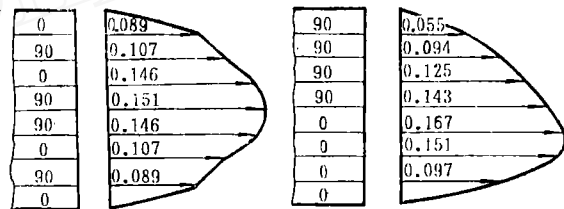
$$S_{55} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} S_{55}^k \tau_{xz}^2 dz / \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \right]^2 \quad (20)$$

五、算 例

本文计算了 $[0/90]_{2s}$ 与 $[90_4/0_4]$ 这两类铺层截然不同的碳/环氧叠层板的剪切刚度。

1. 权函数法计算结果

由式(14)两种层板在悬臂弯曲时 τ_{xz} 的分布, 如图2所示。图中的应力值为无量纲值, 在作正则化处理时使之按剪切合力等效原则得到的截面形状因子等于 $6/5$ 。



(a)

(b)

图2 两种叠层板横向剪应力分布

(a) $[0/90]_{2s}$, (b) $[90_4/0_4]$

于是, 按着公式(15)与公式(16)的方法确定了权函数。对 $[0/90]_{2s}$ 层板, 权函数为

$$f_3^{sym}(z) = 0.151 - \left\{ 0.2785 \left(\frac{2z}{h} \right)^2 - 0.5268 \left(\frac{2z}{h} \right)^4 + 0.3993 \left(\frac{2z}{h} \right)^6 \right\} \quad (21)$$

$f_3^{sym}(z)$ 中上角表示对称。对于 $[90_4/0_4]$ 层板, 权函数为:

$$f_3^{nsy}(z) = 0.143 - \left\{ 0.074 \left(\frac{2z}{h} \right) + 0.082 \left(\frac{2z}{h} \right)^2 - 0.074 \left(\frac{2z}{h} \right)^3 + 0.061 \left(\frac{2z}{h} \right)^4 \right\} \quad (22)$$

上角“nsy”表示非对称。

已知权函数之后就可按照[1]的方法确定横向剪切刚度。对于十字叠层板, 剪切合力与剪应变之间关系为:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{55} & 0 \\ 0 & C_{44} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

对于各单层, 剪应力与剪应变之间的关系为:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz}^k \\ \tau_{yz}^k \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{55}^k & 0 \\ 0 & Q_{44}^k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

将权函数乘上式, 代入如下积分式,

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \text{ 与 } Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz$$

再与式(23)比较, 就可确定 C_{ii} 。

对于图2a所示之对称叠层板, 将式(24)乘上 $f_3^{*ym}(z)$, 沿厚度积分可得 $[0/90]_{2n}$ 层板的 C_{ii} ; 对于图2b所示之非对称叠层板, 则将式(24)乘上 $f_3^{*ny}(z)$ 再积分, 可求 $[90_4/0_4]$ 层板的 C_{ii} 。

此外, 也对图2所示的两类层板的剪应力分布用权函数 $f_1(z)$ 作了计算, 与权函数 $f_3(z)$ 的结果作了对比, 见表1。表1中以 $f_1(z)$ 为权函数的计算公式为公式(2), 而以 $f_3(z)$ 为权函数的计算公式太繁, 这里从略。

由表中数据可见, 对于 $[0/90]_{2n}$ 这类对称叠层结构, 两种权函数所得结果接近; 对于 $[90_4/0_4]$ 这类非对称叠层结构, 二者差别显著, 不容忽视。

表1 用两种权函数计算的剪切刚度系数

铺层结构	刚度系数	$f_3^{*ym}(z)$	$f_1(z)$
$[0/90]_{2n}$	C_{55}	$h[0.4922Q_{44} + 0.3578Q_{55}]$	$h[0.4948Q_{44} + 0.3385Q_{55}]$
	C_{44}	$h[0.3578Q_{44} + 0.4922Q_{55}]$	$h[0.3385Q_{44} + 0.4948Q_{55}]$
$[90_4/0_4]$		$f_3^{*ny}(z)$	$f_1(z)$
	C_{55}	$h[0.346Q_{44} + 0.487Q_{55}]$	$h[0.417Q_{44} + 0.417Q_{55}]$
	C_{44}	$h[0.346Q_{44} + 0.487Q_{55}]$	$h[0.417Q_{44} + 0.417Q_{55}]$

2. 能量法的计算结果

由式(20)看出, 此法可得出叠层板的剪切柔度 S_{ii} 与各层剪切柔度 S_{ii}^k 之间的关系。算法有二: 其一是用数据积分法, 利用图2所示之应力分布求 S_{ii} 的计算式; 其二为直接利用公式(14)进行计算。二者实质上是等同的。

碳/环氧复合材料的特性常数为:

$E_L = 172.0 \text{ GPa}$, $E_T = 6.89 \text{ GPa}$, $\nu_{LT} = 0.25$, $\nu_{TL} = 0.1$, $G_{LT} = 3.44 \text{ GPa}$, $G_{TT} = 1.378 \text{ GPa}$, 由此算得各单层刚度系数为:

$$\begin{pmatrix} \bar{Q}_{11}^k & \bar{Q}_{12}^k & 0 \\ \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 172.6 & 1.72 & 0 \\ 1.72 & 6.90 & 0 \\ 0 & 0 & 3.45 \end{pmatrix} \text{ GPa}$$

应该说明, 对于 0° 层和 90° 层, \bar{Q}_{11}^k 与 \bar{Q}_{22}^k 互易其值。按照文[4]的公式计算了 $[B']$ 和 $[D']$ 矩阵,

对于 $[0/90]_{2s}$ 对称层板: $B'_{ij} = 0$, 并且,

$$\begin{pmatrix} D'_{11} & D'_{12} & 0 \\ D'_{12} & D'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D'_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.10, & -0.003 & 0 \\ -0.003, & 0.205 & 0 \\ 0 & 0 & 3.456 \end{pmatrix} \frac{1}{h^3 \text{GPa}} \quad (25)$$

对于 $[90_4/0_4]$ 非对称情况。

$$\begin{pmatrix} B'_{11} & B'_{12} & 0 \\ B'_{12} & B'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B'_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0839, & -0.0035, & 0 \\ -0.0035, & 0.0839, & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{h^2 \text{GPa}} \quad (26)$$

$$\begin{pmatrix} D'_{11} & D'_{12} & 0 \\ D'_{12} & D'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D'_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.362, & -0.018, & 0 \\ -0.018, & 0.362, & 0 \\ 0 & 0 & 3.456 \end{pmatrix} \frac{1}{h^3 \text{GPa}} \quad (27)$$

将式(25)到(27)的数值代入式(10), 再利用式(20), 通过简单积分求和, 得如下结果。

对于对称叠层板:

$$S_{55} = 0.4635 \frac{1}{hQ_{55}} + 0.6793 \frac{1}{hQ_{44}} \quad (28)$$

$$S_{44} = 0.6793 \frac{1}{hQ_{55}} + 0.4635 \frac{1}{hQ_{44}} \quad (29)$$

对于非对称情况:

$$S_{55} = 0.7788 \frac{1}{hQ_{55}} + 0.4160 \frac{1}{hQ_{44}} \quad (30)$$

$$S_{44} = 0.4160 \frac{1}{hQ_{44}} + 0.7788 \frac{1}{hQ_{55}} \quad (31)$$

已经说明 $S_{ii} = \frac{1}{C_{ii}}$ 可见能量法得出层合板剪切柔度与各单层柔度之间的关系式, 与权函数法不同。

六、结 论

1. 本文提出采用接近真实应力分布的权函数计算横向剪切刚度系数 C_{ii} , 由于考虑了应力分布的非对称性, 比文[1]抛物线权函数要好。

2. 研究了计算 C_{ii} 的能量法。此法未采用层板变形的“平截面”假设, 即放弃了式(23)与(24)中所包含的层合板和各单层都有相同剪应变这一假定, 可以得出更好的结果。因为“平截面”假设在这里是一个粗糙的假设, 影响结果的精确性。

3. 在修改本文时参阅了文[3]的工作, 本文能量法的思想与它有共同之处。但文[3]公式[3]不精确。它仅适用于层合梁情况。对于板不够精确。

感谢: 本文得到了国家自然科学基金的资助。王俊表作了部分数值计算工作。在修改本文时与张行教授进行了有益的讨论, 特此致谢。

参 考 文 献

- (1) Vinson, J.R. and Chow, T.W., Composite Materials and Their Use in Structures, Applied Science Publishers LTD, London, 1975, P.223.
- (2) 王震鸣, 刘国玺, 吕明身, 应用数学和力学, 第3卷, 第1期, 1982, pp.49-65.
- (3) Whitney, J.M., Shear Correction Factors for Orthotropic Laminates Under Static Load, J. Appl. Mech., Vol.40, No.1, 1973, PP.302-304.
- (4) 刘锡礼, 王秉权, 复合材料力学基础, 中国建筑工业出版社, 1984.2.
- (5) Whitney, J.M., et al., Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic plates, J. Appl. Mech., Vol.37, No.4, 1970, PP.1031-1036.

CALCULATION METHOD FOR DETERMINING TRANSVERSE SHEAR STIFFNESS COEFFICIENT OF CROSS-PLY LAMINATE

Zhang Shuangyin

Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences,
Beijing(100080), China

ABSTRACT

This paper presents two calculation methods for determining transverse shear stiffness coefficients: weight function method and strain energy method. The first method is similar to that proposed in Ref.[1], with the exception of abandoning the assumption of parabolic distribution of transverse shear stress through thickness of the laminate. Because the real distribution of shear stress is not exactly parabolic, especially for unsymmetrical laminates, the formula in Ref.[1] often yields inaccuracy.

First of all, the formulas of transverse shear stress were derived. The least square method was used to obtain the approximate weight functions for both symmetrical and unsymmetrical laminates. Then, the shear stiffness coefficients were calculated by using the two methods.

The results show that for the unsymmetrical laminate, the weight function method is better than the formula of Ref.[1]. As for the comparison between the two methods of this paper, strain energy method might be superior to the other one.

Key words: cross-ply laminate, weight function method, transverse shear stiffness