第9卷 第4期 空气动力学学报 Vol.9, No.4
1991年12月 ACTA AERODYNAMICA SINICA Dec., 1991

轴对称跨声速绕流的凸角流动分析*

程克明 林同骥
（南京航空学院） （中国科学院力学研究所）

摘要 本文以锥-柱-船尾形旋成体跨声速绕流为背景，讨论了轴对称跨声速绕流的凸角流动。给出了该流动特征、规律、并着重与相应平面二维 Prandtl-Meyer 型膨胀流动作了对比，指出了二者异同之处。

关键词 轴对称，跨声速，凸角流动。

符 号

C_p	压强系数	r_c	柱坐标向径
H_r、H_θ、H_ω	肩部坐标系 Lamé系数	R_0	圆柱段半径
M	局部马赫数	$\vec{v}$	当地流速
M_t	肩部膨胀马赫数	δ_h	流线水平倾角
v_r、v_θ、v_ω	肩部坐标系下的速度分量	δ_r	流动折转角
x、y、z	直角坐标	θ^0	声速线起始倾角
γ	比热比	μ	马赫角
δ_c	半锥角	ρ	密度
M_∞	来流马赫数	ϕ	扰动位势
r、θ、ω	肩部坐标系三个坐标		

引 言

锥-柱-船尾这类旋成体外形都有不连续肩部，分析肩部附近流动特征是了解整个绕流情况的重要组成部分；可加深对流场内部流动机制的认识。可以想象，跨声速气流绕过锥-柱-船尾形旋成体时，气流在肩部附近一定经历一个膨胀过程，它有何特征、规律如何、与相应平面二维 Prandtl-Meyer 膨胀不同之处是什么？还有，肩部的出现可视作外形的突然收缩，那么气流从圆锥段流向后续圆柱段是怎样适应下游物面边界的？诸如这些问题我们将通过肩部流动分析予以解答。

一、物理分析

跨声速锥-柱体表面压强分布可用图1中曲线定性表示[1,2]。由此可见，前部锥面上

* 国家自然科学资助项目。
本文于1989年12月27日收到，1990年10月28日收到修改稿。

流动处于亚声速受压加速状态。在肩部达到声速并迅速膨胀。文[3]结果表明，围绕肩部的一片扇形膨胀区内等马赫线基本为直线，见图2。另外，文[4]在研究肩部流动时近似用P-M公式计算气流在肩部膨胀终止的马赫数 M_t，结果与实验吻合很好。这些说明肩部膨胀近似具有局部锥型流特征。而且看到，膨胀起始和终了的等马赫线均不垂直当地物面，说明膨胀区取向和范围不仅由物面条件决定，还与 M_∞ 数有关。从文[5]流场显示结果看，柱面侧体激波系第一道波就发自肩部，见图3，且有一定倾角，说明气流膨胀终了后达到超声速状态，并出现膨胀过度，流动方向斜冲柱面(参见图4、7)，否则不会形成侧体波系。这同时也说明气流从锥面转到柱面，不是由单一膨胀过程实现的，而由膨胀接压缩两个环节完成。

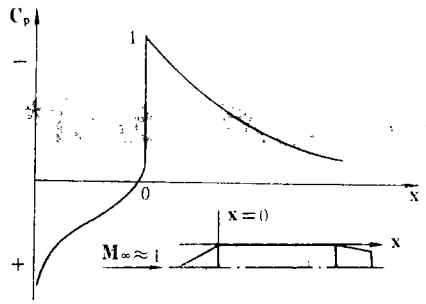


图1 锥-柱上典型压强分布
Fig.1 Typical pressure distribution on a cone-cylinder

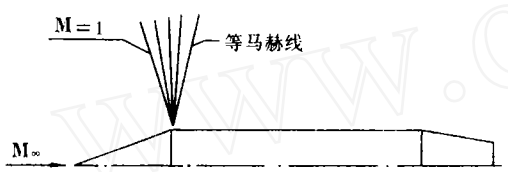


图2 肩部等马赫线
Fig.2 Iso-Mach lines around the shoulder

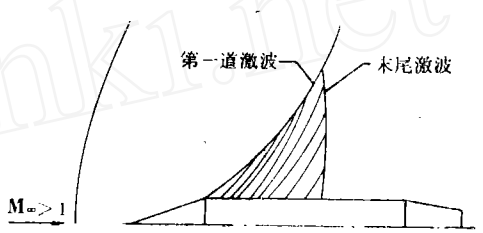


图3 柱面侧体激波系
Fig.3 Lateral shock waves on the cylinder

以上明确了轴对称跨声速凸角流动特征，它与平面二维凸角流动有何区别呢？研究发现，二者整个流动过程、所经历环节大致一样，但有些环节进行的情况有很大差异，主要表现在肩部膨胀域取向和肩部后的压缩程度不同。由连续方程知道，轴对称体和平面二维体对气流的约束作用不同。气流受压时，前者对气流扰动作用小于后者，故在同样来流条件下，前者肩部声速线较后者靠后。同样，在膨胀时，从声速线到流线最高点(见图4中 m 点)这段扇形区内，轴对称膨胀效率高于平面二维情况。这样轴对称绕流过凸肩后，紧接肩部下游将出现明显低压区，于是填补低压区使气流迅速向物面折转，也即膨胀域最后一条等马赫线较平面二维情况更向后倾斜。因此，轴对称凸角流动的膨胀域较平面二维时向下游倾斜。

平面二维绕流从肩部 $M=1$ 状态向平直段膨胀，若严格按Prandtl-Meyer模式，在肩部下游不应出现压缩，只要膨胀到一定程度（最大折转角可达130°左右）即可顺应物面。然而，实际过程总有粘性效应，致使气流折转后多少受到一定压缩[6]。后面将会看到，轴对称实际折转角小于半锥角 δ_0。

根据上述物理分析，得出轴对称体和平面二维物体肩部流动的流线走向和膨胀域示意图（图4），它形象地反映了二者肩部流动的差异。

这里有必要讨论一下所谓后肩流动。锥面接柱面是前肩情况，实际中还有柱面接船尾情况，这就是后肩流动。前后肩均属物形的一种收缩，但两种收缩产生的效果有明显的差异。在前肩绕流中，流动至少在膨胀开始的一段范围（从声速线到 m 点）内属纯粹膨胀；在后肩绕流中，由于轴对称性，膨胀一开始就伴随有压缩。因为膨胀的结果使气流向轴线方向靠拢，这必然同时产生挤压，但膨胀是第一性的，总的效果依然是膨胀，实验也证实了这一点[4]。图 5 给出了一个后肩流动对比的例子，可见轴对称膨胀后的压缩的确是较强烈的。

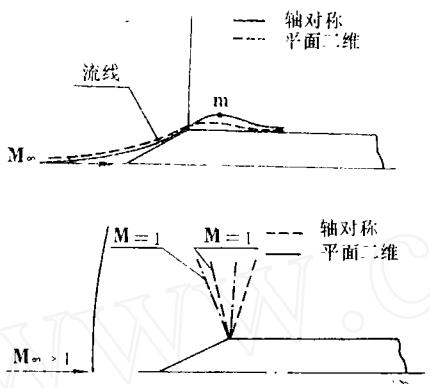


图 4　前肩流动对比

Fig.4　Comparison of the flows past the front shoulders

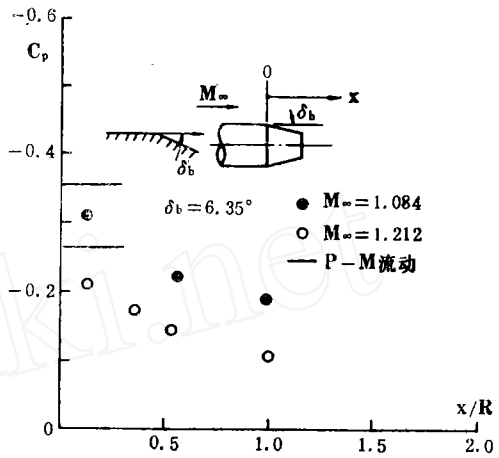


图 5　后肩流动对比

Fig.5　Comparison of the flows past the aft shoulders

二、数学分析

为定量刻划肩部流动规律，对这一流动过程作数学分析。前面指出，肩部流动近似具有局部锥型流特征。为此，建立图 6 所示的坐标系。以肩部轮廓线为基线（零 r 线），

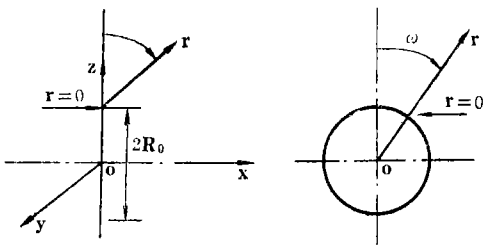


图 6　肩部坐标系

Fig.6　Frame of coordinates on the shoulder

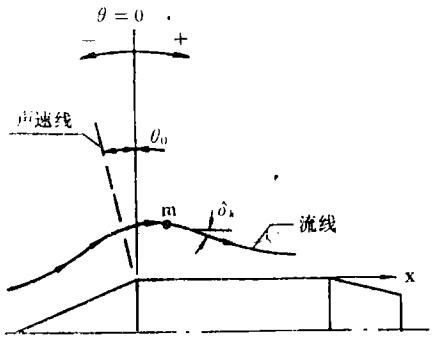


图 7　肩部流动方向

Fig.7　Directions of flow at the shoulder

θ 代表纵向角，ω 为径向角。该坐标系与 $oxyz$ 直角坐标系之关系为

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta \\ y &= (r\cos\theta + R_0)\sin\omega \\ z &= (r\cos\theta + R_0)\cos\omega \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

由此得 Lamé 系数如下

$$H_r = 1,\ H_\theta = r,\ H_\omega = r\cos\theta + R_0 \tag{2}$$

由连续方程

$$\nabla\cdot(\rho v) = 0 \tag{3}$$

因肩部近似具有锥型流的特征，作为近似我们假设，$\partial/\partial r = 0$，轴对称条件：$\partial/\partial\omega = 0$ 和 $v_\omega = 0$ 得

$$\frac{dv_\theta}{d\theta} + \frac{v_\theta}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta} + v_r\cdot\frac{2r\cos\theta + 1}{r\cos\theta + 1} - v_\theta\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta + 1} = 0 \tag{4}$$

其中 r 已被 R_0 无量纲化。由无旋条件得

$$v_\theta = \frac{dv_r}{d\theta} \tag{5}$$

由欧拉方程和能量方程得

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{2}{\gamma - 1}\frac{v_r\,dv_r + v_\theta\,dv_\theta}{A_\infty^2 - v_r^2 - v_\theta^2} \tag{6}$$

其中速度项已被来流速度无量纲化，而

$$A_\infty^2 = 1 + \frac{2}{\gamma - 1}\cdot\frac{1}{M_\infty^2}$$

$r \to 0$ 时，由(4)、(5)、(6)合并得

$$\left(\frac{d^2v_r}{d\theta^2} + v_r\right)\left[1 - \frac{2}{\gamma - 1}\cdot\frac{(dv_r/d\theta)^2}{A_\infty^2 - v_r^2 - (dv_r/d\theta)^2}\right] = 0 \tag{7}$$

解之得M数分布为

$$M = \left[\frac{2}{\gamma - 1}\cdot\frac{u(\theta)}{1 - u(\theta)}\right]^{1/2} \tag{8}$$

其中

$$u(\theta) = \sin^2[k(\theta - \theta_0)] + k^2\cos^2[k(\theta - \theta_0)]$$

$$k = \sqrt{(\gamma - 1)/(\gamma + 1)}$$

θ_0 即声速线走向(参见图7)，目前尚不能理论确定，它与物形和 M_∞ 有关。

气流从声速线膨胀到马赫数M时转过的角度 δ_r 为

$$\delta_r = \theta - \theta_0 - \operatorname{arctg}\left(\frac{v_r}{v_\theta}\right) = \theta - \theta_0 + \mu - \pi/2 \tag{9}$$

δ_r 亦可用当地M数表示如下

$$\delta_r = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}(k\sqrt{M^2 - 1}) - \operatorname{arctg}\sqrt{M^2 - 1} \tag{10}$$

可见本文结果与平面二维 Prandtl-Meyer 公式在形式上是一样的，而在物理分析中曾

指出，流线最高点m之前的膨胀较平面二维时强烈；m点之后则不及平面二维情况。所以用上述公式刻划轴对称膨胀规律有一定近似性。从物理过程看，m点之前式(8)的结果似应偏小；在m点后则偏大。尽管式(8)与实际轴对称凸角膨胀有一定出入，但从文[3]给出的轴对称肩部膨胀区内等马赫线分布情况以及文[4]的分析结果来看，用式(8)估计M数分布不会有太大误差。

前面曾指出，气流从$M=1$膨胀到终了M数M_t总共折转角度$\delta_{rt}<\delta_c$。在此不妨以$M_\infty=1.1$、$\delta_c=20°$情况作一例子。M_t可按下式计算[4]

$$M_t=M_\infty\sqrt{1+(\gamma+1)\phi_x(0)} \tag{11}$$

而

$$\phi_x(0)=\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\delta_c}{\sqrt{1+\gamma}}\cdot\frac{1}{M_\infty}\right)^{2/3}+\frac{1-M_\infty^2}{(1+\gamma)M_\infty^2}$$

于是

$$M_t=1.524$$

代入式(10)得

$$\delta_{rt}=12.6°<\delta_c=20°$$

为了研究肩部附近的流动形态，让我们来考察膨胀和后续压缩过程中流动方向的变化情况。因声速线上流动方向垂直声速线，于是膨胀到某一M数对应的流线水平倾角（参见图7）为

$$\delta_h=-\theta_0-\delta_r=\mathrm{arctg}\left\{\frac{1}{k}\,\mathrm{tg}[k(\theta-\theta_0)]\right\}-\theta \tag{12}$$

此式规定流动方向与x轴正向夹角呈逆时针方向时为正，反之为负。通过实际考察柱面侧体激波系走向[5]和肩部下游马赫数分布[4]发现，肩部声速线是前倾的，即$\theta_0<0$。故声速线上

$$\delta_h=-\theta_0>0$$

随着θ增大，当$\theta=\theta_m$时，即流线达到最高点m时有

$$\delta_h=0$$

计算发现，此时相应的M数远没有达到M_t，说明气流还要膨胀，尽管这时δ_h已为零。因δ_h随M增大递减，因此进一步的膨胀必使$\delta_h<0$。可见，膨胀使流动不断转向，在$\delta_h=0$时并未终止，而是继续转向，这就是所说的过度膨胀。这样一来膨胀终了后流动已斜冲柱面，接下去必然是一个压缩。压缩迫使δ_h回升，最终使$\delta_h\to 0$以适应柱面边界。

受压阶段δ_h回升的过程亦可由控制方程予以说明。轴对称跨声速小扰动位势方程为

$$[1-M_\infty^2-(\gamma+1)M^2\phi_x]\phi_{xx}+\phi_{r_cr_c}+\frac{1}{r_c}\phi_{r_c}=0 \tag{13}$$

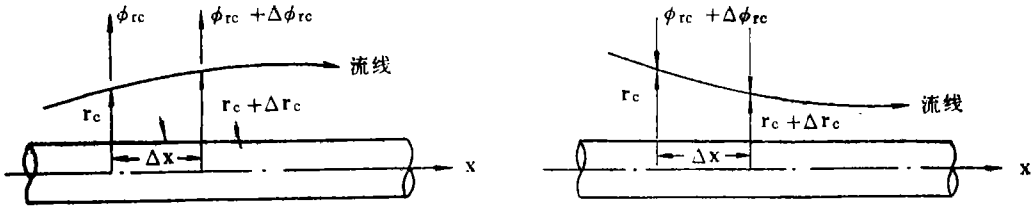
贴近物面即当$r_c\to R_0$时，近似有

$$\{[1-M_\infty^2-(\gamma+1)M^2\phi_x]\phi_{xx}+\phi_{r_cr_c}\}|_{r_c\to R_0}\approx 0 \tag{14}$$

受压阶段属超声速减速流动，于是

$$\phi_{r_cr_c}|_{r_c\to R_0}<0$$

从物理图案上看，这对应着两种流动型态，见图8。不难看出，图8(a)与实际的流动减速情况不符，(b)是合理的。由图8(b)可直接看出 δ_h 的确是回升的。



(a) $\Delta\phi_{rc}<0, \Delta r_c>0$ (b) $\Delta\phi_{rc}>0, \Delta r_c<0$

图8 柱面流动型态

Fig.8 Flow patterns on the cylindrical segment

从上述流线走向可以看到，气流过了肩部后并非立刻就顺应平直的柱面边界，而是由膨胀接渐近压缩两个过程逐渐适应柱面边界的。

三、结 论

轴对称跨声速绕流的凸角流动是一种膨胀加压缩的混合型流动，但总的效果是膨胀。它与平面二维 Prandtl-Meyer 流动的主要区别是：前者肩部膨胀域较后者向下游倾斜；膨胀呈过度态；过肩部后压缩较明显；须由膨胀、压缩双过程调节才能适应肩部下游物面边界，而从 $M=1$ 开始的 Prandtl-Meyer 膨胀，原则上只由单一膨胀过程即可适应下游边界。轴对称肩部膨胀规律可近似用平面二维 Prandtl-Meyer 公式刻划，但使用范围并非仅由物形确定，还与 M_∞ 有关。轴对称前肩膨胀和后肩膨胀亦有一定差异，后肩膨胀整个过程始终伴随有压缩。

参 考 文 献

[1] Hamne, R.L. and Leff, A.D., NASA CR-413 (1966).
[2] Page, W.A., NACA TN-4233 (1958).
[3] 克拉斯诺夫, H.Ф.,《旋成体空气动力学》, 科学出版社, (1965), 526—554。
[4] Wu, J.M. and Aoyama, K., AIAA Paper 72-137 (1972).
[5] 程克明,"尖头细长旋成体跨声速绕流的实验和理论研究"南京航空学院博士论文 (1989)。
[6] 夏皮罗, A.H.,《可压缩流体的动力学与热力学》(下册), 科学出版社 (1965), 205—207。

ANALYSIS OF TRANSONIC FLOW PAST AN AXISYMMETRIC CONVEX CORNER

Cheng Keming
(Nanjing Aeronautical Institute)

Lin Tongji
(Institute of Mechanics, Academia, Sinica)

Abstract On the background of transonic flow past a body of revolution with configuration of cone-cylinder-boattail, this paper discusses transonic flow past an axisymmetric convex corner. The characteristics and law of the corner flow are presented, and comparision of the corner flow with the corresponding Prandtl-Meyer type expansion in two dimensional flat-plane case is emphatically made.

Key words axisymmetric, transonic, convex corner flow.