

一种弹性损伤材料的 III 型裂纹解*

郝天护¹⁾ 张晓堤²⁾ 黄克智³⁾

提要 本文用复变函数中保角映射的方法求得了一种弹性损伤材料的 III 型裂纹在小范围损伤条件下的全场解。给出了损伤区形状、损伤耗散能、裂纹表面剪开位移及损伤区前方应力分布等数值结果。为校核小范围损伤条件,还计算了距裂纹尖端不同远处本文解与 k_{III} 场之差。

关键词 弹性损伤材料, III 型裂纹, 小范围损伤

符 号

k_{III} 线弹性 III 型应力强度因子,
 \bar{G} 材料的弹性剪切模量,
 $\bar{\tau}_{xx}, \bar{\tau}_{yy}$ 剪应力分量,
 $\bar{\tau}$ 合剪应力,
 $\bar{\tau}_D$ 材料的损伤剪应力,
 $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau$ 和 τ_D 用 \bar{G} 无量纲化后,

$G = 1$ 无量纲弹性剪切模量,
 $\tau_D = \tau_D$ 损伤剪应变,
 \bar{x}, \bar{y} 为原点置于裂纹端的面内坐标,
 \bar{w} 面外位移,
 x, y, w 分别以 $k_{III}/(\bar{G}\bar{\tau}_D)$ 无量纲化后,
 $z = x + iy = re^{i\theta}$ 无量纲复平面。

近些年来,断裂力学与损伤力学相结合已成为重要的研究趋势^[1]。由于裂纹尖端附近的应变集中必然导致该处材料中发生微裂纹扩展,空穴长大与会合等物理损伤过程,从而使尖端附近材料的力学行为变得与远处明显不同。因此,研究裂纹问题时在本构关系中考虑损伤可使分析结果更符合实际。此外,由于损伤需要耗散能量从而对裂纹扩展起到“屏蔽”作用。力学家与材料科学家已开始合作利用损伤机制增韧。因此损伤材料中裂纹问题的研究已受到力学界和工程界的共同重视。回顾断裂力学的发展历史,当线弹性断裂力学已不能满足工程实际需要时,塑性成为必须考虑的因素。作为弹塑性断裂力学奠基性工作的 HRR 解^[2,3]以及扩展裂纹解^[4]应运而生。现在,当断裂力学的研究已深入到细观层次时,力学工作者又面临突破经典本构关系的藩篱,提供损伤材料中裂纹问题理论解的使命。

损伤往往引起材料从硬化到软化直至完全丧失承载能力。材料宏观应力-应变响应的这种变化必然伴随着边值问题微分方程从椭圆型到双曲型的转变。求解这类数学上的“混合型”问题是众所周知的棘手问题。正因为如此,损伤材料中裂纹问题的研究还是一个远未很好解决的课题。Knowles 和 Stenberg^[5]以及 Hao^[6]分别求得了两种不同“混

* 本文是在国家自然科学基金(9187004-1)支持下完成的。

1) 中国纺织大学基础部,上海,200051.
2) 中国科学院力学研究所,北京,100080.
3) 清华大学工程力学系,北京,100084.

本文于 1990 年 5 月 22 日收到。

合型”材料的 III 型裂纹全场解,但他们的本构模型都是非线性弹性的。Bui 等^[7]研究了弹性损伤介质和弹塑性损伤介质中 III 型裂纹动力扩展问题,得到了封闭形式的定常解,对 I 型裂纹只给出了有限之解。黄克智、姜苇和余寿文^[8]得到了蠕变损伤材料 III 型定常扩展裂纹尖端场。

本文研究图 1(a) 中实线 $OPQS$ 所示弹性损伤材料的 III 型裂纹。这种材料是 Lemaitre 等^[9]提出的图 1(b) 所示硬化-软化材料当参数 $s \rightarrow \infty$ 时的极限情况。混凝土及某些地质材料的单轴应力应变关系与图 1(b) 很接近。因此研究本文材料具有典型意义。对于图 1(a) 中 $OPQ'S'$ 线所描绘的材料,文^[10]求得了 III 型问题的全场解。但该解弹性区中的材料被损伤边界扫过时,未曾经历 $\tau = \tau_D$ 就跃降到 $\tau = \tau_s$ 。

本文第一节给出问题的基本方程。根据解应满足的力学性质确定了解应具有的特征。第二节借助于从物理平面 z 到 ζ_1 平面的三级映射,得到了应力场和位移场的解析表达式。第三节进行数值求解并给出了解的渐近性质。

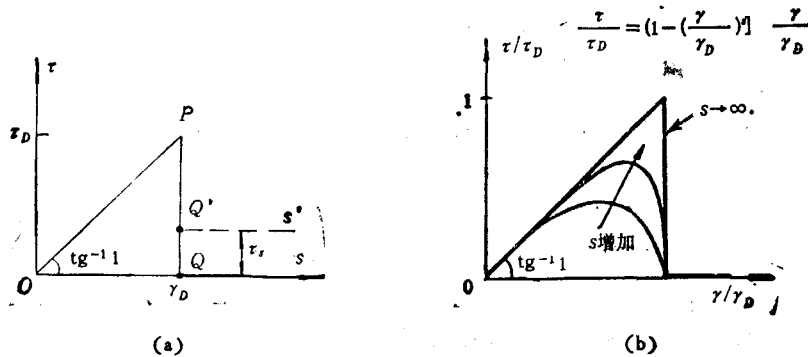


图 1

一、基本方程及解应具有的特征

本文研究小范围损伤条件下半无限长裂纹的反平面剪切问题。弹性区位移满足调和方程:

$$\nabla^2 W = 0 \quad (1.1)$$

以 Ψ 表示 W 之共轭函数,则复势 U 可写为

$$U = \Psi + iW \quad (1.2)$$

在小范围损伤条件下,无穷远处为 K_{III} 场,

$$\left. \begin{aligned} \text{复应力} \quad \frac{dU}{dz} = \tau_{yx} + i\tau_{xx} \rightarrow \left(\frac{\tau_D}{2z} \right)^{1/2} \\ \text{复势} \quad U = \Psi + iW \rightarrow (2\tau_D z)^{1/2} \end{aligned} \right\} \text{当 } z \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

从物理上显然可见,复势 U 和复应力 dU/dz 均为 z 平面的自共轭函数(即当自变量 z 取自身的共轭值时,函数值亦取其自身之共轭)。由于问题的反对称性,以下只研究 $0 \leq \arg z \leq \pi$ 的上半物理平面。裂纹表面条件为

$$\tau_{yx} = 0, \text{ 当 } \theta = \pi \quad (1.4)$$

$$\text{反对称条件: } \tau_{xx} = 0, \text{ 当 } \theta = 0 \quad (1.5)$$

(1.1)–(1.5) 构成本文解的基本方程。这是一个具有未知边界的边值问题。无量纲化后

方程中不出现远场幅度因子 k_{III} , 由此可知解是自相似的。设全场由弹性区(材料处于图 1(a) 上 OP 段)和损伤区(材料处于 QS 段)组成。我们要求本文解满足:

(1) 区别于[5]、[6], 当 k_{III} 增加时损伤区边界扫过的材料不允许从 QS 段回到 OP 段(损伤为不可逆)。

(2) 区别于[10], 所有质点都应经历 $P(\tau = \tau_D)$ 才能到达 QS 段。

不难推断, 满足 (1)、(2) 的解必须如图 2 所示: 损伤区边界具有与正 x 轴成 θ_d 角的直射线部分 CD , 曲线部分 \widehat{BD} 在 D 点与 CD 相切, 在 B 点与 x 轴垂直。 A_2 和 A_1 分别表示裂纹前方和后方无穷远处。在 \widehat{BD} 上弹性区侧应满足 $\tau = \tau_D$ 。图中虚线表示当 k_{III} 增加时损伤区自相似放大。利用(1.3)–(1.5)式分析可知, 彼此正交的 W 和 Ψ 的等值线应如点划线所示。合剪应力矢量 τ 沿等 Ψ 线指向 W 增加方向, 如图 2 中箭头所示。

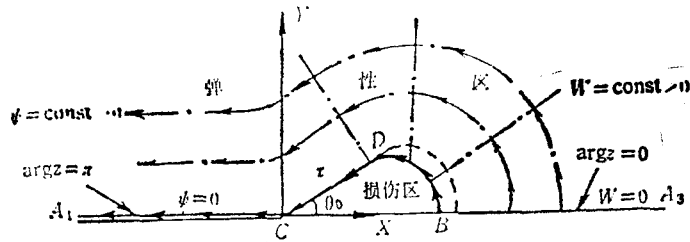


图 2 物理平面 z

二、保角映射

本节将 z 看作 U 的函数。图 2 描绘的上半 z 面的弹性区在复应力平面 $(\tau_{yy} + i\tau_{xy})/\tau_D$ 上映射为图 3 所示的半径为 1 的扇形区 $A_1A_2CDBA_2$, A_2 为裂纹表面有限远处一点, 该点 τ_{xx} 的代数值在 A_1C 上取极小。上半 z 面弹性区在 U 面上映射为 I 象限, $0 \leq \arg U \leq \pi/2$, 如图 4 所示。

引入新变量 ζ ,

$$\text{令 } U = \sqrt{\zeta} \tag{2.1}$$

$$\text{则 } \zeta = U^2 = \xi + i\eta \tag{2.2}$$

显然, U 面上 I 象限映射为 ζ 上半平面, $0 \leq \arg \zeta \leq \pi$, 如图 5 所示。实轴 ξ 上 C 、 D 点之坐标仍分别以 C 、 D 表示。 C 、 D 均为负实数。复应力变换为 ζ 的函数时记作 $f(\zeta)$, 即

$$\frac{dU}{dz} = \tau_{yy} + i\tau_{xy} = f(\zeta) \tag{2.3}$$

为求复应力构造辅助函数 $f_0(\zeta)$ 如下:

$$f_0(\zeta) = \zeta^{-\gamma+1/2}(\zeta - C)^{\gamma-1} \tag{2.4}$$

其中

$$\gamma = \theta_d/\pi, \quad 0 < \gamma < 1$$

不难看出, $f_0(\zeta)$ 为 ζ 之自共轭函数。

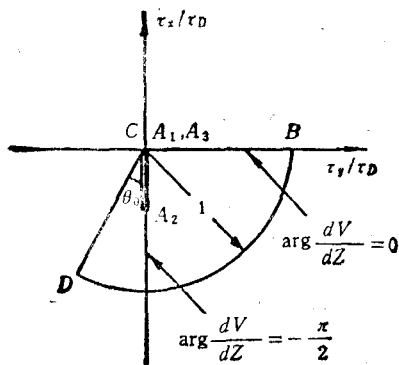


图3 复应力平面

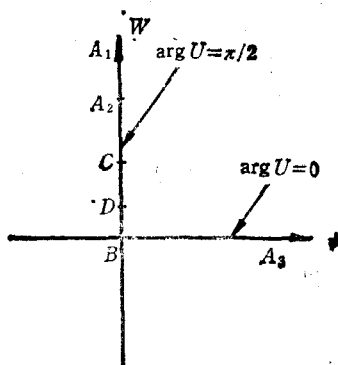


图4 复势平面

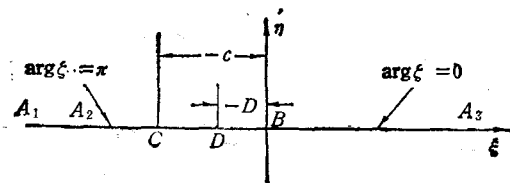


图5 \$\zeta\$ 平面

令

$$f_o(\zeta) = f(\zeta)/f_0(\zeta) \quad (2.5)$$

根据 $f_o(\zeta)$ 和 $f(\zeta)$ 的性质可知,在 ξ 轴上除 BD 段外应有

$$\text{Im} f_o(\zeta) = 0 \quad (2.6)$$

由于 $f_o(\zeta)$ 和 $f(\zeta)$ 均为自共轭函数,故 $f_o(\zeta)$ 也必为 ζ 面之自共轭函数。由于 z 面上无穷远变换到 ζ 面及下文将要引入的 ζ_1 面上仍为无穷远,故以下概称“无穷远”。

由(1.3)₂式并注意到(2.2),

$$z \rightarrow U^2/(2\tau_D) = \zeta/(2\tau_D), \text{ 在无穷远} \quad (2.7)$$

(2.7)式代入(1.3)₁有

$$\tau_{yx} + i\tau_{xz} = f(\zeta) \rightarrow \tau_D/\sqrt{\zeta}, \text{ 在无穷远} \quad (2.8)$$

令(2.4)中 $\zeta \rightarrow \infty$, 则

$$f_o(\zeta) \rightarrow 1/\sqrt{\zeta} \quad (2.9)$$

(2.8)和(2.9)式代入(2.5),得到

$$f_o(\zeta) \rightarrow \tau_D, \text{ 在无穷远} \quad (2.10)$$

引入变换

$$\zeta = -\frac{D}{4} \left(\zeta_1 + \frac{1}{\zeta_1} \right) + \frac{D}{2} \quad (2.11)$$

则 ζ 上半平面映射为 ζ_1 上半平面单位圆外域, $0 \leq \arg \zeta_1 \leq \pi$, BD 线段映射为上半单位圆周,如图6所示。令(2.11)式中 $\zeta = C$,可求出 C 点在 ζ_1 面实轴 ξ_1 上的坐标

c_1 ,

$$c_1 = -\beta - (\beta^2 - 1)^{1/2} < -1 \quad (2.12)$$

其中 $\beta = (2C/D - 1) > 1$ 当 $f_0(\zeta), f_s(\zeta)$ 和 $f(\zeta)$ 变换到 ζ_1 面时分别记作 $F_0(\zeta_1), F_s(\zeta_1)$ 和 $F(\zeta_1)$. 由于(2.11)之变换函数是自共轭的, 所以 $F_0(\zeta_1), F_s(\zeta_1)$ 和 $F(\zeta_1)$ 在 ζ_1 面仍保持自共轭性质. 将(2.11)用于(2.4)得

$$F_0(\zeta_1) = 2\sqrt{\frac{\zeta_1}{-D}} (\zeta_1 - 1)^{1-2r} \left[(\zeta_1 - c_1) \left(\zeta_1 - \frac{1}{c_1} \right) \right]^{r-1} \quad (2.13)$$

显然, 在 \widehat{BD} 上应要求

$$|F(\zeta_1)| = \tau_D \quad (2.14)$$

由(2.13)和(2.14)并注意到(2.5)则有

$$|F_s(\zeta_1)| = \frac{\tau_D}{2} \sqrt{-D} |\zeta_1 - 1|^{2r-1} \cdot \left| (\zeta_1 - c_1) \left(\zeta_1 - \frac{1}{c_1} \right) \right|^{1-r} \quad (2.15)$$

设

$$\begin{aligned} F_s(\zeta_1) &= \frac{\tau_D}{2} \sqrt{-D} \zeta_1^{-(r+m)} (\zeta_1 - 1)^{2r-1} \left(\frac{1}{\zeta_1} - c_1 \right)^{1-(r+m)} \\ &\quad \times \left(\zeta_1 - \frac{1}{c_1} \right)^{1-r} (\zeta_1 - c_1)^m \end{aligned} \quad (2.16)$$

其中 m 为待定的正整数. 可以看出, (2.16)式所设之 $F_s(\zeta_1)$ 是在单位圆外解析、单值且满足性质(2.6)和(2.15)的自共轭函数. 要求 $\zeta_1 \rightarrow \infty$ 时 $F_s(\zeta_1)$ 满足无穷远条件(2.10), 得到

$$\sqrt{-D} = 2(-c_1)^{r+m-1} \quad (2.17)$$

将(2.13)和(2.16)代入(2.5), 得到

$$F(\zeta_1) = \tau_{yz} + i\tau_{xz} = \tau_D \zeta_1^{\frac{1}{2}-(r+m)} \left(\frac{\frac{1}{\zeta_1} - c_1}{\zeta_1 - c_1} \right)^{1-(r+m)} \quad (2.18)$$

根据场在裂纹尖端 C 点附近的性质可确定 m 值. 如图 2 所示, 裂尖 C 点处于裂纹表面 CA_1 与损伤区边界 CD 相交的自由边界角点处. 从 CD 到 CA_1 , z 的幅角增加 $(1-\gamma)\pi$, 而复应力 $(\tau_{yz} + i\tau_{xz})$ 的幅角增加 $\gamma\pi$, 故在裂纹尖端 C 点附近必有

$$\frac{dU}{dz} = \tau_{yz} + i\tau_{xz} \propto z^{\gamma/(1-\gamma)}$$

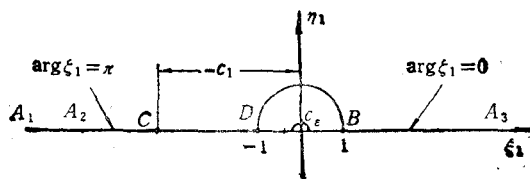


图 6 ζ_1 平面

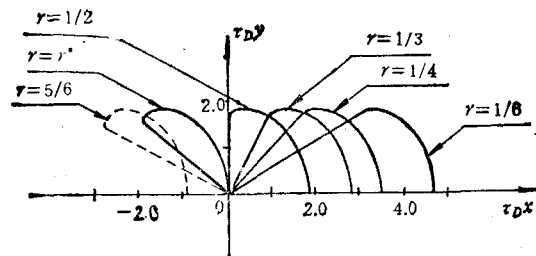


图7 损伤区形状

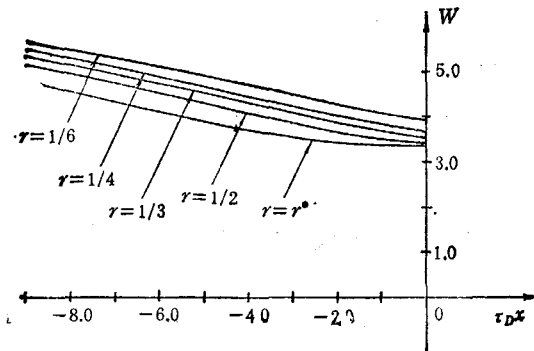


图8 裂纹表面剪开位移

由上式并利用(2.2)和(2.11)可知,

$\tau_{yz} + i\tau_{xz} \propto (\zeta - c)^r \propto (\zeta_1 - c_1)^r$, 在C点附近比较上式和(2.18)中 $(\zeta_1 - c_1)$ 的方次可见, $m = 1$, 则由(2.18)得到复应力在 ζ_1 面的解析表达式:

$$\tau_{yz} + i\tau_{xz} = \tau_D \zeta_1^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\zeta_1 - c_1}{1 - c_1 \zeta_1} \right)^r \quad (2.19)$$

这时(2.17)化为

$$\sqrt{-D} = 2(-c_1)^r \quad (2.20)$$

为了得到物理平面上的应力场, 必须给出 ζ_1 与 z 之间的关系. 由(2.1)、(2.3)和(2.11)式, 我们有

$$\tau_{yz} + i\tau_{xz} = \frac{\sqrt{-D}}{4} \left(\sqrt{\zeta_1} - \frac{1}{\sqrt{\zeta_1}} \right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{\zeta_1^2} \right) \frac{d\zeta_1}{dz}$$

比较上式和(2.19)并注意到(2.20), 我们得到

$$\left. \begin{aligned} dz &= \frac{-D}{8\tau_D} \Phi(\zeta_1) d\zeta_1 \\ \text{其中} \quad \Phi(\zeta_1) &= \left(\frac{\zeta_1 - 1/c_1}{\zeta_1 - c_1} \right)^r \left(1 + \frac{1}{\zeta_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

上式之积分形式为

$$z = \frac{-D}{8\tau_D} \int_{c_1}^{\zeta_1} \Phi(\zeta) d\zeta \quad (2.22)$$

将上式用于 B 点并注意 $\text{Im}z_B = 0$, 可得以下条件:

$$\text{Im} \left(\int_{c_1}^1 \phi(t) dt \right) = 0 \quad (2.23)$$

注意到 $\zeta_1 = 0$ 为 $\phi(\zeta_1)$ 之极点, (2.23) 式之积分路径可取为图 6 所示的, 从 C 点沿 ξ_1 轴向右, 经以 $\zeta_1 = 0$ 为圆心, 以 $\varepsilon (\ll 1)$ 为半径的半圆周 C_ε 到 B 点. 略去推导, 由 (2.23) 得到

$$-c_1 = (1 + \sqrt{1 + 4\gamma^2}) / 2\gamma \quad (2.24)$$

至此, 我们已得到由以下五式给出的本文解:

$$\left. \begin{aligned} \text{由(1.2)} \quad W &= \text{Im}U \\ \text{由(2.1)} \quad U &= \sqrt{\zeta} \\ \text{由(2.11)} \quad \zeta &= \frac{-D}{4} \left(\zeta_1 + \frac{1}{\zeta_1} \right) + \frac{D}{2} \\ \text{由(2.19)} \quad \frac{1}{\tau_D} (\tau_{yz} + i\tau_{xz}) &= \zeta_1^{-1/2} \left(\frac{\zeta_1 - c_1}{1 - c_1\zeta_1} \right)^\gamma \\ \text{由(2.22)和(2.21)} \quad \tau_D z &= \frac{-D}{8} \int_{c_1}^{\zeta_1} \phi(t) dt = \frac{-D}{8} \int_{c_1}^{\zeta_1} \left(\frac{t - 1/c_1}{t - c_1} \right)^\gamma \left(1 + \frac{1}{t} \right) dt \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

以上五式中包含 γ, c_1 和 D 三个常数. 当材料常数 τ_D 给定后, 对指定的 γ 值由 (2.20) 和 (2.24) 可确定 c_1 和 D . 这时对一定的 ζ_1 由 (2.25)₃ 和 (2.25)₄ 可求出与该 ζ_1 相应的 z 点及其应力, 由 (2.25) 前三式计算位移 W . 可以证明, (2.25)₄ 式给出的应力场在 \widehat{BD} 上满足 $\tau = \tau_D$, 在整个弹性区处处 $\tau < \tau_D$. 我们将在下节看到, 由 (2.25) 给出的解具有第一节中勾画的本文解所应具有的一切特征.

三、数值结果及解的渐近性质

数值求解的主要问题在于精确地计算 (2.25)₄ 式之奇异积分. $\zeta_1 = c_1$ 为被积函数之 γ 阶奇点 ($\gamma < 1$). 为了以较少的计算量获得较高的精确度, 将该积分分为两部分:

$$\int_{c_1}^{\zeta_1} \phi(t) dt = \int_{c_1}^{c_1+\varepsilon} \phi(t) dt + \int_{c_1+\varepsilon}^{\zeta_1} \phi(t) dt \quad (3.1)$$

利用 $\phi(\zeta_1)$ 在 $\zeta_1 = c_1$ 的 Taylor 展开计算第一个积分. 当 ε 取为 0.01 时, 取级数的前 3—4 项, 截断误差小于 10^{-6} — 10^{-8} . 第二个积分采用通常的 Gauss 积分方法, 很容易地达到了 10^{-6} — 10^{-8} 以上精度.

为计算损伤耗散能 E_d , 略去推导, 首先给出无量纲损伤区面积 A_d 的公式:

$$A_d = \frac{\pi}{4\tau_b^2} \left\{ (-c_1)^{2\gamma} (-c_1 + 1) - \int_0^{1/c_1^2} [t^\gamma (1-t)]^{-1} dt \right\} \quad (3.2)$$

假设构形为单位厚度, 则损伤耗散能为

$$E_d = \frac{1}{2} \tau_b^2 A_d \quad (3.3)$$

图 7 给出五种 γ 值的损伤区形状. 其中 $\gamma = \gamma^* = 0.778393$ 时 $X_B = 0$, $\gamma < \gamma^*$ 时

$X_B > 0$. $\gamma > \gamma^*$ 时 $X_B < 0$, 损伤区边界 \widehat{BD} 与 CD 段呈“8”字形相交, 如图中虚线所示, 是不合理的. 图 8 给出五种 γ 值的裂纹表面剪开位移曲线. 图 9 为两种 γ 值的在 $\theta = 0$ 和 π 上的应力分布. 图 10 给出损伤耗散能 E_d 随 γ 变化的曲线. 用 L 表示物理平面上损伤区的最大线尺寸. 在已计算的 γ 值范围内, 数值结果表明距裂纹尖端 C 点 $10L$ 远处, 本文解的合剪应力与 k_{III} 场的相对误差小于 10%, $20L$ 远处小于 5%.

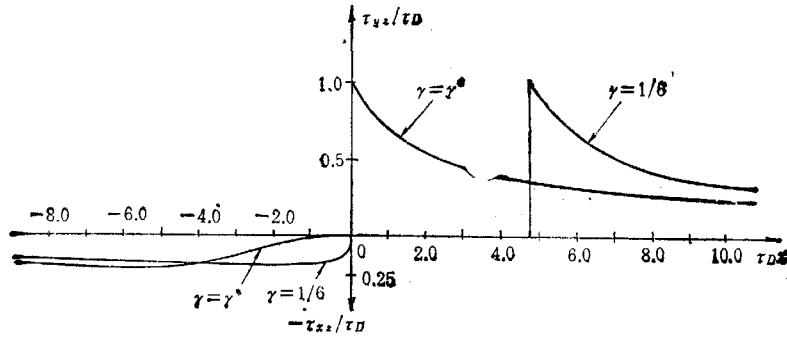


图 9 应力分布曲线

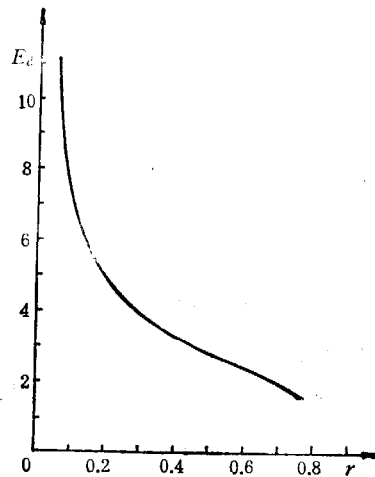


图 10 损伤耗散能 E_d 与 γ 的关系

可以证明, 对于一个给定的 γ 值解是唯一的. 而 γ 值或损伤区张角 $\theta_d = \gamma\pi$ 则需要根据一定的物理条件, 例如类似于 Griffith 条件的能量条件确定, 将由另文讨论.

为了观察本文解在裂纹尖端 C 点及损伤区前方 B 点附近的渐近性质, 首先将 (2.25)₁ 和 (2.25)₂ 式分别在这两点展开:

$$\frac{1}{\tau_D} (\tau_{yx} + i\tau_{zx}) = \frac{e^{-i(\frac{\pi}{2} + \gamma\pi)}}{\sqrt{-c_1(c_1^2 - 1)}^\gamma} (\zeta_1 - c_1)^\gamma + \dots \quad (3.4)_c$$

$$\zeta = C + (-c_1)^{2\gamma} \left(1 - \frac{1}{c_1^2}\right) (\zeta_1 - c_1) + \dots \quad (3.5)_c$$

在 C 点附近

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\tau_D}(\tau_{yz} + i\tau_{zx}) &= 1 - \left[\frac{1}{2} - \frac{c_1}{(1-c_1)^2} \right] (\zeta_1 - 1) + \dots \\ \zeta &= (-c_1)^{2r} (\zeta_1 - 1)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \text{在 } B \text{ 点附近} \quad (3.4)_B$$

$$\zeta = (-c_1)^{2r} (\zeta_1 - 1)^2 + \dots \quad (3.5)_B$$

为了将场的渐近性质表示在物理平面上, 将 (2.25)_s 在 C 点和 B 点附近展开:

$$\tau_{Dz} = \frac{e^{i\gamma\pi} \sqrt{-D}}{4(1-\gamma)} (c_1^2 - 1)^r \left(1 + \frac{1}{c_1} \right) (\zeta_1 - c_1)^{1-r} + \dots, \text{在 } C \text{ 点附近} \quad (3.6)_C$$

$$\tau_{Dz} = \tau_{DzB} + \frac{\sqrt{-D}}{2} (\zeta_1 - 1) + \dots, \text{在 } B \text{ 点附近} \quad (3.6)_B$$

由 (3.6)_C 和 (3.4)_C 得到

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx}/\tau_D &= -A_1 r^2 \cos(\lambda\theta - \lambda\pi) \\ \tau_{yz}/\tau_D &= A_1 r^2 \sin(\lambda\theta - \lambda\pi) \end{aligned} \right\} \text{在 } C \text{ 点附近} \quad (3.7)_C$$

$$\gamma\pi \leq \theta \leq \pi$$

其中

$$\lambda = \gamma/(1-\gamma)$$

$$A_1 = [2\tau_D(1-\gamma)]^2 (-c_1)^{r-1/2} (-c_1 - 1)^{-2\lambda} (-c_1 + 1)^{-\lambda} > 0$$

(3.7)_C 式表明, 由于损伤区的出现在裂纹尖端 C 点附近的弹性区中, 当 $r \rightarrow 0$ 时应力场不仅丧失了奇异性而且以 λ 阶的速度趋于零。

(3.6)_B 用于 (3.4)_B 有:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx}/\tau_D &= -A_2 \rho \sin \alpha \\ \tau_{yz}/\tau_D &= 1 - A_2 \rho \cos \alpha \end{aligned} \right\} \text{在 } B \text{ 点附近} \quad (3.7)_B$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi/2$$

其中

$$A_2 = \tau_D (-c_1)^{-r} \left[\frac{1}{2} - \frac{c_1}{(1-c_1)^2} \right] > 0$$

ρ, α 为物理平面上原点置于 B 点的极坐标。

将 (3.6)_{B,C} 两式分别用于 (3.5)_{B,C} 两式并注意到 (2.2) 和 (1.2), 我们得到位移场在物理平面的渐近表达式:

$$W = W_C \left[1 + B_1 r^{\frac{1}{1-\gamma}} \cos \left(\frac{\pi - \theta}{1 - \gamma} \right) \right], \text{在 } C \text{ 点附近, } \gamma\pi \leq \theta \leq \pi, \quad (3.8)_C$$

其中

$$W_C = (-c_1)^{r-1/2} (-c_1 + 1)$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{2\tau_D(1-\gamma)}{(-c_1 - 1)(c_1^2 - 1)} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} (-c_1 - 1)^2 > 0$$

在 B 点附近,

$$W = \tau_D \rho \cdot \sin \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.8)_B$$

与 k_{III} 场相比, 损伤使裂纹尖端 C 点的位移不再为零而取有限值。

参 考 文 献

- [1] 黄克智,《塑性力学进展》第二章,中国铁道出版社,1988.
- [2] Rice, J. R. and Rosengren, G. F., *J. Mech. Phys. Solids*, 1968, 16 (1): 1-12.
- [3] Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Solids*, 1968, 16 (1): 13-31.
- [4] G. Yu-Chen and H. Keh-Chih, "Advances in Fracture Research", Proceedings of Fifth Inter. Confer. on Fracture, 1981, 2: 669-682.

- [5] Knowles, J. K. and Eli Sternberg, *J. of Elasticity*, 1980, 10 (1): 81—110.
- [6] Hao, T. H., *Journal "Theoretical and Applied Fracture Mechanics"*, 1988, 9: 255—262.
- [7] Bui, H. D. and Ehrlacher, A., "Advances in Fracture Reseach", *Proceedings of Fifth Inter. Conf. on Fracture*, 1981, 2: 533—551.
- [8] 黄克智、姜莘和余寿文, 蠕变损伤材料 III 型定常扩展裂纹尖端场, 《塑性力学与地球动力学文集》, 北京大学出版社, 1990.
- [9] Lemaitre, J. and J. -L. Chaboche, *Mécanique des matérriaux solides*. (chapitre 7, §5.1)
- [10] Jin Zhihe, Yu Shouwen and Hwang Kehchih, *ACTA MECHANICA SINICA*, 1989, 5 (3): 227—236.

THE ANTI-PLANE SHEAR FIELD FOR CRACK IN INFINITE SLAB OF AN ELASTO-DAMAGED MATERIAL¹⁾

Hao Tianhu, Zhang Xiaoti, Hwang Kehchih

Abstract This paper is concerned with an infinite slab containing a semi-infinite crack, which is subjected to the anti-plane shear k_{III} field at infinity. The slab is made of elasto-damaged material. The analytical solution is obtained by use of conformal mapping. The shape of damage zone, damage dissipative energy, shear opening displacements on crack surface and some stress distribution curves are shown. The far field condition is checked. The asymptotic behavior near the tip of the crack is given.

Key words elasto-damaged material, mode-III crack, small scale damage

1) Supported by National Natural Science Foundation of China.