

## 具有摩擦阻尼结点之结构动力分析

田千里 刘世龄 黄志慧  
(中国科学院力学研究所) (香港理工学院)

### 摘 要

本文将增量谐波平衡法 (Incremental Harmonic Balance Method, I. H. B Method) 结合组抗方法用于分析具有摩擦结点之结构稳态动力响应。这方法之主要优点是能将线性结构与摩擦结点分开来考虑。当摩擦结点之自由度远小于线性结构之自由度时, 计算是很经济的。发展了一个分析这种系统之计算程序可与一般有限元结构分析程序如 SAPV 或 ADINA 相连, 作为后处理程序。

**关键词:** 非线性振动、结构阻尼、干摩擦分析、有限元动力分析

### 一、引 言

作用于工程结构上之环境激励可以引起它的破坏, 破坏的原因往往是由于动力放大。因此为了控制结构振动, 须要有足够的阻尼。不幸由于追求轻质量、高强度与工厂化生产, 现代工程结构往往只具有较小的内阻, 如预应力建筑结构、焊接结构、与比强度大的空间结构等。在装配式结构中约有 90% 的内阻来源于结点, 而干摩擦阻尼又是结点固有的特性。因此利用摩擦抑制结构振动一直受到人们的重视。早在 1931 年 Den Hartog 就对单自由度干摩擦体系进行过分析, 并求得了精确的稳态解<sup>[1]</sup>, 他的方法后来被推广到分析二自由度体具有一个摩擦阻尼器<sup>[2]</sup>, 但精确解法很难推广到分析多自由度体系, 也难以分析在一个周期内具有多次停滞的情况。八十年代初期发展了分析非线性系统高阶近似的增量谐波平衡法<sup>[3][4]</sup>, 后来被引伸于分析干摩擦系统具有停滞滑移现象, 取得了良好的结果<sup>[5]</sup>。在文<sup>[6]</sup>中, 处理多自由度干摩擦阻尼系统时, 迭代求解之未知数为线性模态与非线性约束之和。本文中阻抗法与 I. H. B. 方法相结合, 未知数只是非线性约束数, 故在处理多自由度体系时, 计算时间与储量可大为节省。线性结构之阻抗可用实验测定, 也可以通过有限元分析求得。本文发展了一个计算程序, 可利用实验或有限元分析获得的阻抗函数, 与摩擦元之特性相结合以进行系统的非线性动力分析, 并可与 SAP5 或 ADINA 等程序相连以分析复杂结构。

\* 本文得到香港政府 U. P. G. C. 与我国国家自然科学基金资助。本文于 1991 年 5 月 3 日收到

## 二、I. H. B. 方法

如所周知,逐步积分法与谐波平衡(H. B.)法是非线性动力分析中两个最常用的方法,前者在通用有限元分析程序如 ADINA 中已被应用,其优点是能分析复杂的非线性系统,缺点是内存与计算机时均很庞大。H. B. 方法特别适合于对系统进行频率响应分析,但以往的研究大多限于单谐波近似解,近年来发展了将 H. B. 方法与 F. F. T. 变换相结合,对非线性系统进行多谐波分析的方法。遇到强非线性问题,如摩擦滑动在一个周期内有多次停滞的情况,非线性问题的迭代收敛得不到解决,为此发展了 I. H. B. 方法与 Galerkin—Newton—Raphson(G. N. R.)方法。I. H. B. 方法一开始研究了一些连续体系之非线性周期与准周期振动问题,后来被推广到研究具有停滞的摩擦滑动响应问题,它与 G. N. R. 方法实质上并无区别,只是在使用 Galerkin 法与 Newton Raphson 法的次序上有所颠倒,但在运算时带来了较大方便,在分析强非线性系统之稳态响应时,这个方法是很有吸引力的。下面我们先从 H. B. 方法说起,非线性系统之运动方程为

$$\underline{M}\ddot{\underline{x}} + \underline{C}\dot{\underline{x}} + \underline{K}\underline{x} = \underline{f}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}) + \underline{P} \quad (1)$$

$\underline{f}(\underline{x}, \dot{\underline{x}})$  为非线性元件内力矢量,  $\underline{P}$  为外力矢量。上式左端为结构线形部分之运动方程。将非线性部分作为变力移至方程右端,设

$$\underline{x} = \sum_{s=1}^R (A_s \cos \omega t + B_s \sin \omega t) \quad (2)$$

(2)代入(1)式,用 Galerkin 法,令

$$\int_0^{2\pi/\omega} \{ \underline{M}\ddot{\underline{x}} + \underline{C}\dot{\underline{x}} + \underline{K}\underline{x} - \underline{f} - \underline{P} \} \begin{Bmatrix} \cos m\omega t \\ \sin m\omega t \end{Bmatrix} dt = 0 \quad (3)$$

便可得到

$$\begin{bmatrix} -\omega_s^2 \underline{M} + \underline{K} & \omega_s \underline{C} \\ -\omega_s \underline{C} & -\omega_s^2 \underline{M} + \underline{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_s \\ B_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{as} + P_{as} \\ f_{bs} + P_{bs} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

其中

$$f_{as} = \int_0^{2\pi/\omega} \underline{f} \cos s\omega t dt, \quad P_{as} = \int_0^{2\pi/\omega} \underline{P} \cos s\omega t dt \quad (5)$$

$$f_{bs} = \int_0^{2\pi/\omega} \underline{f} \sin s\omega t dt, \quad P_{bs} = \int_0^{2\pi/\omega} \underline{P} \sin s\omega t dt \quad (6)$$

式(4)中  $\omega_n = n\omega$ , 当  $n=1$  即只取一阶谐波近似时  $f_{a1}, f_{b1}$  便是等效线性刚度与阻尼。一阶谐波平衡又称等效线性化法在工程控制领域又称描述函数(Describe Function)法。曾长期以来被应用于简单非线性系统分析, 只曾被用于分析具有局部非线性元件之多自由度体系。对于摩擦问题就须要多谐解。用福里哀级数求解干摩擦系统之响应最早是 Den Hartog 做的, 文<sup>[7][8]</sup>将之推广到计算多自由度体系, 但局限于分析连续滑动的状态。文<sup>[5]</sup>将 I. H. B. 方法推广到分析具有停滞滑动的干摩擦系统之多谐解。I. H. B. 法是 H. B. 法与 G. R. 法之结合。由(4)~(6)式可以看出, 因为  $f(x, \dot{x})$  是  $x$  及  $\dot{x}$  之非线性函数, 故(4)式是  $A_n, B_n$  之非线性代数方程组, 可写成

$$R(q) = L(q) - N(q) - P = 0 \quad (7)$$

$$\underline{q} = \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix}, \quad \underline{P} = \begin{Bmatrix} P_{an} \\ P_{bn} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$L(q), N(q)$  分别为线性及非线性部分, 当只用单谐波近似时, 通常用简单迭代法求解(7)式, 对一些非线性不太强的问题, 用多谐近似时也曾采用简单迭代, 并发展了所谓杂交时域/频域方法<sup>[9][10]</sup>, 在计算非线性内力时用响应之时间历程, 在计算响应时用频响函数, 时域/频域之切换通过 F. F. T 及 I. F. F. T。即由一组假设的响应频谱  $A_n^{(i)}, B_n^{(i)}$  开始, 由 I. F. F. T 求得  $x(t), \dot{x}(t)$ , 代入  $f(x, \dot{x})$  本构关系, 求得  $f(t)$ , 再由 F. F. T 求得非线性力之福氏展开代入(4), 求得修正的响应谱  $A_n^{(i+1)}, B_n^{(i+1)}$ 。对于干摩擦具有停滞滑动现象等一类强非线性问题, 用简单迭代法不能保证收敛, 故发展了 G. N. R. 与 I. H. B. 法, 对(7)式应用 N. R. 法, 即令

$$R(q_0 + \Delta q) = R(q_0) + \left. \frac{\partial R}{\partial q} \right|_{q_0} \Delta q = 0 \quad (9)$$

$$\Delta \underline{q} = - \left[ \left. \frac{\partial R}{\partial q} \right|_{q_0} \right]^{-1} R(q_0) \quad (10)$$

$$\underline{q}^{(i+1)} = \underline{q}^{(i)} + \Delta \underline{q} \quad (11)$$

便是 G. N. R 法, 可见 G. N. R. 法是先由谐波展开及伽辽金法将运动微分方程组化为非线性代数方程组, 再用牛顿-拉甫法求解方程组。I. H. B. 法与 G. N. R. 法不同的是先将运动微分方程组用台劳(Taylor)展开作线性化近似, 再用谐波展开伽辽金法求解, 即在(3)式中令

$$L(x, \dot{x}, \ddot{x}, f, p, \omega) = \underline{M}\ddot{x} + \underline{C}\dot{x} + \underline{K}x - \underline{f}(x, \dot{x}, \omega) - P(t) \quad (12)$$

将(12)式作台劳展开, 并略去高阶项, 得到增量运动微分方程

$$L_0 + \left. \frac{\partial L}{\partial x} \right|_0 \Delta x + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right|_0 \Delta \dot{x} + \left. \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \right|_0 \Delta \ddot{x} + \left. \frac{\partial L}{\partial f} \right|_0 \Delta f + \left. \frac{\partial L}{\partial p} \right|_0 \Delta P + \left. \frac{\partial L}{\partial \omega} \right|_0 \Delta \omega = 0 \quad (13)$$

令

$$x = \sum (a_m \cos m\omega t + b_m \sin m\omega t) \quad (14)$$

$$\Delta x = \sum (\Delta a_m \cos m\omega t + \Delta b_m \sin m\omega t) \quad (15)$$

将(14)(15)代入(13)并用伽辽金法

$$\int_0^{2\pi/\omega} (L_0 + \Delta L) \begin{cases} \cos m\omega t \\ \sin m\omega t \end{cases} dt \quad (m = 1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

便得到以  $\Delta a_m, \Delta b_m$  为未知量的线性代数方程组,由假设的一组  $a_m^{(j)}, b_m^{(j)}$  开始可以求得  $\Delta a_m^{(j)}, \Delta b_m^{(j)}$ , 然后进行循环迭代

$$a_m^{(j+1)} = a_m^{(j)} + \Delta a_m^{(j)} \quad (17)$$

$$b_m^{(j+1)} = b_m^{(j)} + \Delta b_m^{(j)} \quad (18)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, k$$

当  $(\frac{\|a_m^{(j+1)}\| - \|a_m^{(j)}\|}{\|a_m^{(j)}\|}) < \varepsilon, (\frac{\|b_m^{(j+1)}\| - \|b_m^{(j)}\|}{\|b_m^{(j)}\|}) < \varepsilon$  时便得到收敛解( $\varepsilon$  为预先设定的相对误差)。

### 三、组抗凝聚与 I. H. B. 结合分析多自由度干摩擦阻尼结构

当多自由度结构具有干摩擦元件时,摩擦元件与结构联结点的作用力为  $F \text{Sgn}(\dot{z})$ ,  $F$  为摩擦力,  $\dot{z}$  为摩擦元二端点之相对变形速度。结构体系之运动方程为

$$\underline{M}\ddot{X} + \underline{C}\dot{X} + \underline{K}X = -F_0 \text{Sgn}(\dot{z}) + \underline{P}(t) \quad (19)$$

式(19)左端是线性结构之运动方程,  $\underline{P}(t)$  是外力矢量,  $F_0(\text{Sgn}\dot{z})$  是摩擦元件与结构的连接力矢量,  $\dot{z}$  之元素是摩擦元件二端之相对速度, 当有  $l$  个摩擦元件时

$$\underline{F}_0 \text{Sgn}(\dot{z}) = \sum_{i=1}^l [\dots F_{\alpha_i} \text{Sgn}\dot{z}_i, \dots - F_{\beta_i} \text{Sgn}\dot{z}_i, \dots]^T \quad (20)$$

$$\alpha_i - D. O. F. \quad \beta_i - D. O. F.$$

$\alpha_i, \beta_i$  分别代表第  $i$  个摩擦元二端点总体座标号。

$$\dot{Z}_i = \dot{X}_{\alpha_i} - \dot{X}_{\beta_i} \quad (21)$$

令

$$\omega t = \tau, \quad \frac{dX}{d\tau} = X', \quad \frac{d^2X}{d\tau^2} = X'' \quad (22)$$

则

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt} = \omega X', \quad \frac{d^2X}{dt^2} = \omega^2 X'' \quad (23)$$

I. H. B. 方法之第一步是将运动方程作台劳展开, 并取一阶线性化近似, 设对应于激振参数  $\omega_0$  及  $P_0$  之当前状态之响应为  $X_0$ , 临近之状态参数为

$$X(\tau) = X_0 + \Delta X \quad (24)$$

$$P(\tau) = P_0 + \Delta P \quad (25)$$

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \quad (26)$$

则增量运动方程为

$$\omega_0^2 M \Delta \ddot{X} + \omega_0 C \Delta \dot{X} + K \Delta X = \underline{R} + \underline{\Delta f} + \underline{\Delta\omega Q} + \underline{\Delta P} \quad (27)$$

其中

$$\underline{R} = - \{ \omega_0^2 M \underline{X}_0 + \omega_0 C \underline{\dot{X}}_0 + K \underline{X}_0 + F_0 \text{Sgn}(\underline{\dot{Z}}_0) - \underline{P}_0 \} \quad (28)$$

$$\underline{\Delta f} = - 2F_0 \delta(\underline{\dot{Z}}_0) \underline{\Delta \dot{Z}} \quad (29)$$

$\delta(\underline{\dot{Z}}_0)$  为 Dirac delta 函数, 是  $F_0 \text{Sgn}(\underline{\dot{z}})$  作台劳展开之一阶增量项

$$\underline{Q} = - (2\omega_0 M \underline{\dot{X}}_0 - C \underline{X}_0) \quad (30)$$

从(28)式可见, 当  $X_0$  恰好是运动方程之准确解时,  $\underline{R} = 0$ , 故  $\underline{R}$  又称校正项, 从一组假设的  $\underline{X}_0$  开始, 代入(27)求  $\Delta X$ , 修正  $X$  值, 反复迭代直至收敛。在计算系统之频率响应时, 通常保持激振力为常数, 在每个频率进行迭代时  $\omega$  也保持为常值, 故在式(27)中  $\underline{\Delta P} = 0$ ,  $\underline{\Delta\omega} = 0$ , 这种方法称为 I. H. B. 法之  $\omega$  增量功能, 即在迭代过程中保持幅度增量不变, 迭代求解  $\Delta\omega$ , 这里以  $\omega$  增量功能为例, 式(27)简化为

$$\omega_0^2 M \Delta \ddot{X} + \omega_0 C \Delta \dot{X} + K \Delta X = \underline{R} + \underline{\Delta f} \quad (31)$$

因为  $\underline{R}$  及  $\underline{\Delta f}$  中含有  $\text{Sgn}(\underline{\dot{Z}}_0)$  及  $\delta(\underline{\dot{Z}}_0) \underline{\Delta \dot{Z}}$ , 故式(31)是变系数微分方程, I. H. B. 方法之第二步就是用伽辽金法求这个方程组之近似解。对于多自由度体系, 用复数谐波展开可得较简洁之解

答,故令

$$X = \sum X_m e^{im\tau}, \quad Z = \sum Z_m e^{im\tau} \quad (32)$$

$$\Delta X = \sum \Delta X_m e^{im\tau}, \quad \Delta Z = \sum \Delta Z_m e^{im\tau} \quad (33)$$

将(32)(33)代入(31),并用伽辽金法,将式(31)乘以  $e^{-im\tau}$  并由  $0-2\pi$  积分之,则得到

$$\Delta \tilde{X}_n = -\tilde{X}_n + \tilde{H}_n P_n - \tilde{H}_n \{F_0 \sum_k \frac{iS_k}{2n\pi} (e^{-i\tau_{k+1}} - e^{-i\tau_k})\} - \tilde{H}_n \{F_0 \sum_m \sum_k \frac{im}{\pi |\tilde{Z}_0(\tau_k)|} e^{i(m-k)\tau_k} \Delta Z_m\} \quad (34)$$

$\tilde{H}_n$  是系统的第  $n$  阶频响应函数矩阵,其  $p$  行  $q$  列元素为

$$H_{p,q} = \sum_r \frac{\varphi_{pr} \varphi_{qr}}{-(n\omega_0)^2 + \omega_r^2 + 2in\zeta_r \omega_0 \omega_r} \quad (35)$$

$\varphi_{pr}, \varphi_{qr}$  分别为第  $r$  阶特征矢量中之第  $p$  及  $q$  个元素值,  $\omega_r^2$  为第  $r$  阶特征值,  $\zeta_r$  为第  $r$  阶模态阻尼比。

$\tau_1, \dots, \tau_k, \dots, \tau_M (\tau_1 < \dots < \tau_k \dots < \tau_M)$  为  $|Z(\tau)| = r$ , 在  $(0, 2\pi)$  区间内之  $M$  个零点,  $\tau_0 = 0, \tau_{M+1} = 2\pi$ 。

$$S_k = \begin{cases} +1, & \dot{Z}_0 > r \\ 0, & |\dot{Z}_0| \leq r \\ -1 & \dot{Z}_0 < -r \end{cases} \quad (36)$$

一般情况下,迭代只在非线性摩擦元内进行,故只须研究与摩擦元联结点之传递函数,该传递函数可以用有限元分析求得,也可以通过模态实验求得。对一个多自由度体结构,当只在局部点附加摩擦元件时,可将该系统视为附加摩擦杆件之线性结构,即一个线性结构上作用有若干成对而反向之摩擦力,因为在线性结构上加1个摩擦杆,相当于在杆与结构之连接点上加1对大小相同、方向相反之摩擦力,如图1。

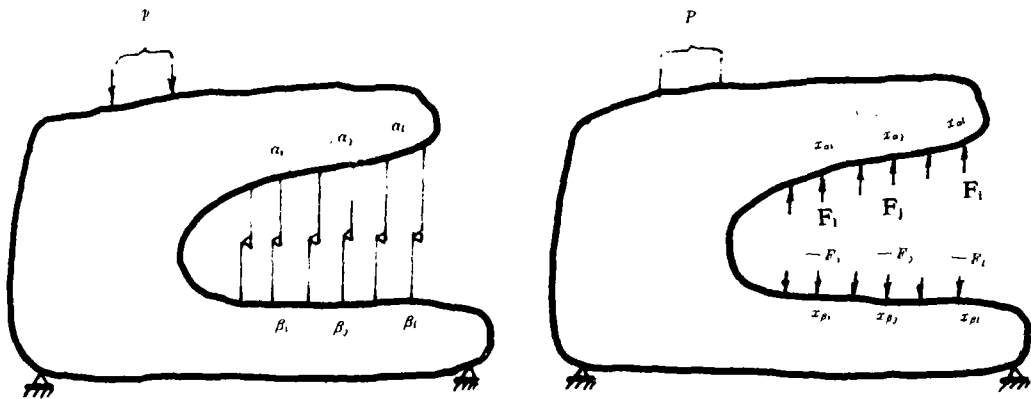


图 1A

图 1B

图 1 具有摩擦元件之结构示意图

由图1可知,第*i*个摩擦元二端点之相对位移频响为

$$\begin{aligned} Z_i &= X_{\alpha_i} - X_{\beta_i} \\ &= \sum_{j=1}^l (H_{\alpha_i \alpha_j} - H_{\alpha_i \beta_j} - H_{\beta_i \beta_j} + H_{\beta_i \alpha_j}) F_j + \sum_{r=1}^m (H_{r_i} - H_{r_j}) P_r \end{aligned} \quad (37)$$

$i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, l, r = 1, \dots, m$

$H_{qs}$ 代表在线性结构*s*点上作用单位简谐力,*q*点之频率响应,由(35)式决定之。

相似地有

$$\begin{aligned} \Delta Z_i &= \Delta X_{\alpha_i} - \Delta X_{\beta_i} \\ &= \sum_{j=1}^l (H_{\alpha_i \alpha_j} - H_{\alpha_i \beta_j} - H_{\beta_i \beta_j} + H_{\beta_i \alpha_j}) \Delta f_j + \sum_{r=1}^m (H_{r_i} - H_{r_j}) \Delta P_r \end{aligned} \quad (38)$$

利用(37)(38)二式,将与摩擦杆二端之相对位移集合为矢量,则有

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta Z}_n &= -\tilde{Z}_n + \tilde{H}_{P_n} \tilde{P}_n - \tilde{H}_{F_n} \left\{ \tilde{F}_0 \sum_{k=1}^m \frac{iS_k}{2n\pi} \times (e^{-i\tau_{k+1}} - e^{-i\tau_k}) \right\} \\ &\quad - \tilde{H}_{F_n} \left\{ \tilde{F}_0 \sum_{m=1}^m \sum_k \frac{im}{\pi |\tilde{Z}_0(\tau_k)|} e^{i(m-k)\tau_k} \Delta Z_m \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

$\tilde{H}_{F_n}, \tilde{H}_{P_n}$ 分别为与1对摩擦力及*m*个外力相关的凝聚的第*n*阶传递函数矩阵,其构成方式为:在完整的传递函数矩阵 $\tilde{H}_n$ 中先删除与摩擦力无关的行,再分别删除与摩擦力及外力无关的列,然后将对应于 $\alpha, \beta$ 的行相减,得到凝聚的 $l \times l$ 及 $l \times m$ 阶矩阵。 $\tilde{P}_n$ 及 $\tilde{F}_0$ 分别为删除零元素的外力(*n*阶高谐分量)与摩擦力凝聚矢量。式(39)可写成矩阵形式

$$C \tilde{\Delta Z} = -\tilde{Z} + \tilde{Z}_p + \tilde{Z}_s \quad (40)$$

$$C = \begin{bmatrix} [C_{11}] & \dots & [C_{1N}] \\ \vdots & & \\ [C_{Nl}] & \dots & [C_{NN}] \end{bmatrix} \quad (41)$$

其中每个分块子矩阵均为 $l \times l$ 阶方阵

$$[C_{mm}] = [I] + \tilde{H}_{F_n} \times \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & F_{0j} \sum_k \frac{im}{\pi |\tilde{Z}_0(\tau_k)|} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$[C_{m*}] = \tilde{H}_{F_n} \times \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & F_{0j} \sum_k \frac{im}{\pi |\tilde{Z}_0(\tau_k)|} e^{i(m-k)\tau_k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad m \neq n \quad (43)$$

$E_p$  及  $E_s$  分别为外力及摩擦力引起之相对位移频响矢量,由式(39)右端第二项及第三项决定。因为  $\tau_k$  要由  $Z_0$  为零的时间决定,故(39)式必须迭代求解。在摩擦力较大或激励频率很低时,一个周期内可能出现多次停滞-滑移现象,就很难求得准确的  $X$  之零点,此时就需用 Ramp Function  $D(Z_0)$  逼近摩擦力  $\text{Sgn}(Z_0)$

令

$$D(Z_0) = \begin{cases} +1 & Z_0 > r \\ Z_0/r & |Z_0| \leq r \\ -1 & Z_0 < -r \end{cases} \quad (44)$$

显然,当  $\gamma$  趋近于零时, $D(Z_0)$ 就趋近于  $\text{Sgn}(Z_0)$ 。如所周知,用牛顿法求解非线性方程组时,如果初值选得不合适就可能得不到收敛解。引用  $D(Z_0)$ ,可能从较大的  $\gamma$  值开始,易于保证收敛,然后逐步减小  $\gamma$  值,直到逼近  $\text{Sgn}(Z_0)$ 。用  $D(Z_0)$ 代替  $\text{Sgn}(Z_0)$ 后,

$$\begin{aligned} & \frac{F_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} D(Z_0) \Delta Z e^{-im\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi r} \sum_m \sum_k \frac{m \Delta Z_m}{m-n} (1-S_k) (e^{i(m-n)\tau_{k-1}} - e^{i(m-n)\tau_k}) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & \frac{F_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} D(Z_0) e^{-im\tau} d\tau \\ &= \frac{iF_0}{2\pi} \left\{ \sum_R S_{k/n} (e^{in\tau_{k-1}} - e^{in\tau_k}) - \sum_m \sum_k \frac{Z_m}{r} \times (1-S_k) \times \frac{e^{i(m-n)\tau_{k-1}} - e^{i(m-n)\tau_k}}{m-n} \right\} \end{aligned} \quad (46)$$

因此式(43)变为

$$[C_{m\alpha}]_{m \neq n} = H_{\nu\alpha} \times \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \frac{F_{0j}}{2\pi r} \sum_k \frac{m}{m-n} (1-S_k) (e^{i(m-n)\tau_{k+1}} - e^{i(m-n)\tau_k}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (47)$$

当  $m=n$ ,应用洛比达法则可得

$$[C_{m\alpha}] = H_{\nu\alpha} \times \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \frac{F_{0j}}{\pi} \sum (1-S_k) im \frac{\Delta\tau_k}{2r} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (48)$$

注意到在  $\tau_{k+1} - \tau_k = \Delta\tau$  时间内, $Z$  由  $-\gamma$  变为  $\gamma$ ,有

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{2\gamma}{\Delta\tau} &= |\dot{X}(\tau_k)| \\ \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} (e^{i(m-n)\tau_{k+1}} - e^{i(m-n)\tau_k}) &= i(m-n)e^{i(m-n)\tau_k} \Delta\tau \end{aligned} \quad (49)$$



就可以看出,当  $\Delta\tau \rightarrow 0$  时,(47),(48)二式还原为(43)(42)式。由(46)式可得

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_s = - \tilde{H}_{rs} F_0 \left\{ \sum_k \frac{iS_k}{2n\pi} \times (e^{i\tau_{k+1}} - e^{i\tau_k}) - \sum_m \sum_k \frac{iZ_m}{2n\pi} \times (1-S_k) \right. \\ \left. \times \frac{e^{i(m-n)\tau_{k+1}} - e^{i(m-n)\tau_k}}{m-n} \right\} \end{aligned} \quad (50)$$

当  $\Delta\tau \rightarrow 0$  时,(50)式右端第二项趋于零, $\tilde{Z}_s$  还原为(39)式右端第三项。因为  $Z$  为未知数,故式(40)必须迭代求解,当摩擦力较小时可用式(42)(43)及(39)式求  $C$  及  $\tilde{Z}_s$ ,当摩擦力较大或激励频率很低时,可用式(47)(48)(50)求  $[C]$  及  $\tilde{Z}_s$  代入(40)式,由指定的  $\gamma$  值开始,迭代求解

$$\Delta Z^{(i)} = C^{-1} \{ \tilde{Z}_r + \tilde{Z}_s - Z \}^{(i-1)} \quad (51)$$

$$\tilde{Z}^{(i)} = \tilde{Z}^{(i-1)} + \Delta Z^{(i)} \quad (52)$$

达到收敛后再减小  $\gamma$  值,再次迭代,逐次减小  $\gamma$  值,直至  $D(\tilde{Z}_0)$  逼近  $Sgn(\tilde{Z}_0)$ 。式(51)(52)中  $\Delta Z^{(i)}$ ,  $\tilde{Z}^{(i)}$  为频响系数,每步迭代过程中须用式(32)(33)将它们转为时域函数才能确定  $Z=0$  时的  $\tau_k$ ,故每步迭代均在频域求响应,再时域计算速度过零或  $Z_0 = \gamma$  的时间点,用复数 F. F. T 及 I. F. F. T 反复变换,进行分析。

#### 四、双线性及多项式滞迟非线性元件

理想的库伦摩擦力可以用  $F_0 Sgn(Z)$  描述,或用  $F_0 D(Z)$  逼近,实际结点中往往具有双线性或多项式滞迟非线性,双线性滞迟性能可用图 2 示意。

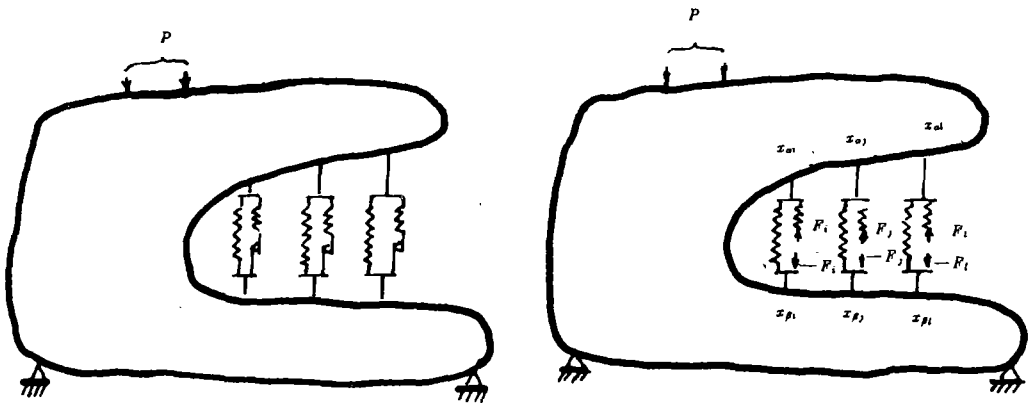


图 2A

图 2B

图 2 双线性滞迟结点示意

与图 1 中摩擦元不同的是,图 2A 中摩擦杆与线性结构相连时串联又并联各一个弹簧。对这种结构进行分析时,可用图 2B 的示意,以线性结构加弹簧  $k_s$  作为基本线性系统,通过有限元分

析或模态实验求得非线性杆二端之阻抗函数  $H_{\alpha}$ , 此时摩擦杆内力仍可用  $F_0 \text{Sgn}(\dot{z})$  或  $F_0 D(\dot{z})$  表示, 但

$$Z_i = X_{\alpha i} - X_{c i} \quad (53)$$

$c_i$  点之阻抗为

$$H_{\beta i \beta i} + \frac{1}{k_b} \quad (54)$$

故只须在式(37)式中将  $H_{\beta i \beta i}$  改为  $H_{\beta i \beta i} + \frac{1}{k_b}$ , 即

$H_{F_n}$  中对应于摩擦杆与弹簧  $k_b$  串联点之阻抗函数作如上修改后, 便可用以上分析干摩擦系统之全部公式计算双线性滞迟系统。更一般的弹塑性元件在简谐力的作用下具有多项式滞迟型非线性, 它在力-位移平面之滞迟线可表达为

$$f(Z, \dot{Z}) = g(Z) + h(Z) \text{sgn}(\dot{Z}) \quad (55)$$

或写成

$$f = f_{\pm} \quad (56)$$

$$f = f_{-} = g(z) + h(z) \quad \text{当 } \dot{Z} > 0 \quad (57)$$

$$f = f_{+} = g(z) - h(z) \quad \text{当 } \dot{Z} < 0 \quad (58)$$

通常  $g(z)$  可用奇次多项式表示,  $h(z)$  可用偶次多项式表示。将  $f(z, \dot{z})$  作一阶 Taylor 展开

$$f(z_0 + \Delta z, \dot{z}_0 + \Delta \dot{z}) \doteq f(z_0) + g'(z_0) \Delta z + h'(z_0) \text{sgn}(\dot{z}_0) + 2h(z_0) \delta(\dot{z}_0) \Delta \dot{z} \quad (59)$$

将式(59)代入(27)式, 再用复谐波展开、伽辽金方法求解谐波增量方程, 由于式(59)中有  $\text{sgn}(\dot{z}_0)$  及  $2\delta(\dot{z}_0)$ , 须要在时域决定  $\dot{z}_0 = 0$  的时间点, 才能用伽辽金法求积分, 计算量大而且收敛性差。一个近似的方法是用 Trace 法, 将  $h(z) \text{sgn}(\dot{z})$  用相同幅度与面积的椭圆代替, 求得等效粘性阻尼, 即令

$$4 \int_0^a h(z) \text{sgn}(\dot{z}) dz = \pi B_1 \omega a^2 \quad (60)$$

$$a = Z_{max} \quad (61)$$

$B_1$  为等效粘性系数, 为幅度  $a$  之函数。因此有

$$f(z, \dot{z}) \doteq g(z) + B_1 \dot{z} \quad (62)$$

$$f(z_0 + \Delta z, \dot{z}_0 + \Delta \dot{z}) \doteq f(z_0) + g'(z_0) \Delta z + B_1 \Delta \dot{z} \quad (63)$$

从一组假设的  $z_0$  开始, 由(32)式计算  $z_0(t)$ , 由非线性元之力位移本构关系计算  $f(z_0(t)) = f(t)$ ,  $g'(z_0(t)) = g'(t)$ , 用复 F. F. T. 计算

$$f(t) = \sum F_m e^{im\omega t} = \sum F_m e^{im\tau} \quad (64)$$

$$g'(t) = G_m e^{im\omega t} = \sum G_m e^{im\tau} \quad (65)$$

再代入(63)式, 用伽辽金法作谐波展开

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \Delta z, \dot{z}_0 + \Delta \dot{z}) e^{-i\omega\tau} d\tau \doteq F_i + \sum_m \sum_k G_m \Delta Z_i |_{m+i=k} + i n B_1 \Delta Z_i \quad (66)$$

由 (66) 式右端第二、三项可以计算式 (42) (43)  $[C_{mm}]$ ,  $[C_{mn}]$  阵中元素, 再用以上方法迭代求解。

### 五、算例

一个二层框架之频率响应用上述方法进行了计算, 框架之计算模型如图 3

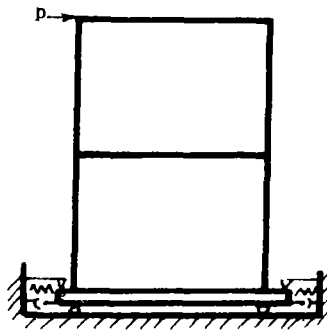


图 3 框架计算模型

框架座于滑动基础上, 基础是水平弹簧与干摩擦之组合件构成, 在框架顶端作用有简谐力。框架用有限元进行分析, 用 12 个单元梁共 13 结点在第 1 自由度, 微振力作用在第 27 个自由度, 用 I. H. B. 法计算了频率响应, 其结果见图 4, 框架之模态阻尼  $\beta = 0.015$ , 摩擦力水平  $F$  由 1 到 4 变形,  $f = \frac{F'}{p}$  为摩擦力与外力之幅度比。

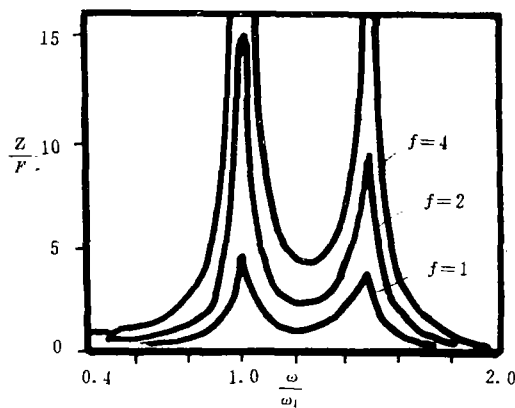


图 4 不同摩擦力框架之频响曲线

图 4 中, 垂直座标是滑动位移除以摩擦力  $\frac{Z}{F}$ , 水平座标是激励频率与框架差频之比, 显然, 摩擦滑动可使响应降低。应当说明的是用逐步积分法计算非线性结构之频率响应是十分费时的,

计算稳态响应至少要取八至十个周期,每个周期内又要分几步,每步要对一个大矩阵求逆,还要迭代,这个例题如用数值积分求解在 I. B. M. 4341 机上,使用 ADINA 程序,其 C. P. U. 要几个小时,因为有三条曲线,每条曲线又有很多频率,一个频率又要八至十个周期,用本文之 I. H. B. 法,可先用线性有限元程序计算出线性框架之传递函数(特征分析),然后在微机上作非线性运算,大大节约机时与储存。

## 六、结 论

用 I. H. B. 方法分析非线性结构之频率响应十分便利。将凝聚阻抗法与 I. H. B. 方法相结,分析具有局部非线性滞迟元件的结构,可大大节省机时与储量。对使用摩擦结点的抗震结构设计有参考价值。

致谢:本文得到香港政府 U. P. G. C 与我国国家自然科学基金资助,谨此致谢。

## 参考文献

- [1]Den Hartog, I. T., "Forced Vibrations with Combined Coulomb and Dry Friction." Trans A. S. M. E., 1931, paper APM-53-9, pp. 107-115
- [2]Yeh, G. C. K., "Forced Vibrations of a Two-Degree-of-Freedom System Combined Coulomb and Viscous Damping." J. Acoust. Soc. Amer. Vol. 39, 1966, pp. 14-24
- [3]Lau, S. L., cheung, Y. K., and Wu, S. Y., "a Variable Parameter Incremental Method For Dynamic Instability of Linear and Non-linear elastic systems." A. S. M. E. Jour of App. Mech., Vol. 49, Dec 1982, pp. 849-853
- [4]Lau, S. L., cheung, Y. K., and Wu, S. Y., "Incremental Harmonic Balance Method with Multiple Time Scales for Aperiodic vibration of Nonlinear Systems." A. S. M. E. Jour of Appl. Mech., Vol. 50, Dec. 1983, pp. 871-876
- [5]Pierre, C., Ferri, A. A., Dowell, E. H., "Multi-Harmonic Analysis of Dry Friction Damped Systems Using an Incremental Harmonic Balance Method" A. S. M. E., J. A. M., Vol. 52, Dec. 1985, pp. 958-964
- [6]Ferri, A. A., dowell, E. H., "Frequency domain solutions to Multi-Degree-of-Freedom. Dry Friction Damped Systems." Jour. of sound and Vibration, vol. 124, No. 2, 1988, pp. 207-224
- [7]田千里,李盛章,"用 SAP5 程序计算具有干摩擦之隔震问题"振动与冲击 1982 年第 4 期 PP. 28-33
- [8]Ostachowicz, w., "The Harmonic Balance Method For Determining The Vibration Parameters in Damped Dynamic Systems" Jour Sound and Vibration, Vol. 131, No. 3. 1989, pp. 465-473
- [9]Minnetyan, L., et al., "Dynamic Simulation of Structural systems with Isolated Nonlinear Congroments" Shock and Vibration Bull. 53, Pt. 3, 1983, pp. 63-71
- [10]Camerron, J. M., and Griffin, J. H., "An Alternating Frequency Time Domain Method for Calculating the Steady-state Response of Nonlinear Dynamic Systems" A. S. M. E. Jour of appl. Mech., Vol. 56. March, 1989, pp. 149-153.

## DYNAMIC ANALYSIS OF STRUCTURES WITH FRICTIONAL JOINTS

Tian Qianli

(Institute of Mechanics Chinese Academy of Sciences)

S. L. Liu, C. W. Wong

(Civil and Structural Engineering Department, HongKong Polytechnic)

### Abstract

The I. H. B. (Incremental Harmonic Balance) Method in association with receptance method was used to analyze the steady dynamic response of structures with locally frictional joints. The main advantage of this method is that the linear structure and frictional joints can be considered separately. The computation cost is very low, while the Degrees of freedom related to frictional are much fewer than that of a linear structure. A computer program was developed as a post processing subroutine, which can be connected with a general F. E. M program as SAP or ADINA.

**Key Words:** Nonlinear vibration, Structural Damping, Dry Friction Joints, Finite Element Analysis.