

一种新型边界元奇异积分计算方法

张恒 王震鸣

(洛阳工学院) (中国科学院力学研究所)

摘要

本文提出一种有效的边界单元法计算技术,用于复合材料的各向异性板.利用正交各向异性材料在静水压力下的解析解计算奇异积分,并结合一种专门的数值积分技术,使本文的方法有效地提高了边界单元法求解复合材料各向异性板的计算精度.

关键词:边界单元法,奇异积分,各向异性,复合材料.

0 引言

弹性静力学中边界单元法的计算精度,在很大程度上决定于边界积分的计算.对于各向同性材料,高斯数值积分技术可以在源点和场点不重合的单元上给出满意的结果.对于源点和场点相重合的单元,必须计算奇异积分项.这些奇异积分项可以在常数单元或线性单元上用解析法计算出来.而对于高次单元,含有奇异积分项的 $[H]$ 矩阵主对角线上的元素,可以利用刚体位移非直接地计算出来,其他的元素也可采用数值积分法.对于各向异性材料,由于基本解的表达式十分复杂,高斯数值积分的计算精度远不如各向同性材料的情况. $[H]$ 矩阵主对角线上的元素依然可以利用刚体位移进行非直接的计算,但那怕是采用最简单的常数单元, $[G]$ 矩阵主对角线上奇异积分项的计算也会遇到很大的困难.针对上述情况,本文采用文献^[1]中给出的方法进行数值积分,并利用正交各向异性在静水压力下的解析解,非直接地计算矩阵 $[G]$ 主对角线上的奇异积分项,获得了很好的计算精度.

1 正交各向异性板边界单元法分析

关于中面对称的正交各向异性叠层板的本构方程可以写成

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11}^0 \\ e_{22}^0 \\ e_{12}^0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中 N_{ij} 和 e_{ij}^0 分别为面内力和面内应变分量, A_{ij} 为拉伸刚度系数.设层合板中面在坐标平面内的区域为 Ω ,其边界为 Γ ,则弹性力学的混合边值问题可表示为

$$\left. \begin{aligned} N_{i,j} &= 0 && \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ u_i - \bar{u}_i &= 0 && \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上} \\ p_i - \bar{p}_i &= 0 && \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

收稿日期:1990-9-12

式中 $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$, \bar{U}_i 和 \bar{P}_i 分别为边界上给定的位移分量和面力分量。问题的边界积分方程为

$$G_{ij}u_j + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma \quad (3)$$

式中 p_{ij}^* 和 u_{ij}^* 为格林基本解^[4]相应的面力分量和位移分量。边界元系统矩阵方程可写成

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} \quad (4)$$

式中 $[H]$ 矩阵和 $[G]$ 矩阵各由 $N \times N$ 个 2×2 阶子矩阵组成, 子矩阵的元素可分别记为 h_{ij}^n 和 g_{ij}^n ($i, j=1, 2, \dots, N; n, m=1, 2$)。以常数单元为例, 子矩阵的元素可表达为

$$h_{ij}^n = \begin{cases} \int_{\Gamma_j} P_n^* d\Gamma, & i \neq j \text{ 或 } n \neq m \\ \int_{\Gamma_j} P_n^* d\Gamma + \frac{1}{2} & i = j \text{ 及 } n = m \end{cases} \quad (5)$$

$$g_{ij}^n = \int_{\Gamma_j} u_n^* d\Gamma \quad (6)$$

当 $i \neq j$ 时, 可采用文献^[1]给出的方法计算式(5)和式(6)中的积分。

当 $i = j$ 时, 矩阵 $[H]$ 主对角线上的元素 h_{ij}^n 可以利用刚体位移进行计算, 而对于矩阵 $[G]$ 主对角线上的元素 g_{ij}^n ($n=1, 2$), 需要计算形如

$$I = - \int_{\Gamma} \ln(x_1^2 + y^2) d\Gamma \quad (7)$$

的积分。这个积分无法用解析法计算出来。现在设该层合板边界上均匀地作用有静水压力。根据正交各向异性材料静水压力下的解析解, 叠层板中面内任一点的面内位移为

$$\begin{aligned} u_1 &= -p \left(\frac{1}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_2} \right) x_1 \\ u_2 &= -p \left(\frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{21}}{E_1} \right) x_2 \end{aligned} \quad (8)$$

式中 p 为静水压强, x_1 和 x_2 为计算点的坐标。根据式(8), 边界节点的位移分量可表达为

$$\begin{aligned} u_i &= -p \left(\frac{1}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_2} \right) x_i \\ u_i &= -p \left(\frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{21}}{E_1} \right) x_i \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

式中 x_i 为节点坐标。所有节点处面力分量都一样, 即

$$P_k^i = -P \quad k = 1, 2 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

把(9)式和(10)式代入方程(4), 得到

$$\begin{bmatrix} g_{11}^{11} & g_{11}^{12} \\ g_{21}^{11} & g_{21}^{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \begin{bmatrix} g_{ij}^{11} & g_{ij}^{12} \\ g_{ij}^{21} & g_{ij}^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{P} \begin{Bmatrix} R_{ij}^1 \\ R_{ij}^2 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

式中 R_{ij}^k ($k=1, 2; i, j=1, 2, \dots, N$) 是由方程(4)中 $[H]$ 矩阵和 $\{U\}$ 矩阵相乘得到的列阵中的元素。式(11)中的系数 g_{ij}^{12} 和 g_{ij}^{21} 可以解析地计算出来:

$$g_{ij}^{12} = g_{ij}^{21} = -K \alpha A_1 A_2 L_i \left[\tan^{-1} \left(\frac{\tan \theta_i}{\sqrt{\alpha_1}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\tan \theta_i}{\sqrt{\alpha_2}} \right) \right] \quad (12)$$

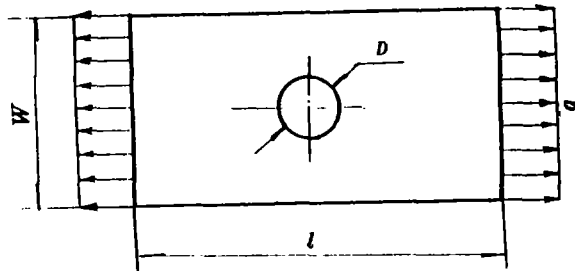
式中 θ_i 为第 i 个常数单元和 x 轴的夹角。由式(11)和(12)不难计算出奇异积分项 g_{ij}^{11} 和 g_{ij}^{22} 。

2 数值计算结果

采用本文提出的边界元计算技术求解了若干算例。为了进行对比,也用通常的边界单元求解了这些算例。计算结果表明,本文的方法可以有效地提高计算精确度。现选出其中一例如下:带有直径 D 的中心圆孔,宽 W 的正交各向异性板 $[0^\circ/90^\circ]$ 承受均匀拉伸应力作用(见附图)。采用本文的方法和通常的边界单元法(采用数值积分法计算 g_{ij})针对不同的 W/D 比值计算孔边应力集中系数。计算结果列入表1。表1中还列出了实验结果作为对比。当 W/D 趋于无穷大时,问题有精确解。可以看出,本文的方法有效地提高了边界单元法的计算精确度。

表1 应力集中系数

W/D	BEM	本文方法	精确解	实验结果
2.0	5.81	6.17		5.88
2.5	5.23	5.51		5.43
3.0	5.00	5.21		5.30
4.0	4.78	4.95		5.05
5.0	4.70	4.85		4.90
10.0	4.60	4.72		
	4.52	4.64	4.65	



附图 带中心孔的正交各向异性板

3 结论

采用正交各向异性材料静水压力下的解析解,间接地计算边界单元法中的奇异积分项,并结合文献^[1]给出的数值积分方法,可以有效地提高边界单元法求解正交各向异性板的计算精度。本文的推导采用了常数单元,但本文的方法也可以推广到更高阶的单元。

参 考 文 献

- 1 Harris C Q, Evans W B. Extension of Numerical Quadrature Formula to Cater for End Point Singular Behavior Over Finite Integrals. *Int. Computer Mat.* 1987, (3), 219~227
- 2 Rizzo F J, Shippy J D. A Method for Stress Determination in Plane Anisotropic Elastic Bodies, *J. Comp. Materials*, 1980, (4), 36~61
- 3 Hong C S, Crews J H. Stress Concentration Factors for Finite Orthotropic Laminates with a Circular Holes and Uniaxial Loading. *NASA TP-1469*, 1979
- 4 Green A E. A Note on Stress Systems in Aeolotropic Materials. *Philosophical Magazine*, 1943, (34), 416~418
- 5 Beniumean R, Sikarskie D L. On the Solution of Plane Orthotropic Elasticity Problems by an Integral Method, *J.*

of Appl. Mech. 1972, (94), 82

6 Lekhnitskii S G. Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. Holden Day Inc. , San Francisco. 1963

A New Method of Computing Singular Integrals in BEM

Zhang Heng

(Luoyang Institute of Technology)

Wang Zhenming

(Institute of Mechanics of the Chinese Academy of Sciences)

Abstract

An efficient boundary element technique is developed for use in the analysis of composite structure. The boundary element method is an analytical scheme so as to evaluate the boundary integrals in those elements containing singularities. This technique, combined with a special integration quadrature formula for the remaining elements, significantly improves the computing accuracy of the boundary element method.

Key words: boundary element method, singular integral, anisotropy, composite materials.