

## 沉积能量在气流介质中的热效应及其激光干涉法测量

严海星 吴宝根

(中国科学院力学研究所, 100080)

**提要:** 从基本的气体动力学方程组出发分析了气流介质中由于放电、吸收激光等沉积能量所造成的热效应和气流特性。对于典型的气流放电激光器条件,  $0.05 \leq M \leq 0.2$ , 气动方程有最简单的形式, 很容易得到解析解, 并且可以用激光干涉法测量沉积能量和密度、温度和速度等气动参数沿流动方向的分布。

**关键词:** 气流介质, 能量沉积, 激光干涉测量

### Thermal effects of deposited energy in gas-flow medium and their measurements by laser interferometry

*Yan Haixing, Wu Baogen*

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

**Abstract:** The flow characteristics and thermal effects in gas-flow medium where there is some deposited energy (such as electrical discharge, absorption of laser radiation) have been analyzed on the basis of gasdynamic equations. When  $0.05 \leq M \leq 0.2$  which is a typical condition for gas-flow discharge lasers, the gasdynamic equations become the simplest ones. It is quite easy to get an analytical solution and it is possible to measure the distributions of the deposited energy, density, temperature and velocity in flow direction in the active medium by laser interferometry.

**Key words:** gas-flow medium, deposited energy, measurements by laser interferometry

### 一、引言

激活介质的强迫对流是排除废能、更新光腔中激活介质的有效手段, 从而可以大幅度地提高气体激光器的输出功率和效率。这种技术已广泛地用于放电  $\text{CO}_2$  激光器。最近也被用于  $\text{XeCl}$  准分子激光器<sup>[1,2]</sup>。

在横流放电激光器中,  $y$ - (放电) 和  $z$ - (光轴) 方向上的速度分量远小于  $x$ - (流动) 方向的分量  $u$  (参见图1)。如果气流在横截面上比较均匀, 通常, 对横流放电激光器的气流采用等截面的一维模型来描述。然而, 当必须考虑热传导效应时, 就应该同时考虑  $x$ - 和  $y$ - 方向的热传导项。这是由于这二个方向上的温度梯度、因而其热传导效应具有相同的数量级。由下文可见,

收稿日期: 1988年5月2日。

$x$ -方向上温度的不均匀是由于气流效应和沿流动方向放电的不均匀造成的。而  $y$ -方向上实际存在的放电不均匀 (不同高度处的放电电流密度不同), 会造成  $y$ -方向上的温度梯度。另外, 激光束在  $x$ - $y$  平面上的强度分布也会产生  $x$ -和  $y$ -方向上的温度梯度。然而, 沿光轴方向放电比较均匀 (实验上可通过调整不同位置的放电电路参数实现), 光束强度也较均匀, 这就使  $z$ -方向上的温度梯度远较另二方向上小, 因此,  $z$ -方向的热传导项常常可不必考虑。

实际上, 这种带有二维热传导的一维气动方程组也是一些其它物理问题的主控方程。一个这样的例子是近来引起广泛兴趣的“光热偏折光谱”(PTDS)<sup>[3~7]</sup>。在 PTDS 中, 作为泵浦光的一束染料激光穿过我们感兴趣的气体介质。气体分子吸收激光能, 因而被辐照的区域会被稍微加热, 导致该区域气体介质的折射系数的改变。如果另一束探测激光与泵浦光相重迭, 它就会由于这种折射系数的改变而偏折。光束的这种偏折可以由对位置敏感的光学检测器方便地测出。利用这种 PTDS 技术, 可以测量气体中的组份浓度、由吸收脉冲泵浦激光所造成的热脉冲、以及介质的气流速度和热扩散系数等。这是一种新发展起来的有用的测试技术。

本文从基本的气体动力学方程出发分析带有沉积能量的气流介质的热效应和流动特性, 将乍看起来关系不大的横流放电激光器和光热偏折光谱的分析统一在共同的基础上, 并指出各种简化方程的近似程度和适用范围。表明, 在感兴趣的典型条件下, 方程有最简单的形式, 很容易得到解析解。进而讨论了用激光干涉法测量介质中沉积能量、气流速度及其它气动参数沿流动方向分布的可行性。

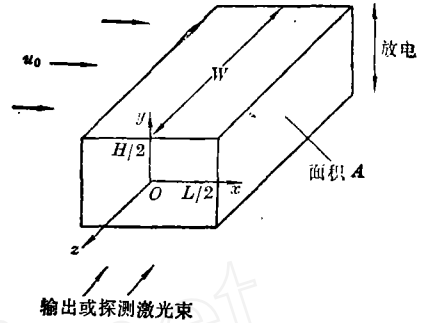


图1 横流放电激光器的一维模型

## 二、气体动力学方程

如果忽略粘性耗散作用, 带有二维热传导的等截面 (面积为  $A$ ) 的一维流的基本气动方程组为<sup>[8]</sup>动量守恒

$$\rho u^2 + p = c_1 (\text{常数}) \quad (1)$$

$$\text{质量守恒} \quad \rho u = \dot{m}/A (\text{常数}) \quad (2)$$

$$\text{状态方程} \quad p = \rho RT \quad (3)$$

$$\text{能量守恒} \quad \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + Q \quad (4)$$

其中  $T$ 、 $\rho$ 、 $p$  分别为气体介质的温度、密度、压力,  $\dot{m}$  为质量流量,  $k$  为热传导系数,  $c_p$  为定压比热,  $R$  为气体常数,  $Q$  为沉积能量。这里采用了积分形式的动量守恒和质量守恒方程, 因为它们更为简便。

可以引入三个重要的无量纲参数

$$R_1 = \rho u^2 / p = \gamma M^2, \quad (5)$$

$$R_2 = c_p \rho u L / k = c_p \dot{m} L / (k A) (\text{Peclet 数}), \quad (6)$$

$$R_3 = c_p \rho u H^2 / (k L) = c_p \dot{m} H^2 / (k A L), \quad (7)$$

其中  $M$  为气流的马赫数,  $\gamma$  为比热比 ( $c_p/c_v$ ,  $c_v$  是定容比热),  $L$  和  $H$  分别为激光器在  $x$ -和  $y$ -

方向上的特征长度(参见图 1)。

由(1)式可以清楚地看到,当  $R_1 \ll 1$  时,假设压力  $p$  为常数是一个很好的近似。对于典型的气体混合物,当  $M \leq 0.2$  时,  $R_1 \leq 0.06$ 。这时,在(4)式中略去与  $p$  有关的项是一个合理的近似。

$R_2$  和  $R_3$  分别表示强迫对流项相对于  $x$ -和  $y$ -方向上的热传导项的相对重要性。对于典型的横流放电激光器<sup>[9]</sup>,当  $M \geq 0.05$  时,  $R_{2,3} > 400$ , 也就是说完全可以忽略热传导项。对于 PTDS, Sell<sup>[3]</sup> 发现,在典型条件下当  $u = 1$  m/s (相当于  $M \leq 0.005$ ) 时,热传导项仅约为对流项的 10%。对于这种情况,他忽略了热传导项,并得到与实验相符的结果。

当气流是定常的,并且沉积能量也不随时间改变时,方程(4)中所有与时间  $t$  有关的项消失,方程可进一步简化。

将不同情况下的带有二维热传导的一维流动的能量方程汇总于表 1。值得一提的是选定的简化能量方程的条件( $M$  值为 0.05 和 0.2)在很大程度上是任意的。对于  $M$  值接近这里选定的条件(主要指 0.2)的某些情况,如果想得到更高的精度,有时不得不采用包括较多项的能量方程。当然,当  $M$  值远离这里选定的简化条件时,相应的简化近似是相当好的。

表 1 在不同情况下带有二维热传导的一维气流的能量方程

|                        | 非 定 常 流   | 定 常 流  |
|------------------------|---|--|
| $0 < M < 0.05$         | (I) $\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + Q(x, y, t)$ | (II) $\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + Q(x, y)$ |
| $0.05 \leq M \leq 0.2$ | (III) $\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = Q(x, t)$   | (IV) $\rho c_p u \frac{dT}{dx} = Q(x)$   |
| $M > 0.2$              | (V) $\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + Q(x, t)$                           | (VI) $\rho c_p u \frac{dT}{dx} = n \frac{dp}{dx} + Q(x)$   |

对于在空间上是高斯分布、在时间上是矩形分布的沉积能量, Gupta 及其同事给出了情况(I)和(II)的解析解<sup>[3,7]</sup>。Sell 对同样的问题做了数值解,并以作图的方式给出了结果<sup>[4]</sup>。他还对高斯分布、矩形脉冲的沉积能量给出了情况(III)的数值解<sup>[3]</sup>。

对于较高的气流速度,不能再忽略气体介质的可压缩性。这时在能量方程中必须包括与  $p$  有关的项。在这种情况下得到解析解就更困难了,常常只能得到数值解。

### 三、横流放电激光器的热效应

上面提到,对于典型的横流放电激光器,  $0.05 \leq M \leq 0.2$ , 有  $R_1 \ll 1$ ,  $R_{2,3} \gg 1$ , 气动方程有十分简单的形式:

$$(III) \quad \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = Q(x, t). \quad (8)$$

一般说来,激光中气流可以认为是定常的。在连续激光器中,也可以认为放电是稳定的,即  $Q(x, t) = Q(x)$ 。这时,气动方程呈最简单的形式:

$$(IV) \quad u\rho c_p \frac{dT}{dx} = Q(x). \quad (9)$$

即使对于脉冲放电激光器,如果只对平均的热效应感兴趣,只要采用平均沉积能量  $Q(x)$ ,方程(9)仍可用来得到  $x$ -方向上平均温度分布。当然,如果对温度的脉动感兴趣(如在 PTDS 中),就只能对方程(8)求解了。

方程(9)的解析解可直接写出

$$T - T_0 = \frac{A}{c_p m} \int_{-\infty}^x Q(x) dx, \quad (10)$$

其中下标 0 表示来流的气动参数。由(2)、(3)、(10)式很容易得到

$$\frac{T}{T_0} = \frac{u}{u_0} = \frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \frac{A}{c_p m T_0} \int_{-\infty}^x Q(x) dx. \quad (11)$$

这就是说,如果知道沉积能量沿  $x$ -方向的分布,放电区内任何一点的气动参数  $\rho, u, T$  就能相应地确定出来。通常,(11)式的积分的主要贡献来自于  $x = -L/2$  至  $x$  区段的积分。

当沉积能量  $Q(x)$  为矩形分布,即

$$Q(x) = \begin{cases} Q_0 & -L/2 \leq x \leq L/2 \\ 0 & x < -L/2 \text{ 及 } x > L/2 \end{cases} \quad (12)$$

其中  $Q_0$  为  $x$ -方向上单位长度内在单位时间里的沉积能量。气动参数沿流动方向的分布为

$$\frac{T}{T_0} = \frac{u}{u_0} = \frac{\rho_0}{\rho} = \begin{cases} 1 & x < -L/2 \\ 1 + \frac{AQ_0}{c_p m T_0} (x + L/2) & -L/2 \leq x \leq L/2 \\ 1 + \frac{AQ_0 L}{c_p m T_0} & x > L/2 \end{cases} \quad (13)$$

类似地,可方便地求出当  $Q(x)$  沿流动方向为梯形分布时的解。

若沉积能量为高斯分布<sup>[9]</sup>,即

$$Q(x) = \frac{Q_0}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\Delta^2}, \quad (14)$$

其中  $\Delta$  为放电区在  $x$ -方向的特征长度,  $Q_0$  为中心点 ( $x=0$ ) 处单位时间里、 $x$ -方向上单位长度内沉积能量的  $\sqrt{\pi}$  倍。很容易得到

$$\frac{T}{T_0} = \frac{u}{u_0} = \frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \frac{AQ_0 \Delta}{2c_p m T_0} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\Delta} \right) \right] \quad (15)$$

其中 
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy \quad (16)$$

是误差函数。定义函数

$$g(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\Delta} \right) \right], \quad (17)$$

可将(15)式化为 
$$\frac{T}{T_0} = \frac{u}{u_0} = \frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \frac{AQ_0 \Delta}{c_p m T_0} g(x). \quad (18)$$

由误差函数可以很容易地确定出  $g(x)$ 。对于不同的  $\Delta$  值,  $g(x)$  随  $x$  的变化如图 2 所示。利用(18)式,由  $g(x)$  可立即得到放电区内的气动参数分布。

文献[9]在沉积能量为高斯分布的情况下给出了类似的解析解。只是由于那里在方程中包括了  $x$ -方向的热传导项  $\frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ , 而使解明显地变复杂了。实际上, 在所考虑的典型的横流放电激光器条件下, 由于  $R_{2,3} > 400$  (等价于 [9] 中定义的参量  $x_0 = \frac{2kA}{mc_p} \leq 0.02\text{cm}$ , 即远小于激光器及放电区域的特征尺寸), 热传导项的贡献远小于激光介质流动所造成的强迫对流效应, 忽略热传导项不会影响方程的解 (参见附录)。而且, 如前文所述, 当计入热传导效应时, 应同时包括  $x$ -和  $y$ -方向的热传导项。

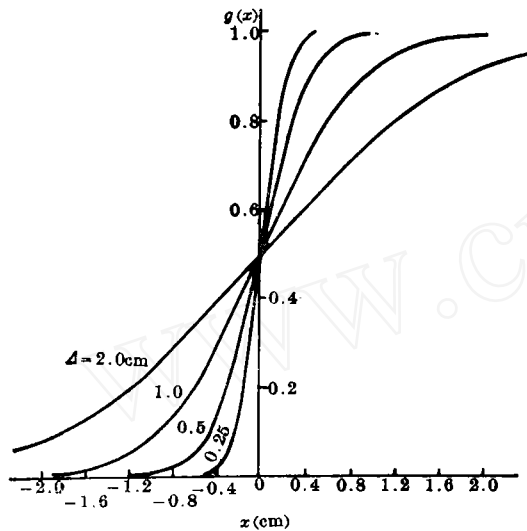


图2 高斯分布的沉积能量在不同  $\Delta$  值下的函数  $g(x)$  值

对简化方程 (9) 的解 (11) 的精度估计: 如果只考虑  $x$ -方向的热传导, 不难得到解析解; 由附录可知, 忽略  $x$ -方向热传导项的误差可用描述方程中热传导项与强迫对流项相对大小的无量纲参数  $R_2$  的倒数表征。同时包括  $x$ -与  $y$ -方向热传导项时, 得到解析解比较困难; 由于  $x$ -与  $y$ -方向温度梯度同量级, 二方向上的特征长度也同量级, 热传导项也必然有相同数量级; 可以推断, 忽略  $y$ -方向热传导项的误差也类似地具有  $R_3^{-1}$  的量级。如果在能量方程中包括压力项, 就需与其它守恒方程联立求解, 难于得到简单的解析解; 但作为精度估计, 仍可类似地认为忽略压力项的误差可用方程中压力项与强迫流动项的相对大小来描述; 可以证明, 这个相对大小与表征偏离  $p$  为常数的程度的无量纲参数  $R_1$  同量级。应该指出, 前面给出的只是两种典型结果。事实上, 对于任何形式的一维沉积能量  $Q(x)$ , 均可用 (11) 式解出气动参数沿流动方向的分布。只不过当  $Q(x)$  表达式复杂时, 常常不再能得到简单的解析解了。至于忽略了  $y$ -方向上实际存在的放电不均匀, 而假定沉积能量分布只是  $x$  的函数  $Q(x)$ , 这是一种简化。实用上, 可采用在  $y$ -方向取平均的分布, 来估算沉积能量所造成的平均效应。若想考虑在不同  $y$  值处沉积能量分布的不同所产生的效应, 有两种办法: 如果忽略垂直方向 ( $y$ -方向) 上的热传导效应, 即将气流介质看作若干水平薄片气流的组合, 而这些薄片之间没有能量和物质的交换; 这时, 可对每一薄片获得如 (11) 式的解, 只不过对于不同的薄片  $Q(x)$  可以是不同的。如果必须包括  $y$ -方向上的热传导效应, 就只有直接解形如表 1 中情况 (I) 或 (II) 的二维偏微分方程了; 显然, 这样只在非常特殊的情况下才能得到解析解。

在本节的讨论中未包括激光作用 (如强度为  $x$ - $y$  平面上的高斯分布) 对沉积能量分布  $Q$  的影响。这是由于: 第一, 这样的结果描述了不出光的放电激活介质中的气流情况; 第二, 即使电激励激光器出光时, 通常, 激光能只占注入能量的很小一部分 (10% 左右, 以至更少), 因此仅考虑放电沉积能量的效应是抓住了主要部分; 第三, 当包括激光作用对气流参数分布的效应时, 会出现如前面提到的二维问题, 增加了求解的数学上的复杂性, 而我们这里只是想给出典型的结果和明晰的图像。

而且, 如前文所述, 当计入热传导效应时, 应同时包括  $x$ -和  $y$ -方向的热传导项。

对简化方程 (9) 的解 (11) 的精度估计: 如果只考虑  $x$ -方向的热传导, 不难得到解析解; 由附录可知, 忽略  $x$ -方向热传导项的误差可用描述方程中热传导项与强迫对流项相对大小的无量纲参数  $R_2$  的倒数表征。同时包括  $x$ -与  $y$ -方向热传导项时, 得到解析解比较困难; 由于  $x$ -与  $y$ -方向温度梯度同量级, 二方向上的特征长度也同量级, 热传导项也必然有相同数量级; 可以推断, 忽略  $y$ -方向热传导项的误差也类似地具有  $R_3^{-1}$  的量级。

如果在能量方程中包括压力项, 就需与其它守恒方程联立求解, 难于得到简单的解析解; 但作为精度估计, 仍可类似地认为忽略压力项的误差可用方程中压力项与强迫流动项的相对大小来描述; 可以证明, 这个相对大小与表征偏离  $p$  为常数的程度的无量纲参数  $R_1$  同量级。应该指出, 前面给出的只是两种典型结果。事实上, 对于任何形式的一维沉积能量  $Q(x)$ , 均可用 (11) 式解出气动参数沿流动方向的分布。只不过当  $Q(x)$  表达式复杂时, 常常不再能得到简单的解析解了。至于忽略了  $y$ -方向上实际存在的放电不均匀, 而假定沉积能量分布只是  $x$  的函数  $Q(x)$ , 这是一种简化。实用上, 可采用在  $y$ -方向取平均的分布, 来估算沉积能量所造成的平均效应。若想考虑在不同  $y$  值处沉积能量分布的不同所产生的效应, 有两种办法: 如果忽略垂直方向 ( $y$ -方向) 上的热传导效应, 即将气流介质看作若干水平薄片气流的组合, 而这些薄片之间没有能量和物质的交换; 这时, 可对每一薄片获得如 (11) 式的解, 只不过对于不同的薄片  $Q(x)$  可以是不同的。如果必须包括  $y$ -方向上的热传导效应, 就只有直接解形如表 1 中情况 (I) 或 (II) 的二维偏微分方程了; 显然, 这样只在非常特殊的情况下才能得到解析解。

在本节的讨论中未包括激光作用 (如强度为  $x$ - $y$  平面上的高斯分布) 对沉积能量分布  $Q$  的影响。这是由于: 第一, 这样的结果描述了不出光的放电激活介质中的气流情况; 第二, 即使电激励激光器出光时, 通常, 激光能只占注入能量的很小一部分 (10% 左右, 以至更少), 因此仅考虑放电沉积能量的效应是抓住了主要部分; 第三, 当包括激光作用对气流参数分布的效应时, 会出现如前面提到的二维问题, 增加了求解的数学上的复杂性, 而我们这里只是想给出典型的结果和明晰的图像。

#### 四、气流流场的激光干涉法测量

众所周知,用激光干涉法可以定量地测定气体介质中的密度分布。如果忽略电子的贡献,气体介质的折射系数  $n$  只是密度的函数<sup>[10]</sup>

$$n = 1 + \beta \rho / \rho_{ref}, \quad (19)$$

其中  $\beta$  为得自 Gladstone-Dale 常数的无量纲常数,  $\rho_{ref}$  为标准条件(1 大气压,  $0^\circ\text{C}$ )下的参考密度。由(19)很容易得到

$$n - n_0 = (n_0 - 1) \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \quad (20)$$

其中  $n_0$  为来流的折射系数。 $n - n_0$  可以由激光干涉仪(例如 Mach-Zehnder 干涉仪)测得。这样,气体中的密度分布就能定量地确定。然而,一般说来,均匀气流中的速度分布无法用激光干涉法测定。

但在带有沉积能量的气流介质(如横流放电激光器)中,采用 Mach-Zehnder 干涉仪,其探测光沿  $z$ -方向(参见图 1),有

$$\int_0^W (n - n_0) dz = (n - n_0) W = \lambda \Delta m(x), \quad (21)$$

其中  $\lambda$  为探测光的波长;  $\Delta m(x)$  是  $x$  处干涉条纹级数的改变,它可由干涉图确定出来。由(11)、(20)、(21)式可以导出

$$\frac{u}{u_0} = \frac{T}{T_0} = \frac{\rho_0}{\rho} = \left[ 1 + \frac{\lambda \Delta m(x)}{(n_0 - 1) W} \right]^{-1} \quad (22)$$

$$\text{和} \quad \int_{-\infty}^x Q(x) dx = -\frac{\lambda \Delta m(x) T_0 c_p \dot{m}}{(n_0 - 1) W A} \left[ 1 + \frac{\lambda \Delta m(x)}{(n_0 - 1) W} \right] \quad (23)$$

即在横流放电激光器的放电区中气动参数  $u$ 、 $T$ 、 $\rho$  及沉积能量  $Q$  沿流动方向的分布可以用激光干涉法定量地确定。也就是说,在这种带有能量沉积的特定情况下,用激光干涉法定量地确定加热区内气流的速度分布是可能的。与其它测气流速度的方法相比较,激光干涉法是非接触测量,并且可以对干涉仪视场内的各点同时测量;而探头法(用 Pitot 管或热线风速仪)是接触式测量,对气流有扰动,并且一次只能测一个位置点上的值;激光 Doppler 测速(LDV)也只能进行单点测量,还要求在气流中添加固体微粒或液滴,此外,LDV 的设备和测量都要复杂得多。但如果想用干涉法测定速度场,即同时确定多点的速度值,必须对干涉图中空间不同点的干涉条纹的改变  $\Delta m$  进行空间分辨的测定。这常常是相当繁杂的工作,并且空间分辨率难以作得很高。

原则上讲,如果在马赫数的一定范围内  $Q(x)$  对  $u_0$  不敏感(对横流放电激光器来说,就是当气流速度不同时,放电的情况仍维持不明显改变),那么质量流量  $\dot{m}$ (因而  $u_0$ ) 可以由比较不同速度下的干涉图的方法在已知一个来流速度的数值的情况下定量地确定出来。由(23)式可得到

$$\frac{\dot{m}_1 \Delta m_1(x)}{1 + \frac{\lambda \Delta m_1(x)}{(n_0 - 1) W}} = \frac{\dot{m}_2 \Delta m_2(x)}{1 + \frac{\lambda \Delta m_2(x)}{(n_0 - 1) W}} \quad (24)$$

很清楚, 只要由实验确定出  $\Delta m_1, \Delta m_2$ , 就可以由一个已知的  $\dot{m}_1$  确定出  $\dot{m}_2$ 。

### 参 考 文 献

- 1 楼祺洪 *et al.*, 中国激光, **13**(10), 685(1986)
- 2 祁建平 *et al.*, 中国激光, **14**(5), 267(1987)
- 3 J. A. Sell, *Appl. Opt.*, **23**(10), 1586(1984)
- 4 J. A. Sell, *Appl. Opt.*, **24**(23), 3735(1985)
- 5 J. A. Sell, *et al.*, *Appl. Opt.*, **25**(9), 1420(1986)
- 6 Y. X. Nie *et al.*, *Appl. Opt.*, **25**(18), 3247(1986)
- 7 A. Rose *et al.*, *Appl. Opt.*, **25**(24), 4626(1986)
- 8 例如见: A. H. Shapiro; 可压缩流的动力学和热力学, 上册, 陈立子等译, (科学出版社, 北京, 1966 年)
- 9 郑承恩, 中国激光, **11**(12), 727(1984)
- 10 H. W. Liepmann *et al.*, *Elements of Gasdynamics*, (Wiley, New York, 1957), 154.

### 附录: 比较包括与不包括 $\frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ 项的解

对于高斯分布型的沉积能量

$$Q(x) = \frac{Q_0}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\Delta^2}, \quad (\text{A-1})$$

不包括热传导项的方程[见正文(9)式]的解[见正文(10)式]变成

$$T - T_0 = \frac{AQ_0\Delta}{2c_p m} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\Delta}\right) \right]. \quad (\text{A-2})$$

而包括  $x$ -方向热传导项的方程

$$\rho c_p u \frac{dT}{dx} - k \frac{d^2 T}{dx^2} = Q(x) \quad (\text{A-3})$$

的相应解为

$$T - T_0 = \frac{x_0 Q_0 \Delta}{4k} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\Delta}\right) \right] + \frac{x_0 Q_0 \Delta}{4k} \exp\left(\frac{\Delta^2}{x_0^2} + \frac{2x}{x_0}\right) \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\Delta} + \frac{\Delta}{x_0}\right) \right], \quad (\text{A-4})$$

其中

$$x_0 \equiv \frac{2k\Delta}{mc_p}. \quad (\text{A-5})$$

式(A-3), (A-4), (A-5)分别对应于[9]文中的(1), (9), (3)式。显然, 比较包括与不包括  $x$ -方向热传导项的结果, 就是要比较  $\left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\Delta}\right) \right]$  与

$$I \equiv \exp\left(\frac{\Delta^2}{x_0^2} + \frac{2x}{x_0}\right) \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\Delta} + \frac{\Delta}{x_0}\right) \right] \quad (\text{A-6})$$

的相对大小。

由[9]文知, 对于典型的横流放电激光器,  $x_0 \leq 0.02\text{cm}$ ,  $\Delta$  为  $0.25 \sim 2.0\text{cm}$ 。即(A-6)式中误差函数的自变量取值约为 10 乃至更大。在自变量  $s$  很大时, 误差函数的渐近展开式为(如见《数学手册》, 人民教育版, 1979 年, p. 596)

$$\operatorname{erf}(s) = 1 - \frac{\exp(-s^2)}{\sqrt{\pi} s} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{\{2s^2\}^k} \right]. \quad (\text{A-7})$$

这样

(下转第 331 页)

置能满足以上要求。

## 六、结 论

在单模或少模渐变型波导上覆盖一层折射率高于表面折射率的液体介质, 形成一个折射率由阶跃和渐变组合而成的“复合”波导, 测量此波导的有效折射率, 按“复合”波导法运算程序, 可确定单模或少模波导的折射率轮廓。理论精度在  $10^{-3} \sim 10^{-4}$  范围。就实验而言, 液体层厚度和折射率可方便地改变, 有利于在同一待测波导上测出多组数据, 提高轮廓的精度。实验对原待测波导无损坏作用。若  $\Delta\theta < 1'$ ,  $\Delta\alpha < 1'$ , 实验测量精度达  $10^{-3}$ 。本文还对  $\text{Ag}^+$  交换玻璃波导进行了实验测量, 所确定的轮廓得到了粗略的验证。

## 参 考 文 献

- 1 浦远 *et al.*, 光学学报, **8**(6), 534(1988)
- 2 G. B. Hocker *et al.*, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-11**(6), 270(1975)
- 3 J. M. White *et al.*, *Appl. Opt.*, **15**(1), 151(1976)
- 4 A. L. Voitenkov, *Sov. J. Quant. Electr.*, **13**(10), 1423 (1983)
- 5 M. Born *et al.*, 光学原理, (上册)(科学出版社 1978), 58
- 6 浦远 *et al.*, 中国激光, 待发表。

(上接第 358 页)

$$I = \frac{\exp(-x^2/\Delta^2)}{\sqrt{\pi} \left( \frac{x}{\Delta} + \frac{\Delta}{x_0} \right)} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{\left\{ 2 \left( \frac{x}{\Delta} + \frac{\Delta}{x_0} \right)^2 \right\}^k} \right]. \quad (\text{A-8})$$

当  $\frac{\Delta}{x_0} \geq 10$  时, (A-8) 的方括弧中后一项总比前一项的  $10^{-2}$  还小, 故只有第一项是主要的, 即

$$I \approx \frac{\exp(-x^2/\Delta^2)}{\sqrt{\pi} \left( \frac{x}{\Delta} + \frac{\Delta}{x_0} \right)} \quad (\text{A-9})$$

$x=0$  时(A-9)式值最大

$$I(0) \approx \frac{x_0}{\sqrt{\pi} \Delta}; \quad (\text{A-10})$$

随  $x$  的增大,  $I(x)$  将以比  $e$  的负平方指数还要快的速度下降。

表 A-1 典型条件下  $I(0)$  值 ( $x_0=0.02\text{cm}$ )

| $\Delta(\text{cm})$ | 0.25  | 0.5   | 1     | 2      |
|---------------------|-------|-------|-------|--------|
| $I(0)$              | 0.045 | 0.023 | 0.011 | 0.0056 |

一些典型数值列于表 A-1。而当  $x=0$  时  $1 + \text{erf} \left( \frac{x}{\Delta} \right)$  为 1, 这就是说, (A-4) 式右端第二项远小于第一项, 即包括  $x$ -方向热传导项的影响是小量。更何况,  $x_0$  与气流速度成反比;  $x_0$  越小, 热传导项的影响越小。热传导项的贡献小到可以忽略, 也体现在[9]文中的图 2 与本文的图 2 相比完全看不出差别。