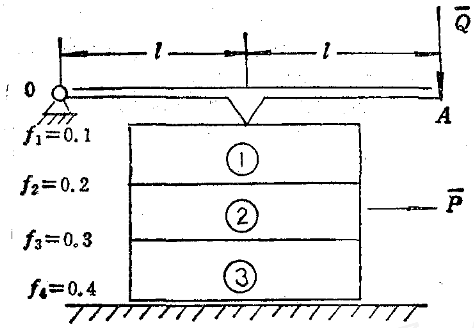

图 2

状态所对应的摩擦面上的F，Nf 值，找出首先达到 Fm 的摩擦面及物系实际的运动状态。

（4）用平衡方程求解

本例四种可能运动状态所对应的P值分别为，$P\leqslant Q$，$1.2Q$，$0.8Q$，Q. 其中 $P\leqslant 0.8Q$ 为本题所求．此时各面摩擦力分别为，$F_{01}=F_m=0.2Q$，$F_{12}=F_{21}=0.2Q<F_m$，$F_{23}=F_{32}=0.6Q=F_m$，$F_{34}=0.6Q<F_m$.

由上看出，这类问题不仅要在解前判断出摩擦力$\overline{F}$的方向，而且还要比较各F与F_{max}的数值，如再用将$\overline{F}$任意假设方向的做法是难以求解的.

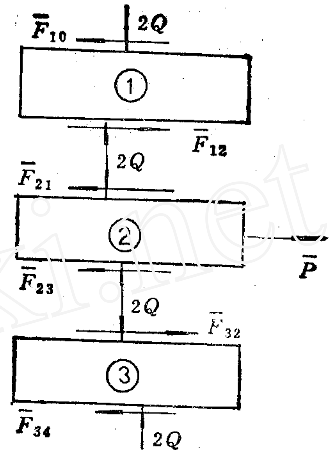

图 3

参考文献

[1] 王松林，关于滑动摩擦力的方向问题——与周庆华老师商榷，力学与实践，12,3(1990)，p.55.

[2] 周庆华，摩擦力方向问题及其判断方法，力学与实践，9,3(1987)，p.50.

[3] 周庆华，再谈静摩擦力——答王松林同志，力学与实践，12,3(1990)，p.58.

伯努利方程应用中的若干问题

刘 大 有

（中国科学院力学研究所）

在定常流动中，若流体重力势能的变化不重要，则伯努利方程为

$$\frac{1}{2}v^2+\int dp/\rho=c_1(\text{常数}) \tag{1}$$

在不可压缩流动中，ρ是常数，则有 $\int dp/\rho=p/\rho$.

伯努利方程形式简单，却很重要，有着广泛的应用．但是，若不注意其使用条件，就会造成误用．

首先，伯努利方程是从欧拉方程沿迹线积分得到的．因此，严格地说，伯努利方程只适用于无粘性流动，是沿迹线的机械能守恒关系．对于定常流动，流线与迹线重合．对于流场中不同的两条流线，若来源于同一气源，流动过程保持等熵，那么沿这两条流线的伯努利方程的积分常数相等．这时，分属这两条流线上的两点之间也满足伯努利方程．

从伯努利方程可以得出，动能增加将导致压强下降．机翼的上表面附近的流速比下表面快，压强比较低，由此获得升力．

但是，伯努利方程也常被不适当地引用．当物体两侧速度不同、速度低的一侧又有力作用于速度高的一侧时，很多人都用伯努利方程来解释，而不注意条件．

例如，在早年的中学课本中用以下的简单实验来

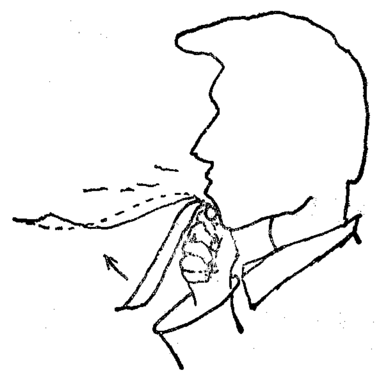

图 1

解释伯努利方程和机翼所受到的升力：用一个手指将纸条的一端压在下巴上，纸条的其余部分绕过手指向下垂下．当嘴用力吹气时，纸条向上飘起(图1)．对于现象被解释为：纸条上方流速比下方高，因而压强比下方低．

又如，在分析河床上一颗沙粒的受力时，也用伯努利方程解释它受到的升力．理由是沙粒上表面的流速高于下表面．

事实上，以上二例都不满足应用伯努利方程的条件．在第一例中，纸片上下的气体并不出于同一气源．在第二例中，沙粒前方的来流并不均匀，无粘性条件不满足．对于第一例，近似地可用射流的卷吸作用解释：从嘴里吹出的气流，通过粘性作用，将周围空气挟带着向下游流动，使嘴边压强降低，从而纸片升起．对于第二例，近似地可用 Saffman 力来解释：在一个无界的剪切流场中，小球不仅受到一个流向阻力，还受到一个侧向力．河底附近流速梯度较大，因此沙粒受到的侧向力较大．由于河床上的沙粒受床面影响大，因此用 Saffman 力来解释也只是定性的．

伯努利方程是流体的机械能守恒方程，不宜称为能量守恒方程．可压缩流体一维流动的能量方程是

$$\frac{1}{2}v^2 + h = c_2 \text{（常数）} \tag{2}$$

其中 h 是热焓．一般情况下它不等价于伯努利方程(1)．它的适用范围也与方程(1)不同．能量方程(2)的适用条件是：流动绝热，但并不要求等熵．流动可以有摩擦．即使通过强间断面(激波)，能量方程仍适用．伯努利方程(1)的适用条件是：无粘性，因而机械能不损失．流动过程有无热量输入，不影响它的应用．只有在等熵的流动中，伯努利方程(1)才与能量方程(2)等价．

不少学生在学习可压缩流动时，常将伯努利方程与能量方程混淆．若将伯努利方程称为能量方程，会助长这种混淆．

用群论方法求粘性流动的相似性解

鄧 庆 增

（北京大学力学系）

笔者在1985年讲授粘性流体力学以及近两年讲授基础流体力学期间，曾用群论方法重新推导一些著名的粘性流动相似性解，发现这个方法是简单而有效的．本来求相似性解先要进行量纲分析，找出自变量、因变量和特征物理常数的一些适当的无量纲组合，然后假设这些无量纲量之间有一定的函数关系，看是否能将偏微分方程简化为常微分方程．就是说，求相似性解依赖于对问题的物理本质有深切的了解，要经过一些试探性的步骤．而群论方法可以全然不考虑问题的物理方面，只要给定了偏微分方程组和定解条件，就可以按部就班地通过一些简单的微分和代数运算将相似性解找出来(如果相似性解存在的话)．所谓相似性解实质上是偏微分方程的某种对称性解．如果偏微分方程组和定解条件在某变换群 G 作用下不变，也就是说它具有某种内在的对称性，则必有这样的解，它在 G 作用下也不变，亦即具有同样的内在对称性．用群论方法研究微分方程的书已有多种，如文[1]和[2]．

1．平板边界层

平板置于 x 轴，与来流平行，无穷远处流速为 U．用流函数表示的边界层方程为

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}. \tag{1}$$

式中 ν 为运动学粘性系数．边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &y = 0,\ \psi = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \\ &y = \infty,\ \frac{\partial\psi}{\partial y} = U. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

引进自变量和未知函数的线性变换

$$x = A^{\alpha_1}x^*,\ y = A^{\alpha_2}y^*,\ \psi = A^{\alpha_3}\psi^* \tag{3}$$

式中 A，α_i 为实常数．线性变换(3)的全体记为 G．若定义两变换之积为接连进行两变换的变换，则 G 构成一线性变换群，因为两变换之积属于 G，单位变换(对应于 $\alpha_i = 0$) 属于 G，逆变换(对应于 $-\alpha_i$)属于 G．

如果方程组(1)和边界条件(2)对于线性变换群 G 不变，则必有相似性解．将(3)代入(1)和(2)，要使得方程和边界条件在线性变换群 G 作用下不变，必须

$$\alpha_1 = 2\alpha_2,\ \alpha_3 = 2\alpha_2 \tag{4}$$

由(3)和(4)可得到

$$\frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{y^*}{\sqrt{x^*}},\ \frac{\psi}{\sqrt{x}} = \frac{\psi^*}{\sqrt{x^*}} \tag{5}$$

上式告诉我们可以用 $y/\sqrt{x}$ 做新自变量，用 $\psi/\sqrt{x}$ 做新的未知函数，所以我们设

$$\frac{y}{\sqrt{x}} = C_1\eta,\ \frac{\psi}{\sqrt{x}} = C_2 f(\eta) \tag{6}$$

将上式代入方程(1)和边界条件(2)，经过一些简单的运算就可得到