

三点弯曲试样在程序块谱、Rayleigh窄带谱和Wirsching宽带谱下的疲劳裂纹扩展计算*

伍义生

(中国科学院力学研究所)

摘要 分别用分级应力法、等损伤应力法及均方根应力法对三点弯曲试样在程序块谱、窄带随机谱和宽带随机谱下的疲劳裂纹扩展进行了计算。以探讨均方根应力法是否适于三点弯曲试样在谱载下的疲劳裂纹扩展计算。

关键词 疲劳裂纹扩展 随机载荷 窄带谱 宽带谱

(一) 试样及材料特性

试样为三点弯曲试样，如图1所示。其几何尺寸在表1中给出。材料的化学成份和力学性能在表2和表3中给出。

表1 三点弯曲试样的几何尺寸(单位: mm)

跨距 L	试样宽度 W	试样厚度 B	初始裂纹尺寸 a_0	计算最终裂纹尺寸 a_f
160	40	22	5	20

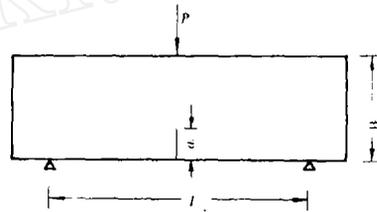


图1 三点弯曲试样示意图

材料在常幅加载下的疲劳裂纹扩展用Paris公式描述^[1]： $da/dn = c(\Delta K)^p$ (1)
 c 为 6.9787×10^{-15} ， p 为3.53， ΔK 的单位为

表2 A 537 钢的化学成份(%)

C	Si	Mn	S	P	Ni	Cr	Cu	Mo	V	Nb
0.16	0.44	1.43	0.003	0.012	0.016	0.021	0.148	0.036	0.018	0.026

表3 A 537 钢的机械性能

σ_s (MPa)	σ_b (MPa)	δ (%)	ψ (%)	E (MPa)
389.65	536.84	36.95	74.1	2.156×10^5

N/mm^2 ， da/dn 单位为 $mm/周$ 。

(二) 载荷谱

1. 程序块谱

程序块谱分4种情况。各级载荷的最大值 P_{max} 、最小值 P_{min} 、循环次数见表4。图2给出程序块谱1的示意图。

表4 程序块谱1、4级，无高载和低载

级别	P_{max} (N)	P_{min} (N)	n_i (周数)
1	29400	980	10
2	24500	980	40
3	19600	980	500
4	15680	980	1450

* 本文得到国家自然科学基金的资助

表 4 b 程序块谱 2、5 级，加一级高载

级别	$P_{max}(N)$	$P_{min}(N)$	n_i (周数)
1	34995	980	1
2	29400	980	10
3	24500	980	40
4	19600	980	500
5	15680	980	1450

表 4 c 程序块谱 3、5 级，加一级低载

级别	$P_{max}(N)$	$P_{min}(N)$	n_i (周数)
1	29400	980	10
2	24500	980	40
3	19600	980	500
4	15680	980	1450
5	14563	980	8000

表 4 d 程序块谱 4、6 级，加一级高载，一级低载

级别	$P_{max}(N)$	$P_{min}(N)$	n_i (周次)
1	34995	980	1
2	29400	980	10
3	24500	980	40
4	19600	980	500
5	15680	980	1450
6	14563	980	8000

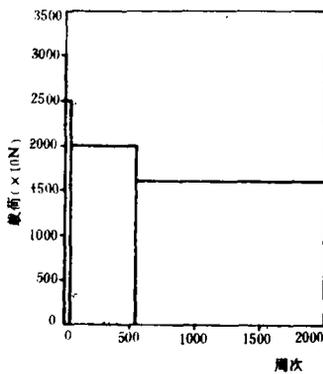


图 2 程序块载荷谱 1

2. Rayleigh窄带谱

对于一个稳态的高斯分布的窄带随机过程，其峰值应力符合Rayleigh分布。例如，L.P. Pook给出的代表北海海况的窄带随机载荷谱由 1 个短期海况组成，每一短期海况的应力峰值

符合Rayleigh分布^[2]。图 3 给出具有Rayleigh分布的峰值概率密度。

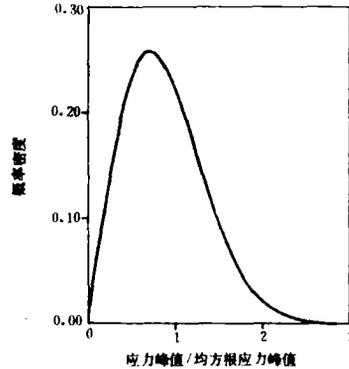


图 3 Rayleigh概率密度分布

本文计算了与 4 种程序块谱具有相同均方根峰值应力，但峰值符合Rayleigh分布下的疲劳裂纹扩展。Rayleigh分布的峰值概率密度可用下列公式表达^[3]：

$$P(S) = \frac{S}{\sigma^2} \exp(-S^2/2\sigma^2) \quad (2)$$

式中 $P(S)$ 是应力峰值 S 的概率密度， σ 是随机过程的均方根应力。在峰值均方根应力和随机过程均方根应力之间有如下的关系：

$$E(S^2) = \int_0^\infty S^2 \cdot \frac{S}{\sigma^2} \exp(-\frac{S^2}{2\sigma^2}) dS = 2\sigma^2$$

计峰值均方根应力为 S_m ，则

$$S_m = \sqrt{2} \sigma \quad (3)$$

3. P. H. Wirsching 宽带谱

P. H. Wirsching 通过海洋平台的静动力分析得出，随机波浪所激励的结构上的应力响应，通常不是窄带的，而是一个宽带的应力谱。应力频谱至少有两个峰，一个在波浪的主频处，是波浪强迫振动引起的。另一个峰在结构的自振频率处，是结构固有振动激发的。P.H. Wirsching 给出的海洋平台结构响应的宽带应力谱为^[4]：

$$W(f) = AH^2 \phi \frac{\exp[-1050/(2\pi T_d f)^4]}{T_d^2 (2\pi f)^3 [(1 - (f/f_n)^2)^2 + (2\zeta f/f_n)^2]} \quad (4)$$

式中 $W(f)$ 为谱密度， A 为标定系数， H 为有效波高， T_d 为波浪的穿零周期， ζ 为阻尼系数， f_n 为结构的固有频率， ϕ 为应力随波高变化的

指数。图4为一个典型的宽带应力谱($T_d=13.6s$, $f_n=0.2206$ 1/s, $\zeta=0.05$, $\phi=1.5$)。

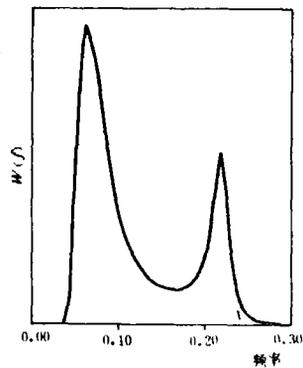


图4 宽带应力频谱

Rice给出宽带应力频谱的峰值概率密度表达式^[5]:

$$P(S) = \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{S^2}{2\sigma^2\epsilon^2}\right] + \frac{S}{2\sigma^2} \sqrt{1-\epsilon^2} \cdot \left\{ 1 + \exp\left[-\frac{S}{\sqrt{2}\sigma} \frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}\right] \right\} \cdot \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5)$$

式中 ϵ 为应力频谱的带宽,按下列公式计算:

$$\epsilon = (1 - m_2^2 / m_0 m_4)^{1/2} \quad (6)$$

式中 m_n 为频谱的 n 次谱矩:

$$m_n = \int_0^\infty f^n W(f) df \quad (7)$$

图5给出与图4宽带应力谱相应的峰值概

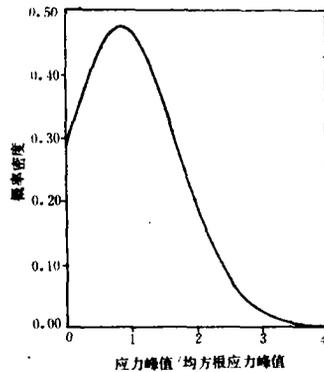


图5 宽带应力谱的峰值概率密度

率密度。本文计算了与程序块谱1具有相同均方根应力,但具有不同带宽的宽带应力谱下的疲劳裂纹扩展寿命。带宽的不同是由于结构具有不同的自振频率造成的。表5和图6给出带

宽随结构自振频率的变化。表中 f_d 为波浪频率。

表5 带宽随结构自振频率的变化

f_d (1/s)	f_n (1/s)	f_d/f_n	ϵ
0.0735	0.0735	1.0	0.1803
0.0735	0.1103	1.5	0.3055
0.0735	0.1471	2.0	0.4565
0.0735	0.1838	2.5	0.5926
0.0735	0.2206	3.0	0.6978
0.0735	0.2574	3.5	0.7728
0.0735	0.2941	4.0	0.8247
0.0735	0.3309	4.5	0.8606
0.0735	0.3675	5.0	0.8859

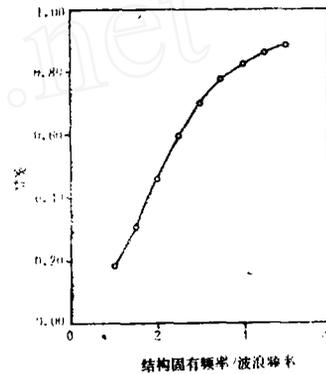


图6 应力谱带宽随结构自振频率的变化

(三) 疲劳裂纹扩展寿命计算方法

1. 分级应力法 对程序块载荷中的每一级应力计算疲劳裂纹扩展,一个程序载荷块所产生的裂纹扩展为各级应力所产生的裂纹扩展的总和:

$$\sum_{\text{一块}} da = \sum c (\Delta K_i)^{m_i} n_i \quad (8)$$

式中 ΔK_i 为程序块载荷中第 i 级的应力强度因子范围, n_i 为第 i 级的循环次数。按分级应力法计算每一程序块所产生的裂纹扩展,直至疲劳裂纹长度达到最终裂纹尺寸。由此得出由初始裂纹尺寸扩展为最终裂纹尺寸所需的循环块数,称为BTF(Block To Failure)。应力强度因子范围按下列公式计算:

$$\Delta K = \frac{\Delta PY}{B\sqrt{W}} \quad (9)$$

Y 为形状因子, 对于 $L/W = 4$ 的三点弯曲试件

$$Y = [7.51 + 3.00 \left(\frac{a}{W} - 0.5 \right)^2] \sec \left(\frac{\pi a}{2W} \right) \cdot \sqrt{\tan \left(\frac{\pi a}{2W} \right)} \quad (10)$$

ΔP 为载荷范围

$$\Delta P = P_{\max} - P_{\min} \quad (11)$$

在 Rayleigh 窄带谱和 P. H. Wirsching 宽带应力谱的情况下, 应力范围取零到 4 倍均方根应力, 将此区间等分为 100 份, 每级应力的循环次数按峰值概率密度积分得出:

$$n_i = N \int_{S_i}^{S_{i+1}} P(S) dS \quad (12)$$

N 为一个循环块的总次数, 与程序块谱一块的总次数相同。式中 $P(S)$ 为峰值概率密度函数, 在 Rayleigh 窄带谱情况下为 (2) 式, 在宽带谱情况下为 (5) 式。用上述方法将 Rayleigh 窄带谱和 P. H. Wirsching 宽带谱转化为 100 级程序块谱, 然后按分级应力法 (8) 式计算疲劳裂纹扩展

2. 等损伤应力法 等损伤应力法是将程序块载荷下的疲劳裂纹扩展等价为一常幅加载下的疲劳裂纹扩展。常幅加载载荷范围大小的选取使常幅载荷下的疲劳裂纹扩展与程序块载荷相同。程序块载荷下一个循环块所产生的裂纹生长为:

$$\sum da = \sum c (\Delta K_i)^p n_i \quad (8)$$

在等价的常幅载荷下为:

$$\sum da = c (\Delta K_{eq})^p N \quad (13)$$

由 (8) 和 (13) 得出:

$$\Delta K_{eq} = \left[\sum (\Delta K_i)^p n_i / N \right]^{1/p} \quad (14)$$

$$\text{或 } \Delta P_{eq} = \left[\sum (\Delta P_i)^p n_i / N \right]^{1/p} \quad (15)$$

ΔK_{eq} 和 ΔP_{eq} 分别为等损伤应力强度因子范围、等损伤载荷范围。

3. 均方根应力法 均方根应力法是用均方根应力范围的常幅疲劳裂纹扩展代表程序块加载下的疲劳裂纹扩展:

$$\Delta K_{rms} = \left[\sum (\Delta K_i)^2 n_i / N \right]^{1/2} \quad (16)$$

$$\Delta P_{rms} = \left[\sum (\Delta P_i)^2 n_i / N \right]^{1/2} \quad (17)$$

式中 ΔK_{rms} 和 ΔP_{rms} 为均方根应力强度因子范围和均方根载荷范围。

(四) 计算结果

表 6 给出程序块载荷下的疲劳裂纹扩展寿命计算结果及试验结果的比较。从表 6 可以看出

表 6 程序块载荷下的计算结果与试验结果比较

载荷谱	计算结果 (BTF)			试验结果 (BTF) (平均)
	分级应力法	等损伤应力法	均方根应力法	
程序块谱 1	135	135	145	127
程序块谱 2	134	134	144	220
程序块谱 3	45	44	47	115
程序块谱 1	45	44	47	133

出分级应力法和等损伤应力法的计算结果基本相同。在程序块谱 1, 既没有超载又没有大量低载的情况下, 三种方法的计算结果与试验结果相差不大。在程序块谱 2 有超载的情况下, 三种方法的计算结果远低于试验结果, 三种方法均未能考虑超载迟滞效应。在程序块谱 3 有大量低载荷循环的情况下, 三种方法过估了低载荷的疲劳损伤。这是由于三种方法只考虑了裂纹扩展的线性叠加, 未考虑载荷之间相互作用的缘故

表 7 给出 Rayleigh 窄带谱的计算结果与程

表 7 Rayleigh 窄带谱计算结果与程序块谱比较

载荷谱	程序块谱 (BTF)			相应的 Rayleigh 窄带谱 (BTF)		
	分级	等损	均方	分 级	等 损	均 方
块谱 1	135	135	145	88	90	145
块谱 2	134	134	144	88	90	144
块谱 3	45	44	47	28	30	47
块谱 1	45	44	47	28	30	47

序块谱计算结果的比较。从表 7 看出, 在 Rayleigh 窄带谱的情况下分级应力法和等损伤应力法也给出相同的结果, 但均方根应力法的计算结果与这两种方法是不同的。

表 8 给出 P. H. Wirsching 宽带谱下的计算结果, 它的均方根应力值与程序块谱 1 相同, 但是随着结构自振频率的改变应力谱的带宽不同。图 7 给出在同样均方根应力情况下破

表8 P.H.Wirsching谱下的疲劳裂纹扩展寿命计算结果

带宽 ϵ	破坏块数(BTF)		
	分级	等损	均方
0.1803	90	92	145
0.3055	93	95	145
0.4565	100	102	145
0.5926	110	112	145
0.6978	123	121	145
0.7728	137	138	145
0.8247	151	153	145
0.8606	161	166	115
0.8859	176	178	115

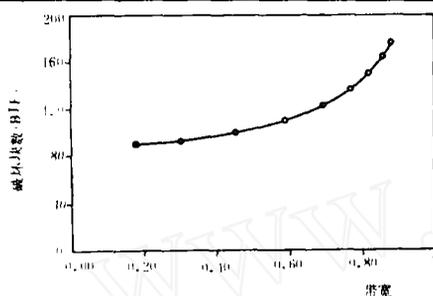


图7 破坏块数随带宽的变化

破坏块数随带宽的变化。可以看出在不同带宽下,按均方根应力法估算的寿命是相同的,但实际上破坏块数随带宽增加而增加。当带宽趋于零时破坏块数趋于Rayleigh窄带载荷的计算结果。

参 考 文 献

- 1 Paris P.C. and Erdogan F.: A Critical Analysis of Crack Propagation Laws, *J. Basic Engng. ASME Series D*, 1963, 85, 528
- 2 Pook L.P.: An Approach to Practical Load Histories for Fatigue Testing Relevant to Offshore Structures, *SCE Symposium on "Environmental Problems of North Sea Platforms"*, 9 March 1977
- 3 Newland D.F.: An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis, Longman, 1975
- 4 Wirsching P.H.: Digital Simulation Fatigue Damage in Offshore Structures, *Computational Methods for Offshore Structures*, Edited by Harry Armen, 1980, 69~76
- 5 Lin Y.K.: Probabilistic Theory of Structural Dynamics, McGraw-Hill, 1967, 303

FATIGUE CRACK GROWTH CALCULATION OF THE THREE POINTS BENDING SPECIMEN UNDER PROGRAM BLOCK SPECTRUM, RAYLEIGH NARROW BAND SPECTRUM AND WIRSCHING BROAD BAND SPECTRUM

Wu Yisheng

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences)

这说明均方根应力值的大小不是决定裂纹扩展寿命的唯一因素,应力频谱的形状如带宽的大小也有影响。根据图7,具有同样均方根应力,宽带载荷下的破坏块数可表达为:

$$\text{BTF(宽带)} = \text{BTF(窄带)} + 2\epsilon^{\beta} \quad (18)$$

在本计算情况下 $\alpha = 93.33$, $\beta = 2.37$ 。

(五) 结 论

(1) 在程序块谱、Rayleigh窄带谱和P.H.Wirsching宽带谱三种不同情况下,等损伤应力法给出与分级应力法相同的计算结果。

(2) 均方根应力不是决定变幅载荷下疲劳裂纹扩展寿命的唯一因素,应力峰值的分布、应力频谱的形状对疲劳裂纹扩展寿命的计算结果也有影响。

(3) 在宽带应力谱的情况下,均方根应力不变,带宽增加疲劳裂纹扩展寿命增加。

(4) 分级应力法、等损伤应力法、均方根应力法都是基于线性累积损伤,未考虑载荷之间的相互作用,在有超载停滞和大量低载的情况下应考虑采用考虑载荷相互作用的高级疲劳裂纹扩展计算模型。

本课题得到国家自然科学基金的资助,在此表示感谢。