第20卷 第3期 力学进展 Vol. 20 No. 3
1990年8月25日 ADVANCES IN MECHANICS Aug. 25, 1990

边界元法在求解复合材料力学问题中的应用

张 恒
洛阳工学院（邮政编码471039）

王震鸣
中国科学院力学研究所，北京（邮政编码100080）

提要 本文讨论了边界元法在求解复合材料的微观力学、宏观力学和结构力学问题中的应用，并指出边界元法用于分析复合材料及其结构的力学问题的优点和局限性。

关键词 边界元法；复合材料；各向异性；非线性；边界积分方程；基本解；奇异积分

1 引 言

关于边界元法以及边界元法在求解各向同性材料力学问题中的应用，国外已出版了不少专著，发表了大量文献，我国也已进行了较多的研究，并取得了高水平的成果。但是，将边界元法用于求解复合材料及其结构的力学问题的研究工作，国内外都开展得很少。为了推进复合材料力学（包括微观力学和宏观力学）与复合材料结构力学的发展，很有必要积极开展这方面的研究。

复合材料及其结构具有一系列力学特点[43]，其中包括各向异性，微观构造上的不均匀性，宏观构造上的呈层性，某种程度的不连续性，各种强度的差别很大，需要考虑层间剪切变形的影响，物理非线性，几何非线性，缺陷与损伤分布的随机性和问题的复杂性等。关于复合材料及其结构的非线性力学问题，已在[44]中作了概要的介绍。对于复合材料及其结构的力学问题，只有几何形状、载荷分布、本构关系和边界条件等都很简单的情况，才有可能用解析方法求解，其余情况一般只能用数值方法求解。

数值解法很多，其中最主要的有差分法、有限元法和边界元法等。这些方法都有各自的特点和最适用的范围。在求解某些问题时，其中的某些方法可能优于其他方法而且更为有效；在求解另一些问题时，采用任何一种方法都可能得到较好的结果，不分上下；还有一些情况，由于问题过于复杂，采用任何一种方法都存在着较大的困难。实际情况很复杂，因此不能一概而论。

对于均匀各向同性材料，有限元法和边界元法都取得了重大的进展，已经趋于成熟，而且在固体力学和流体力学等各个领域中都得到了广泛的应用。

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

对于求解复合材料及其结构的力学问题，有限元法已取得了较大的进展，得到了相当广泛的应用。但是，用于复合材料板壳的有限元法，还有不少问题有待于研究和解决。边界元法在这方面的应用进展较慢。下面将介绍边界元法的许多优点，在推广应用到求解复合材料及其结构的力学问题上，既存在广阔的前景和潜力，又存在着许多困难和问题有待于解决。

[45]指出，边界元法的基本特点，是把所研究问题的控制微分方程变换成边界上的一组积分方程，然后用引进位于边界上的有限个单元，把这组积分方程离散化。离散化了的方程组只含有沿着边界上的节点未知量。可以看到，边界元法因其输入数据和计算的时间都比较少，因此在许多场合比有限差分法和有限元法这一类域型解法方便和优越。在均匀各向同性连续介质的许多方面，国际上边界元法都已大为发展，有许多宝贵的经验。事实证明，它是一种行之有效的重要方法。[46]指出，最近15年来，边界元法得到了很大的发展，是一种最有效的数值方法，其主要优点是使问题的维数降低1维。对于很广泛的一类问题，例如线弹性动力学问题，无限域或半无限域的问题，应力集中以及和裂纹有关的问题等，边界元法的优点最为明显。

边界元法分为两种基本类型[45]。其中的直接边界元法，是用有明确物理意义的变量，把问题化成表达式的；间接边界元法是用物理意义并不总是很清楚的变量把问题化成表达式的。对于求解 Laplace 或 Helmholtz 方程所控制的许多弹性力学问题以及其他势问题，根据间接边界元法的理论基础，以简单势或者双重势表示的公式，都可导出间接边界单元法。

将所讨论的区域划分成网格和单元的有限差分法与有限元法，也称为区域解法。但以区域解法为基础的方程组过于庞大，有不少问题难以解决。其中最大的难点是随着问题维数的增加，输入的数据急剧增多，为完成输入数据的工作，需要花很大的力量。要想提高计算精度，必须把单元划细，随之而来的是所需求解的方程阶数增高，需要花费比较长的计算机时。

边界元法可以求解一系列的问题，其中包括势论，弹性静力学，弹性动力学，弹塑性问题，粘弹性问题，断裂力学问题，热传导问题，热应力问题，粘塑性问题，非线性力学问题，流体力学问题，流体与结构相互作用问题等。新近的文献[45-62]表明了这一点。对于金属材料、工程塑料和复合材料非线性问题的研究，已越来越重要，利用其相应的线性问题所给定的边界元法进行分析求解，这是一个很自然的推广。可以把弹塑性问题的边界积分方程，归之为相似的线性问题，所不同的只是在最后所得的积分方程中，包含有因塑性变形的非线性所引起的假（pseudo）外力。求解这些积分方程，即使是在增量加载步长下，也需要进行迭代计算。还有一种边界体积单元法，把预先估计在完全加载过程中会产生塑性变形的内部区域和边界，用类似于有限元法的方法，划分成许多单元，因此节点未知量是从边界积分方程的体积分中确定下来的。联合求解所编制的一组含有节点未知量的方程，这些节点未知量出自边界及被离散化了的内部区域。因此在增量加载步长下，不需要进行迭代计算。用边界元法可以探讨热弹塑性问题和蠕变问题等。这些，在求解聚合物基体和金属基体复合材料的微观力学、宏观力学和结构力学的问题时，都可以加以推广应用或者借鉴。对于另外一些方面的问题，例如热传导、稳态势流和非稳态势流问题以及波动问题等，在各向异性介质中也会遇到这些问题，当然是大大增加了复杂和困难的程度。边界元法首先用于研究线性问题，然后推广应用到与时间有关的问题以及非线性问题，

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

和域型解法相比，边界元法能容易处理含有无限域的问题，因此有人试图把边界元法和有限元法或有限差分法结合起来，用较少的计算机时得出精确的数值结果．这是一种在一定场合下更为有效的方法．边界元法在大挠度和大应变问题中的应用，工作还不多，用于复合材料（或者只考虑到正交各向异性的情况）结构力学问题的研究则更少．在研究几何非线性和/或物理非线性问题方面，边界元法可能是很有效的．边界元法在其公式化时，需要无限域的基本解，因此越来越需要获得一种形式上容易用于边界元法公式的基本解．目前对于很多线性问题（主要是均匀各向同性介质），这些基本解是可以得到的，但是进一步的发展，就需要多方面（包括数学、物理、力学和复合材料等）人员的共同努力，才能得到一些问题的基本解，并推广应用到复合材料的力学问题中去，其中存在着较大的困难．但是，要得到横观各向同性和正交各向异性介质的基本解，肯定要比得到一般各向异性介质的基本解容易得多．有了各向同性、横观各向同性和正交各向异性材料的基本解，就可以解决大多数复合材料的微观力学、宏观力学和结构力学问题，取得很大的成效．下面再对若干问题进行介绍和讨论．

2 边界元法的特点

边界单元法的基本思想由来已久．最早作为应用于流体力学和势论的 Green 函数法，可以追溯到 Abel[1]，Kellogg[2] 和 Muskhelishvili[3] 等人的工作．不过早期的研究在于从理论上导出解的积分表达式，而不是为了数值计算的目的．直到本世纪60年代，随着电子计算机的迅速发展和广泛应用，边界元法作为一种有效的数值计算方法日渐渗透到工程实践的各个领域．随着边界元法的计算机软件不断出现，在求解势论、电场、流体力学、弹性力学、粘弹性力学、弹塑性力学、岩土力学、断裂力学以及复合材料力学问题等方面，这个方法已经或者将要象有限元法那样成为工程计算的重要手段之一．

和有限元法相比，边界元法最主要的优点是：输入数据简单，占机内存少，计算机时短，计算精度高．由于复合材料的不均匀性和各向异性所产生的复杂的力学行为，采用有限元法求解复合材料的力学问题，有时会遇到很大的困难．例如，对于纤维增强复合材料的叠层板，在划分有限元网格时需要分层进行．如果划分的网格过稀，每个三维单元都变成了薄片形状，这样会引入一些不合理的因素，从而导致病态的总体刚度矩阵．通常的叠层板壳结构，往往有 10 几个到近 100 个不同的单层（层片）．如果加密单元网格，将会大幅度增加计算自由度，增加计算机内存并延长计算时间．而采用边界元法则不需要在求解区域内部划分单元，而只要把区域的边界离散就行了，这就相当于把问题的维数减少了 1 维．从实用的角度评价一种数值方法，首先是计算精度，然后是计算时间（计算经费）以及准备数据所付出的劳动等等．很多问题的计算结果表明，边界元法在以上几个方面都可优于有限元法．Fenner[4] 曾对二维二次单元做过理论分析：正方形板处于平面应力状态的变形问题．采用有限元法求解，划分了 $n\times n$ 个 8 节点四边形单元．如果采用边界元法求解，则划分 $4\lambda n$（其中 $\lambda<1$）个边界元，即可达到同样的计算精度．考虑到有限元法的总体刚度矩阵是对角矩阵，可以采用一维紧缩存放，而边界元法的总体系数矩阵是一个满矩阵，两种方法的占机内存之比为

$$\text{边界元法内存/有限元法内存}\approx(7.1/n)\lambda^2 \tag{1}$$

两种方法运算次数之比为

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\text{边界元法运算次数/有限元法运算次数} \approx (12.6/n)\lambda^3 \quad (2)$$

对于[4]中的正方形板，$\lambda=1/2$. 显然，当$n>2$时，边界元法的占机容量和运算次数都明显低于有限元法.

在弹性力学中，可以从加权残数法或者功的互等定理导出问题的边界积分方程[5]. 采用Kelvin的基本解，通过把求解区域的边界离散，可以把边界积分方程化成线性方程组，解出边界上的未知位移和面力. 在计算边界元法的系数矩阵时，会遇到形如

$$I_1=\int_{\Gamma_j} g(r)\frac{1}{r}\phi d\Gamma,\quad I_2=\int_{\Gamma_j} h(r)\frac{1}{r^2}\phi d\Gamma,\quad I_3=\int_{\Gamma_j} f(r)\ln\frac{1}{r}\phi d\Gamma \quad (3)$$

的积分. 在某些情况下，上述积分具有奇异性. 这些奇异积分的计算对边界元法的精度有十分重要的影响，这也许可以看作是边界元法的一个弱点. 对于求解区域的表面积和体积之比很大的弹性体（例如形状复杂的薄壳和刚架等），以及对于需要在全域内求解的问题，采用有限元法比采用边界元法更好. 此外，采用边界元法求解非线性（包括几何非线性和物理非线性）问题所遇到的困难，尚未得到圆满的解决，有待于进一步的研究与开拓.

3 边界元法在求解复合材料宏观力学问题中的应用

鉴于用有限元法求解复合材料力学问题需要巨大的计算机内存和繁杂的数据准备工作，不少研究者把边界元法应用于这一领域. 然而，由于复合材料的各向异性和呈层性所产生的各种复杂的力学现象，边界元法在复合材料领域中的应用遇到了一些新的问题，需要克服某些难点. 由于还存在着一些尚未解决的问题，用边界元法求解复合材料的力学问题还有一定的局限性. 但是，由于前面提到的边界元法的独特优点，这一研究方向无疑具有很大的吸引力，且能期望取得有价值的结果.

把边界元法用于各向异性弹性体，首先遇到的困难是基本解问题. 对于各向同性弹性体，已经有了 Kelvin 基本解. 然而，对于三维的一般各向异性的弹性力学问题，迄今未见有封闭形式解析解的报道. 尽管已经找到无限大各向异性弹性体中作用有集中力时的形式上的解，而且这些解在某些特殊情况下是有用的[6,7]，但在一般情况下的求解问题尚未解决. 按照 John[8] 提出的方法，Synge[9]，Vegel 和 Rizzo[10] 曾给出三维各向异性弹性体基本解的积分公式

$$u^*_{ij}(\zeta,x)=\frac{1}{8\pi^2 r}\oint_{|q|=1} K^{-1}_{ij}(q)ds \quad (4)$$

式中 $K^{-1}_{ij}(q)$ 为特征矩阵 K_{ij} 的逆矩阵

$$K_{ij}=C_{ijkl}q_k q_l \quad (5)$$

式中 C_{ijkl} 为各向异性弹性常数张量. 同样，只有在几种特殊情况下，才能得到式（4）的解析解形式. 在一般情况下，只能采用数值积分方法. Wilson 和 Cruse[11] 研究并发展了[10]中所给出的方法. 令

$$G_{ij}(\nu_1,\nu_2)=\oint_{|q|=1} K^{-1}_{ij}(q)ds \quad (6)$$

式中ν_1和ν_2定义矢量 r 的方向. 把式（6）代入式（4），得到

$$u^*_{ij}=(1/8\pi^2 r)G_{ij} \quad (7)$$

由此可以计算在求面力时所需的位移对坐标的导数

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$u^*_{ij,k} = \frac{r_{,k}}{8\pi^2 r^2} G_{ij} + \frac{1}{8\pi^2 r} G_{ij,\alpha} v_{\alpha,k}, \quad \alpha = 1,2 \tag{8}$$

[10]和[11]的方法在本质上是利用数值表格表达基本解，需要在大型计算机上实施。因此，虽然是作为一般性方法提出的，但不能满足工程计算的要求。Nishimura和 Kobayashi[12]发展了一种非直接边界元法（间接边界元法）用于求解三维各向异性岩石的隧道问题。他们采用平面片状常数单元，利用势函数而不是基本解，通过 Fourier 变换残数算子运算给出有限区域内积分的最终表达式来进行数值计算，从而避开了使用解析的三维各向异性弹性体的基本解。但是，[12]中的计算结果，只能显示这种方法仅仅对横观各向同性材料具有较高的精度。Pan 和 Chou 给出了横观各向同性弹性体无限大域和半无限大域内的基本解[13,14]，[15]也讨论了类似的问题。

Rizzo 和 Shippy[16]最早把边界元法用于求解各向异性的平面问题。他们采用从 Green[17]早年的工作中导出的封闭形式的基本解，对于二维正交各向异性弹性体边界元法的计算，作了详细的讨论。二维无限大正交各向异性弹性体内作用有沿两个坐标方向的单位集中力时，其位移分量可以表达为

$$\left.\begin{aligned}
u^*_{11} &= K_a[\sqrt{\alpha_1} A_2^2 \ln \bar{r}_1 - \sqrt{\alpha_2} A_1^2 \ln \bar{r}_2] \\
u^*_{12} &= u^*_{21} = -K_a A_1 A_2 (\theta_1 - \theta_2) \\
u^*_{22} &= -K_a\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} A_1^2 \ln \bar{r}_1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} A_2^2 \ln \bar{r}_2\right]
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
& K_a = \frac{1}{2\pi(\alpha_1 - \alpha_2) S_{22}}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{S_{22}}(2S_{12} + S_{66}), \quad \alpha_1\alpha_2 = S_{11} S_{22} \\
& A_i = S_{12} - \alpha_i S_{22}, \quad i = 1,2 \\
& \bar{r}_i = \sqrt{x_1^2 + \frac{x_2^2}{\alpha_i}}, \quad i = 1,2 \\
& \theta_i = \arctan(x_2 / x_1 \sqrt{\alpha_i}), \quad i = 1,2
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

以上是位移基本解，面力基本解可以用下列公式表达：

$$\left.\begin{aligned}
p^*_{11} &= K_a\left[\frac{A_1}{\sqrt{\alpha_2}\, \bar{r}_2^2} - \frac{A_2}{\sqrt{\alpha_1}\, \bar{r}_1^2}\right] x_k n_k \\
p^*_{12} &= K_a\left[M_1 \frac{A_2}{\bar{r}_1^2} - M_2 \frac{A_1}{\bar{r}_2^2}\right] \\
p^*_{21} &= K_a\left[M_1 \frac{A_1}{\alpha_1 \bar{r}_1^2} - M_2 \frac{A_2}{\alpha_2 \bar{r}_2^2}\right] \\
p^*_{22} &= K_a\left[\frac{A_1}{\sqrt{\alpha_1}\, \bar{r}_1^2} - \frac{A_2}{\sqrt{\alpha_2}\, \bar{r}_2^2}\right] x_k n_k
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中

$$M_i = \sqrt{\alpha_i}\, x_1 n_2 - \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} x_2 n_1, \quad i = 1,2 \tag{12}$$

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

Lekhnitskii[18] 的早期工作以及 Tomlin[19,20] 也导出了正交各向异性体在平面应力和平面应变情况下位移和应力的基本解。例如，对于沿 x_3 轴方向分布有 x_2 轴向单位强度无限长分布载荷作用的无限大正交各向异性弹性体，在 x_1，x_2 平面内的应力分量，Tomlin 导出下列计算公式：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\sigma_{11}}{x_2} &= \frac{[(b^2+c)\sqrt{(B_{11}B_{22})}-2(a^2+c)b^2]x_1^2+B_{22}(b^2-c)x_2^2}{2\sqrt{2}\,\pi m b\sqrt{B_{11}}} \\
\frac{\sigma_{22}}{x_2} &= \frac{\sigma_{12}}{x_1} = -\frac{\sqrt{B_{11}}(b^2-c)x_1^2+\sqrt{B_{22}}(b^2+c)x_2^2}{2\sqrt{2}\,\pi m\, b}
\end{aligned}\right\} \tag{13}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
c &= \frac{1}{2\mu_{12}} \\
a &= [\sqrt{(B_{11}B_{22})}-B_{12}-c]^{1/2} \\
b &= [\sqrt{(B_{11}B_{22})}+B_{12}+c]^{1/2} \\
m &= B_{11}x_1^4+2(B_{12}+c)x_1^2x_2^2+B_{22}x_2^4
\end{aligned}\right\} \tag{14}
$$

$$
B_{i\alpha} = C_{i\alpha}-(C_{i3}C_{\alpha 3}/C_{33}) \tag{15}
$$

上式中的$C_{i\alpha}$为柔度模量分量。同样利用[18]的结果，Enayat 和 David[21] 用修正的边界元法求解了含加载孔的正交各向异性叠层板的连接件。在此以前，Benjumea 和Sikarskie[22]，Hong 和 Crews[23] 以及Lakshiminarayana[24] 等人也做过正交各向异性板的边界元分析。

需要指出，对于复合材料叠层板，作正交各向异性或准正交各向异性的铺层，不但它的力学问题比较容易求解，而且在绝大多数情况下的优化设计，也要求作正交各向异性的铺层。因此，正交各向异性情况下的边界元法，就可以解决许多实际问题，因而具有很大的实用价值。目前要充分发挥这方面的潜力。

一般各向异性薄板弯曲问题的控制方程由 5 个偏微分方程组成[25]。正交各向异性板的弯曲问题可化为确定一个势函数 ϕ，使其满足板的边界条件和下面的偏微分方程[25]：

$$
\begin{aligned}
&\left[D_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right]\phi \\
&-\frac{7}{5h}\Big\{a_{44}D_{11}D_{66}\frac{\partial^6}{\partial x^6}+[a_{44}(D_{11}D_{22}-2D_{12}D_{66}-D_{12}^2) \\
&+a_{55}D_{11}D_{66}]\frac{\partial^6}{\partial x^4\partial y^2}+[a_{55}(D_{11}D_{22}-2D_{12}D_{66}-D_{12}^2) \\
&+a_{44}D_{22}D_{66}]\frac{\partial^6}{\partial y^4\partial x^2}+a_{55}D_{22}D_{66}\frac{\partial^6}{\partial y^6}\Big]\phi = \frac{144}{h^6}z_2
\end{aligned} \tag{16}
$$

对于对称角铺设的叠层板，在控制方程中就要出现使求解复杂化的弯曲刚度D_{16}和D_{26}，如下式所示：

$$
D_{11}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3\partial y}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}+4D_{26}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x\partial y^3}+D_{22}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}=z_2 \tag{17}
$$

式中 w_0 为板中面的挠度函数，

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

求解各向异性薄板的弯曲问题可以采用差分法、有限元法以及各种近似的能量方法。但采用边界元法求解复合材料板弯曲问题的文献甚少。Mossakowski[26]曾导出无限大正交各向异性叠层板受侧向单位集中力时挠度的解析解。利用Mossakowski的基本解，张恒，McCammond和Tabarrok[27]导出正交各向异性薄板弯曲问题的边界元法的基本方程

$$\left.\begin{aligned} &Cw_i+\int_\Gamma(M_n^*\beta_n+t^*w)d\Gamma+\Sigma t_c^*w=\int_\Gamma(M_n\beta_n^*+tw^*)d\Gamma \\ &\qquad+\Sigma t_c w^*+\int_\Omega(pw^*+M_1^Tk_{11}^*+M_2^Tk_{22}^*)d\Omega \\ &C\beta_n^i+\int_\Gamma\left(\frac{\partial M_n^*}{\partial n}\beta_n+\frac{\partial t^*}{\partial n}w\right)d\Gamma+\Sigma\frac{\partial t_c^*}{\partial n}w=\Sigma t_c\frac{\partial w^*}{\partial n} \\ &\qquad+\int_\Gamma\left(M_n\frac{\partial\beta_n^*}{\partial n}+t\frac{\partial w^*}{\partial n}\right)d\Gamma+\int_\Omega\left(p\frac{\partial w^*}{\partial n}+M_1^T\frac{\partial k_{11}^*}{\partial n}+M_2^T\frac{\partial k_{22}^*}{\partial n}\right)d\Omega \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

其中，

$$\begin{aligned} w^*=\frac{1}{32\pi D_0}\Big[&\frac{x_1^2+\varepsilon^2x_2^2}{\mu_1}\ln(x_1^4+2\rho\varepsilon^2x_1^2x_2^2+\varepsilon^4x_2^4) \\ &-\frac{2(x_1^2-\varepsilon^2x_2^2)}{\mu_2}\arctan\frac{2\mu_1\mu_2x_2^2}{x_1^2+\rho\varepsilon^2x_2^2} \\ &-\frac{2\varepsilon^2x_1x_2}{\mu_1\mu_2}\ln\frac{(\mu_1x_2)^2+(x_1-\mu_2x_2)^2}{(\mu_1x_2)^2+(x_1+\mu_2x_2)^2}-\frac{6(x_1^2+\varepsilon^2x_2^2)}{\mu_1}\Big] \end{aligned} \tag{19}$$

式（19）为Mossakowski的基本解。采用[27]给出的方法可以求解任意边界形状的正交各向异性薄板在各种支承条件下的弯曲问题。对于一般各向异性板的弯曲问题，至今尚未见到边界元法的文献，这是由于在此情况下的基本解问题还未很好解决之故。但是，有了正交各向异性情况的解，已可解决许多实际问题，因而具有很大的价值。

把边界元法用于各向异性弹性体，需要克服的另一个较大困难是奇异积分的计算。复合材料所具有的复杂的力学性能和本构关系，导致目前所能找到的各种基本解具有异常复杂的解析表达式。对于各向同性弹性体，通常可采用Gauss数值积分法计算形如式（3）所示的积分。一个n点的Gauss数值积分公式可以很精确计算出（$2n-1$）阶多项式函数的积分。但式（3）所示的积分并非象有限元法中所遇到的多项式插值函数。因此，即使是对于各向同性材料，采用边界元法求解时往往会出现这样的情况：由于未能精确计算式（3）中的积分（特别是奇异积分项），进一步细分单元网格，对计算结果毫无改善。采用边界元法求解各向异性弹性体时所遇到的积分，远比式（3）所示的积分要复杂得多，因而上述问题也就更为突出。选用合适的数值积分公式并确认上述积分的计算精度，是获得良好计算结果的一个非常关键的步骤。

把边界元法用于求解复合材料的宏观力学问题，是基于把细观非均质的复合材料作了均质化的假定的。采用边界元法很难考虑复合材料叠层板的层间应力和边缘效应等力学问题。而用有限元法在若干情况下和某种程度上却更容易处理上述问题。边界元法和有限元法具有不同的特点、优点和缺点。把边界元法和有限元法很好结合起来，处理复合材料叠层板的力学问题，将能兼备二者的优点，因而更为有效。

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

4 边界元法在求解复合材料微观力学问题中的应用

复合材料的微观力学主要研究组分材料间力的相互作用，根据组分材料的力学性能预测复合材料的力学性能。目前已发表的文献关于微观力学的分析主要集中在复合材料的刚度（弹性常数）和强度分析方面。微观力学的分析方法包括材料力学的分析方法和弹性力学的分析方法。由于计算上的困难，采用弹性力学的分析方法，只能建立比较简单和近似的计算模型。通常要从复合材料中截取一个具有代表性的体积单元，然后模型化，最终归结为确定弹性基体中具有一个或多个弹性夹杂的解。只在极个别的简单情况下，才能用解析方法求得精确解，大量的问题需要采用数值方法求解。有限元法具有很强的适用性。但是，为了在交界面附近获得较高的计算精度，需要划分很密的有限元网格，这就导致计算工作量和数据准备工作的增加。采用边界元法求解弹性夹杂的文献已比较多。例如 Lachat[28] 采用三次单元分析了钢丝嵌入橡皮板的情况，Selvadurai 和Au[29] 给出了夹在二相材料界面上的盘状刚性夹杂的边界元分析，杨物华[30] 作了复相材料问题的边界元分析，我们在[63，64]中研究了“用于各向异性板的边界元分析技术”和“金属颗粒增强树脂复合材料细观力学问题的三维边界元分析”。可以用边界元法分析求解的复合材料微观力学很多，有待于进一步的研究。边界元法占机容量小这一特点，将使它在复合材料微观力学问题中的应用比其他数值方法更有竞争力。此外，基体材料一般都是各向同性材料，加强材料一般可以看作是各向同性材料、横观各向同性材料和正交各向异性材料，因此在微观力学分析中，很少遇到一般各向异性的问题，因而不会发生巨大的困难。

5 边界元法在复合材料断裂力学问题中的应用

鉴于有限元法处理裂纹尖端的应力场分析问题所遇到的困难，边界配置法曾被广泛地应用于求解裂纹尖端附近的应力场，计算应力强度因子以及建立实验标定公式[31,32]等方面。但是，由于本身的弱点，边界配置法的应用有很大的局限性。Snyder 和 Cruse[33,34] 首先把边界元法用于二维各向异性体的断裂力学问题。[34]给出一种修正的边界元法，使得边界积分不包括裂纹面，最后导出应力强度因子的计算公式

$$\left.\begin{aligned}K_1 &= \lim_{r\to 0}\{(2\pi r)^{1/2}[\beta_{12}\varepsilon_{11}|_{\theta=0}+\beta_{22}\varepsilon_{22}|_{\theta=0}+2\beta_{26}\varepsilon_{12}|_{\theta=0}]\}\\ K_2 &= \lim_{r\to 0}\{(2\pi r)^{1/2}[\beta_{16}\varepsilon_{11}|_{\theta=0}+\beta_{26}\varepsilon_{22}|_{\theta=0}+2\beta_{66}\varepsilon_{12}|_{\theta=0}]\}\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

上述方法可以很方便地求解任意边界形状、含Ⅰ型、Ⅱ型或混合型的中心裂纹或边裂纹的二维问题。平面内的各向异性可以作为一般情况考虑，但需要假定中面对称以排除弯曲耦合项的影响。Stern等人[35] 针对含混合型裂纹的二维各向异性弹性体做过类似的工作。[33—35] 所给出的方法不适用于三维问题和某些二维问题，但用于建立各向异性材料断裂韧性实验的实验标定公式，要比边界配置法和有限元法更简便易行。在[36]的边界元分析中，裂纹面是作为积分边界的一部分来考虑的，这样可以避免上述方法的限制。把边界元法用于三维各向异性裂纹体是一个难题。[37]曾对理想化了的平裂纹做过三维边界元分析，但除了个别简单情况之外，实用数值计算尚未付之实施。

6 热传导和温度应力问题

复合材料的湿热效应所引起的残余应力和残余应变对材料的失效强度有重要的影响。在某些特殊的情况下，单是温度应力本身就足以造成复合材料构件的破坏，因此，在进行复合

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

材料结构设计时必须计及温度和吸湿所引起的应力和变形．一般各向异性材料热传导问题的求解是十分困难的．已报道的文献大多局限于正交各向异性材料的简单情况[38-40]．Padovan[41]曾利用近似微分方程求解过一般各向异性圆柱壳的热传导问题．Chang等人[42]利用Green函数的性质和Green第二公式导出二维各向异性热传导问题的积分方程，并对各向异性的方形和圆形稳定温度场做了数值分析．[27]对同时经历温度变化和承受外载的正交各向异性板，作了综合分析并导出包含温度变化影响的边界积分方程

$$C_{ij}u_j+\int_\Gamma p_{ij}^*u_j d\Gamma=\int_\Gamma u_{ij}^*p_j d\Gamma-\int_\Omega (N_1^T\varepsilon_{11}^*+N_2^T\varepsilon_{22}^*)d\Omega \tag{21}$$

[27]通过对比边界元法的数值计算结果和其他方法以及实验的结果，说明了采用边界元法计算温度应力的可行性．

综上所述，采用边界元法求解复合材料的力学问题，在节省计算机内存、减少计算时间、减轻数据准备工作量和提高计算精度等方面已显示出其独特的优点．正是这些优点吸引着人们去开发这一应用领域中许多尚未解决的问题．复合材料的各向异性、非均匀性（呈层性）、不连续性、几何非线性和物理非线性以及强度极限的多元性等等问题，无疑都将给边界元法的应用带来不少困难．然而，边界元法本身将在从各向同性材料推广到各向异性的复合材料的过程中得到进一步的发展．

参 考 文 献

1 Abel N H. *Mag. Naturvidensk*, **2** (1823) : 55—68, 205—215
2 Kellogg O D. Foundations of Potential Theory. Dover Publ. (1929)
3 Muskhelishvili. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Noordhoff, Groningen, Holland (1953)
4 Fenner R T. *J. Strain Analysis*, **18**, 4 (1983) : 201—203
5 Brebbia C A, Tells J C F, Wrobel L C. Boundary Element Techniques. Springer-Verlag, New York (1984) : 183—194
6 Willis J R. *Q. Mech. and Appl. Math.*, **18** (1965) : 419—433
7 Lifschitz I M, Rozenweig L N. *J. Exp. Theor. Physics*, **17** (1974) : 783
8 John F. Plane Waves and Spherical Means Apllied to Partial Differential Equations. Interscience Publishers, New York (1955)
9 Synge J L. The Hypercircle in Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge (1957)
10 Vegel S K, Rizzo F J. *J. Elasticity*, **3** (1973) : 203—216
11 Wilson R B, Cruse T A. *Int. J. Numer. Meth. Engin.*, **12** (1978) : 1383—1397
12 Nishimura N, Kobayashi S. Proc. 5th Int. Conf. Boundary Elements (1983) : 345—354
13 Pan Y C, Chou T W. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **43** (1976) : 608—612
14 ——, ——. *Int. J. Sci.*, **17** (1979) : 545—551
15 Kobayashi S, Nishimura N. Mem. Faculty Eng. Kyoto Univ., **42** (1943) : 228—241
16 Rizzo F J, Shippy D J. *J. Composite Mater.*, **4** (1970) : 36—41
17 Green A E. *Phil. Mag.*, **34** (1943) : 416—418
18 Lekhnitskii S G. Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body. Holden-Day, San Francisco (1963)
19 Tomlin G R. Ph. D. Thesis, Southamton University (1972)
20 ——, Butterfield R. *Proc. ASCE*, EM3 (1974) : 511—529
21 Enayat M, David L S. *J. Composite Mater.*, **20** (1986) : 375—388
22 Benjumea R, Sikarskie D L. *J. Appl. Mech.*, **39**, 3 (1972) : 801—808
23 Hong C S, Crews J H. NASA TP-1469 (May 1979)
24 Lakshiminarayana H V. *J. Composite Mater.*, **17** (1983) : 357—367
25 Ambartsumyan S A. Theory of Anisotropic Plates. Stanford, Technomic Publishing Co. Inc. (1970) : 20—62
26 Mossakowski *J. Arch. Mech. Stos.*, No. 1, 6 (1954) : 415—418
27 Heng Z (张恒), McCammond D, Tabarrok B. Proc. 4th Int. Conf. Numerical Methods in Thermal Problems (1985) : 1238—1247

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

28 Lachat J C. Ph. D. Thesis, Southampton Univ. (Feb 1975)
29 Selvadurai A P S, Au M C. Proc. 5th Int. Conf. Boundary Elements (1983) : 365—373
30 杨物华，复相材料问题的边界元分析. 西安交通大学硕士学位论文 (1984)
31 Bowei O L, Freese C E. *Int. J. Fracture Mech.*, **8** (1972) : 49—58
32 Heng Z, McCammond D, Tabarrok B. *Computer Methods in Appl. Mech. Engin.*, 54 (1986) : 187—195
33 Snyder M M, Cruse T A. Air Force Materials Lab. Tech. Report AFML-TR-73—209. Accession No. AD-777588
34 ——, ——. *Int. J. Fracture*, **11**, 2 (1975) : 315—328
35 Stern M, Becher E B, Dunham R S. *ibid*, **12**, 3 (1976) : 359—368
36 Benitez F G, Ruiz C. Proc. 5th Int. Conf. Boundary Elements (1983) : 429—455
37 Cruse T A. AFOSR-TR-75-0813, Accision No. ADA 011660
38 Giedt W H, Hornbaker D R. ARS Jl (Dec 1962) : 1902—1909
39 Touryan K J. *AIAA J.*, **2** (1964) : 124—126
40 Chao B T. *Appl. Sci. Res.*, **12***A* (1962) : 134—138
41 Padovan J. *AIAA J.*, **10** (1972) : 60
42 Chang Y P, Kang C S, Chen D J. *Int. J. Heat Mass Trans.*, **16** (1973) : 1905—1918
43 王震鸣. 力学进展, **16**, 2 (1986) : 202—209
44 ——. 力学进展, **19**, 2 (1989) : 195—204
45 Tanaka M. *Appl. Mech. Rev.*, **36**, 5 (1983) : 627—634
46 Beskos D E. *ibid*, **40**, 1 (1987) : 1—23
47 —— (ed) . Boundary Element Methods in Mechanics. Elsevier Sci. Pub. (1987)
48 Brebbia C A, Venturini W S. Boundary Element Technique, Applications in stress analysis and heat transfer, Comput. Mech. Pub. (1987)
49 Fenner R T. Watson J O. *Int. J. for Num. Meth. in Engng*, **26**, 11 (1988) : 2517—2529
50 Henry D P, Banerjee P K. *ibid*, **26**, 5 (1988) : 1005—1027
51 Azevedo J P S, Wrobel L C. *Int. J. for Num. Meth. in Engng*, **26**, 1 (1988) : 19—38
52 Sandgren E. *ibid*, **26**, 9 (1988) : 1913—1924
53 Mariem J B, Hamdi M A. *ibid*, **24**, 7 (1987) : 1251—1267
54 Polizztto C. *Comput. Meth. in Appl. Mech. & Eng.*, **69**, 2(1988):167—184; **69**, 3(1988):263—276
55 Schnack E. *Int. J. for Num. Meth. in Engng*, **24**, 5 (1987) : 1015—1025
56 Luchi M L, Rizzuti S. *ibid*, **24**, 12 (1987) : 2253—2271
57 Jin H, et al. *ibid*, **25**, 1 (1988) : 165—176
58 Wearing J L, Sheikh M A. *ibid*, **25**, 2 (1988) : 495—515
59 Zhang J D, Atluri S N. *ibid*, **26**, 3 (1988) : 571—587
60 Dohner J L etal. *ibid*, **24**, 3 (1987) : 621—634
61 Wang H C, Banerjee P K. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **55**, 2 (1988) : 437—442
62 Shi G, Bezine G. *J. Comp. Mat.*, **22**, 8 (1988) : 694—716
63 张恒，王震鸣. 用于各向异性板的边界元分析技术. 全国复合材料学术会议文集，中国航空学会、中国力学学会和中国宇航学会联合主办，西安 (1988) : 599—602
64 ——, ——. 金属颗粒增强树脂复合材料细观力学问题的三维边界元分析. Proc. ICCM Ⅶ, Vol, 4 (1989): 131—135

APPLICATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD TO THE PROBLEMS OF MECHANICS OF COMPOSITE MATERIALS

Zhang Heng
Luoyang Institute of Technology

Wang Zhen-ming
Institute of Mechanics, Academia Sinica

Abstract Applications of the boundary element method to solve the problems of micromechanics and macromechanics of composite materials and mechanics of composite structures are discussed in this paper. The main advantages and some limitations of this method when applied to the problems of mechanics of composite materials are also outlined.

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

Keywords *boundary element method; composite materials; anisotropy; nonlinearity; boundary integral equation; foundamental solution; singular integral*

非线性科学未来10年展望国际学术会议

(1990年5月21—25日，美国 Los Alamos)

这次会议(Nonlinear Science: The Next Decade)也是美国 Los Alamos 国家实验室的非线性研究中心(Center for Nonlinear Studies)成立后的第10次年会。与会代表有美国、苏联、法国、日本、中国等国的数十人。大会报告31篇反映了当代非线性科学研究的重要领域和问题。另有张贴论文数十篇。会后将出版论文集。现将大会报告作者及题目列出于下。

1 Mitchell Feigenbaum (Rockefeller): Scaling function theory
2 Guenter Ahlers (UCSB): Experiments with pattern-forming nonequilibrium systems
3 Alwyn Scott (Univ. of Arizona): Davydov's soliton revisited
4 郝柏林(中国科学院理论物理研究所): Symbolic dynamics and characterization of complexity
5 Ioannis Kevrekidis (Princeton): Low-dimensional dynamics. Approximate inertial manifolds and bifurcation calculations
6 Steven Smale (UCB): A dynamics retrospective: Great problems, efforts that failed
7 Vladimir Zakharov (Landau Inst., USSR): Integrable turbulence
8 Tito Arecchi (Ist. Nazionale di Ottica, Italy): Spatio-temporal complexity in quantum optics
9 Jerry Gollub (Haverford College): Nonlinear wave dynamics, transport and mixing
10 Robert Westervelt (Harvard): Experiments on nonlinear dynamics in electronic materials
11 Predrag Cvitanovic (Niels Bohr Inst., Denmark): Periodic orbits: The skeleton behind chaos
12 Dave Levermore (Univ. of Arizona): Kinetic theory revisited
13 Jerry Marsden (UCB): Discrete reduction bifurcation and symmetry
14 Steven Wiggins (Los Alamos/Caltech): Transport in chaotic dynamical systems
15 Michael E. Fisher (Univ. of Maryland): Maulti-wall interactions and complex commensurate phase equilibria
16 Susan Coppersmith (AT & T Bell Labs.): Nonlinear dynamics of sliding charge density waves
17 R. Griffiths (Carnegie-Mellon Univ.): Analytical and numerical studies of Frenkel-Kontorova models
18 Miki Wadati (Univ. of Tokyo, Japan): Soliton phenomena in unstable media
19 Steven Orszag (Princeton): Random Rayleigh-Taylor instability
20 Katepalli R. Sreenivasan (Yale): Fluid turbulence and nonlinear dynamics
21 Harvey Segur (Univ. of Colorado): Who cares about integrability?
22 John Holland (Univ. of Michigan): A "building block" approach to the study of adaptive nonlinear systems
23 Wim van Saarloos (AT & T Bell Labs.): Pulses and fronts in the complex Ginzburg-Landau equation
24 Yves Pomeau (Lab. ENS, France): Extended systems: The impact of nonlinear science
25 George Oster (UCB): Cell motion and morphogenesis
26 Irving Epstein (Brandeis Univ.): Nonlinear oscillations in chemical and biological systems
27 Yuri Kivshar (Inst. for Low Temperature Physics & Engineering, USSR): Nonlinearity and disorder
28 Alfred Huebler (Univ. of Illinosis): Resonant stimulation and control of complex systems
29 Martin Casdagli (Los Alamos): Nonlinear analysis of time series data: Towards an optimal approach
30 James Yorke (Univ. of Maryland): Chaotic dynamics
31 Martin Kruskal (Rutgers): Surreal asymptotics

100871 北京大学物理系 **赵凯华**供稿

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.