现象（包括强度、尺度和谱特性）模拟的方法和措施。大气边界层的热力结构，对近地边界层中大气湍流运动，有明显影响，在风洞中实现模拟是相当困难的，这方面问题尚待进一步研究、解决。

3.7 流体-固体耦合作用问题

工程中的许多流体动力问题，常常伴随着固体振动、变形或表面效应，发生流-固之间的耦合作用。在理论分析方面，要发展具有非定常边界条件的流体动力计算方法，研究适合于工程结构特点(大尺度、非流线体具有多个相近自振频率的复杂结构等)的颤振抖振和随机激励的响应分析方法。在许多工程问题中，流-固耦合非线性因素是非常突出的，也经常会遇到非线性随机问题。非线性带来一些有趣的和富有启发性的现象，研究利用非线性因素，改善流-固耦合系统的动力特性和抑制振动，是大有文章可做的。

流-固耦合的实验研究，有一定难度，特别是动力相似模型的制做和测试方法方面，边界条件的模拟和数据处理问题也需要精细考虑，发展流-固耦合系统的参数辨识方法，以获取那些靠直接测量和数值计算不易得到的物理和力学参数，在工程上也是很有价值的。

除此之外，在工程实际上也经常会碰到其他问题，如流体动力噪声、海洋工程结构中的波浪载荷、等等，

后记：在本文编写过程中，曾引用了许多国内、外和本所同志们的工作，援引了其中的数据或研究成果，限于篇幅，这里不再将所用资料一一列出，作者谨向他们表示诚挚的谢意。

计算粘性流体力学中关于连续方程的处理

卞 荫 贵

（中国科学院力学研究所）

提要 本文讨论不可压缩粘性流动的计算问题，若采用原始变量速度与压力的表达方式，主要的困难是连续性方程的非耦合性质。笔者从有限差分法和有限元法两方面评述了处理不可压缩性为约束条件的各种途径。

关键词 计算流体力学 动量方程

1. 计算流体力学

从六十年代初期计算流体力学建立以来，无粘流欧拉方程数值模拟的研究似乎走在前面，开展较早，迈进也快，其实从一开始也就有粘性流的重要计算工作。熟悉计算流体力学的人们，不会没有注意到，早在1963年，美国 Harlow 与 Fromm 用粘性流体力学方程数值求解卡门涡街的业绩，曾经轰动一时，激起科技界人士的莫大兴趣，惊叹计算流体力学的无比威力。二十多年来，粘性流体力学的数值解法，无论是在计算方法上或是在解决复杂的实用问题方面，都有了长足进展。文献之多，浩如烟海，有些已总结成专著出版[1]-[4]。本文选了一个不太引人注目的专题：即对于不可压粘性流体力学，有用原始变量，速度 $\bar{u}$ 和压力 p，表示的方程组，包括动量方程（即 *Navier-Stokes* 方程，简称 N-S 方程)和连续方程，见后面方程(1)和(2)。其中，连续方程中没有压力，也没有时间项，这些方程不同于一般方程组可以结合边界条件联立求解。这里，连续方程

是作为求解 N-S 方程的约束条件出现的。如何处理作为约束条件的连续方程便是本文所要论述的主要内容。这个约束条件有用不可压缩性、连续性或无散度这些简易词句来表达，对于平面或轴对称的二维问题、无散度的速度矢量可以用流函数表示，$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}$，$v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$。根据涡量的定义，$\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$，很容易得到确定流函数的泊松方程

$$\nabla^2\psi=-\zeta$$

另外，从 N-S 方程求旋度，消去压力项，给出二维的涡量方程

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\bar{u}\cdot\nabla\zeta=\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\zeta$$

多年来，人们用上述流函数-涡量方程求解二维不可压粘性流问题取得很大成功，应用很广。其特点是用流函数替代连续方程，并将速度和压力分开来求解，最后用方程(4)求压力。这个方法的主要缺点只适用于求解二维问题，因为三维的无散度速度矢量不能用标量流函数取代。然而，我们知道三维无散度矢量也可以引进类似于二维流函数的向量势。但在三维问题中，需要求解三个涡量方程和三个确定向量势的泊松方程。由于计算量大，因此问津者不多，不过近来容量大，速度快的计算机多起来了，用涡量-向量势求解三维问题的文献，也开始陆续出现了。有一些作者用 N-S 方程(1)以及压力方程(4)联立求解 $\bar{u}$ 和 p，他们认为在推导压力方程(4)时，已经利用连续性条件(2)。但没有见到过这样做的成功算例。原因是，尽管在连续性条件下，压力与速度之间的关系应该满足(4)式，但相反则不然。即从(1)，(4)两式求出来的速度场不一定满足连续方程。还有其他一些计算方案，不再一一赘述。下面根据用原始变量 $\bar{u}$，p 表示的方程组(1)，(2)，从差分法和有限元法两个方面介绍处理连续方程的技术措施。

2. 差分方法中对连续方程的处理

用原始变量 $\bar{u}$，p 表示的 N-S 方程和连续方程

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\cdot\nabla\bar{u}=-\nabla p+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\bar{u} \tag{1}$$

$$\Delta\cdot\bar{u}=0 \tag{2}$$

其中 Re 为雷诺数。用 D 表示速度的散度，$D=\nabla\cdot\bar{u}$。从方程(1)取散度，给出压力方程，有 $D\neq 0$ 和 $D=0$ 的两种形式

$$\nabla^2 p=-\nabla\cdot(\bar{u}\cdot\nabla\bar{u})+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 D-\frac{\partial D}{\partial t},\qquad D\neq 0$$

$$=\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}-\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\bar{u}\cdot\nabla D-D^2+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 D-\frac{\partial D}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla^2 p=\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}-\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\qquad D=0 \tag{4}$$

设求解区域为 Ω，边界为 Γ。给定初值 $\bar{u}=\bar{u}_0$ 及边界条件 $\bar{u}=\bar{u}_L$。在差分方法中，处理连续方程的技术路线分为两类。第一类是以无散度条件为前提，寻找用什么方法先确定压力场，而后再求速度。第二类是设法将压力与连续方程联系起来的做法。现分述如下。

2.1 Harlow & Welch (1965)[5] 最早提出处理连续方程的做法。 把压力方程(3)当作

求散度的初边值问题。在从 n 时间层推进到 $n+1$ 时间层时，利用无散度条件，令 $D^{n+1}=0$。现将压力方程写成如下形式

$$\nabla^2 p = R(\bar{u}, D) - \frac{\partial D}{\partial t} \tag{5}$$

$R(\bar{u}, D)$ 代表(3)式的右端项，但不包括时间项，而时间项经差分后得：$\frac{\partial D}{\partial t}=(D^{n+1}-D^n)/\Delta t=-D^n/\Delta t$。从(5)式的差分方程可以确定压力场 p^{n+1}

$$\nabla_h^2 p^{n+1} = R_h(\bar{u}^n, D^n) + D^n/\Delta t \tag{6}$$

有了 p^{n+1}，再回到 N-S 方程(1)求速度。

$$\bar{u}^{n+1} = \bar{u}^n - \Delta t\left[\bar{u}^n \cdot \nabla_h \bar{u}^n + \nabla_h p^{n+1} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla_h^2 \bar{u}^n\right] \tag{7}$$

新求出来的 $\bar{u}^{n+1}$ 不再满足 $D^{n+1}=0$。重复上述演算步骤直至 $\bar{u}^{n+1}\to\bar{u}^n$ 为止。这个方法现在很少用。时间向前推进的计算，实际上是迭代过程。这种显式格式的演算很费机时。

Chorin (1968)[2] 的解法与上述做法类似。利用时间分裂法，将 N-S 方程分两步求解。第一步先求速度的临时值 $\bar{u}^*$，此时方程(1)只保留对流与扩散项，不包括压力项，而且 $\bar{u}^*$ 并不满足无散度条件。第二步将方程(1)只保留压力项，但不能同时求解 $\bar{u}$ 和 p，此时提出无散度要求，得出确定压力场的方程，具体计算步骤如下，

第一步从不包括压力项的 N-S 方程(1)求 $\bar{u}^*$

$$\bar{u}^* = \bar{u}^n + \Delta t\left[-\bar{u}^n \cdot \nabla_h \bar{u}^n + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla_h^2 \bar{u}^n\right] \tag{8}$$

第二步用只包括压力项的方程

$$\bar{u}^{n+1} = \bar{u}^* - \Delta t \nabla_h p^{n+1} \tag{9}$$

上式不能同时求 $\bar{u}^{n+1}$ 及 p^{n+1}，也不是原来的意图。现在要求 $\bar{u}^{n+1}$ 的散度为零。对(9)式取散度，并令 $D^{n+1}=\nabla\cdot\bar{u}^{n+1}=0$，则

$$\nabla_h^2 p^{n+1} = -(D^{n+1}-D^*)/\Delta t = D^*/\Delta t \tag{10}$$

从上式得出 p^{n+1}，再求 $\bar{u}^{n+1}$。程序和 2.1 全同。事实上，如果从(8)式取散度，再将 D^* 代入(10)式，结果与 2.1 的(6)式雷同。但两个方法在具体细节上还是有差异的。

在用(6)式和(10)式求解时，需要给定压力的边界条件。通常将动量方程投影到边界的法线方向上，给出压力梯度的边界条件。用 Neumann 条件求解压力的泊松方程要满足相容条件，例如对(10)式积分得

$$\int_\Omega \nabla^2 p^{n+1} d\Omega = \int_\Gamma \hat{n}\cdot\nabla p^{n+1} d\Gamma = \int D^*/\Delta t d\Omega$$

所以

$$\int_\Gamma \frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} d\Gamma = \int_\Omega D^*/\Delta t d\Omega \tag{11}$$

这就是用压力梯度作为边界条件需要同时满足的相容关系式。压力梯度沿边界的面积分应等于泊松方程源项的体积分。

2.2 压力修正法[3]

这类做法是先给定压力的预估值 p_p，从 N-S 方程求得相应的速度予估值 $\bar{u}_p$ 如下式所示。

$$\frac{\partial \bar{u}_p}{\partial t} + \bar{u}_0 \cdot \nabla \bar{u}_p = -\nabla p_p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \bar{u}_p \tag{12}$$

上式中的对流项已取线化形式，其中 $\bar{u}_0$ 为局部常值或前一次的迭代值。如用 Newton-Raphson 近似，则对流项应为：$\bar{u}^{n+1}\cdot\nabla\bar{u}^{n+1}\simeq-\bar{u}^{n}\cdot\nabla\bar{u}^{n}+\bar{u}^{n}\cdot\nabla\bar{u}^{n+1}+\bar{u}^{n+1}\cdot\nabla\bar{u}^{n}$. 显然，$\nabla\cdot\bar{u}_p\neq0$，需要进行修正。问题是如何确定压力的校正值 p_c，使得求出来的 $\bar{u}_c$ 结合 $\bar{u}_p$ 成为无散度矢量，即

$$\nabla\cdot(\bar{u}_p+\bar{u}_c)=0,\qquad \nabla\cdot\bar{u}_c=-\nabla\cdot\bar{u}_p \tag{13}$$

由于 p_c 与 $\bar{u}_c$ 同样用(12)式表示

$$\frac{\partial\bar{u}_c}{\partial t}+\bar{u}_0\cdot\nabla\bar{u}_c=-\nabla p_c+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\bar{u}_c \tag{14}$$

上式取散度，并将 $\nabla\cdot\bar{u}_c$ 用 $-\nabla\cdot\bar{u}_p$ 替代，给出确定压力校正值的泊松方程。

$$\nabla^2p_c=\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\bar{u}_p+\bar{u}_0\cdot\nabla(\nabla\cdot\bar{u}_p)-\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2(\nabla\cdot\bar{u}_p), \tag{15}$$

上式右端项均为已知量，求得 p_c 后，再用(14)式求 $\bar{u}_c$。这个方法，工程上应用很广。

2.3 人工压缩性方法

在可压缩流体运动中，连续方程含有密度参量，因此与压力有联系，不存在像不可压流中需要对连续方程的处理。Chorin (1967)[6] 有鉴于此，提出在连续方程中人为地加添一个时间项

$$\frac{\partial p}{\partial t}+c^2\nabla\cdot\bar{u}=0 \tag{16}$$

其中 c 在可压流中是声波传播速度，$p=c^2\rho$。(16) 式连同 (1) 式组成的方程组用时间相关法求解三维定常问题。这两个抛物型方程有标准解法，但参数 c 的选取必须考虑计算的收敛速率。当 $c^2\to\infty$ 时，(16) 式接近于无散度条件。所以取 $c^2>1$，可以得出方程 (1) 和 (16) 的近似解。Kwak (1986)[8] 通过算例的分析，给出 c 值的下限，

$$c^2\gg[1+4(x_{ref}/x_\delta)^2(x_L/x_{ref})/\mathrm{Re}]-1 \tag{17}$$

其中 x_δ, x_L 分别表示涡量扩散以及压力传播的特征长度。在圆柱绕流的算例中，c 值取为 $0.1\leqslant c^2<10$，在渠道算例中，c 值的范围是 $0.75\leqslant c^2<10$。

前面介绍的三个方法中，前二种方法的共同之处是先计算压力场，或者以无散度条件为前提，或者用预估、校正的方法。但均需要迭代求解椭圆型的泊松方程、随时间每向前推进一步，要重复压力的计算一次，很费机时。在这一点上，人工压缩性方法有其优越性，只不过参数 c 的确定目前还未能给出不依赖于具体课题的一般性数值范围。

3. 有限元法中解决无散度约束条件的途径

用有限元法求解以原始变量 $\bar{u}$, p 表示的 N-S 方程组的主要问题同样是如何处理无散度的约束条件，从有限元文献中已经总结出三种截然不同途径[8],[9]。第一个方法是在 Galeskin 的提法上，将方程(1)和(2)联立求解，但用压力的基函数(插值函数)作为连续方程的加权函数。第二个方法叫做罚函数法，和差分方法中的人工压缩性法相类似，将连续方程加添一个摄动项，由小参数 ε 与压力的乘积组成，也可以从拉格朗日乘子法得到解释。第三个是近十多年刚发展起来的方法。基本想法是在有限单元子区间平均意义上构造无散度的速度场，现分述如下。

3.1 将动量方程与连续方程用 Galeskin 形式联立求解。

为简便计，省去 N-S 方程中的非线性对流项，只讨论定常，线性的 Stokes 方程

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2u_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}=p_i\qquad i=1,2,3 \tag{18}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \tag{19}$$

用第一类边界条件，$u_i|_\Gamma = g_i(\bar{x})$。让 v_i 和 q 分别代表速度和压力试函数，则上两式的加权积分形式为

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}\right) v_i d\Omega = \int_\Omega f_i v_i d\Omega \tag{20}$$

$$\int_\Omega q \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\Omega = 0 \tag{21}$$

要求 $v_i|_\Gamma = 0$，方程(1)和(2)联立求解的纽带是用压力的基函数作为连续方程的加权函数，此乃连续方程的弱解形式，其物理意义可以理解为平均正应力对流体所做的净功为零。(20)式经分部积分后得

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla u_i \cdot \nabla v_i - p\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right) d\Omega = \int_\Omega f_i v_i d\Omega \tag{22}$$

速度与压力的近似解用相应的基函数 φ 和 ψ 表示

$$\begin{aligned} u_i^h &= \sum_{l=1}^{L} u_{il}\varphi_l \quad i = 1, 2, 3, \quad l = 1, 2\cdots L \\ p^h &= \sum_{m=1}^{M} p_m \psi_m \qquad\qquad m = 1, 2\cdots M \end{aligned} \tag{23}$$

其中 L 为速度的节点数，M 为压力的节点数。从方程(22)看出，速度是以一阶导数出现在方程中，压力为零阶。因此压力基函数通常要比速度基函数至少低一阶，所以 $M < L$。现将(23)式代入(21)，(22)式，用 φ_k 代 v_i，ψ_m 代 q。方程中的变数有 $\bar{u} = (u_{i1}, \cdots u_{iL})$，$\bar{p} = (p_1, \cdots p_M)$，由于 $i = 1, 2, 3$。变数共有 $3L + M$。(21)和(22)式最后的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \bar{S} & \bar{L}^T \\ \bar{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

从上式可以看出，由于压力并不出现在连续方程中，矩阵对角线上有为零的项，需要处理，计算量及机器存储量均很大，后面两节所介绍较为有效的方法有共同之处，可以将压力和连续方程消除掉。

3.2 罚函数法

上述联立求解的方法，虽然已被广泛采用，但因计算量和存储量都很大。人们都在探索一些更有效的方法。罚函数法早在七十年代初期由 Zienkrewicz 引用到流体力学领域中来，利用小扰动概念，将连续方程引进一个摄动项，由小参数 ε 与压力 p 的乘积构成。

$$\varepsilon p + \nabla \cdot \bar{u} = 0 \tag{25}$$

此法和 § 2.3 中人工压缩性方法类似，可以说是异曲同工，另外，由变分原理的拉格朗日乘子法得到同样表达式。将乘子 λ 与无散度约束条件的二乘方乘积项加到 Stokes 方程的泛函中得（以二维为例）

$$I(u, v, p) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2\mathrm{Re}}\left(\nabla u \cdot \nabla u + \nabla v, \nabla v\right) + \frac{\lambda}{2}(\nabla \cdot \bar{u})^2\right] d\Omega$$

从上式可以回到 Stokes 方程，只要取

$$\lambda \nabla \cdot \bar{u} = -p \tag{26}$$

对照(25)式，$\lambda = \frac{1}{\varepsilon}$。用 Galeskin 有限元法求解 Stokes 方程和(25)式的矩阵-矢量表达式

$$\bar{S}\bar{u} + \bar{L}^T\bar{p} = \bar{F} \tag{27}$$

$$\bar{M}\bar{p} = \frac{1}{\varepsilon}\bar{L}\bar{u} \tag{28}$$

其中 $\bar{M}$ 为压力质量矩阵。利用(28)式,消去(27)式的压力项

$$\bar{S}\bar{u} + \frac{1}{\varepsilon}\bar{L}^T M^{-1}\bar{L}\bar{u} = \bar{F} \tag{29}$$

这个方法的主要优点是将速度的计算和压力计算分开。从(29)式先计算速度,再用(28)计算压力,计算实例表明罚函数法比上述联立求解方法快5到10倍。缺点是对小参数 ε 的选取。ε 值过分小会影响计算精度,过大又不能满足无散度要求。有些作者给出 ε 值的范围为 10^{-4} 到 10^{-9},范围显得过宽。

3.3 构造无散度的速度场

这是新近发展起来的方法。我们仍以线性 Stokes 方程叙述本节内容的要点。连续方程用压力基函数加权的 Galeskin 形式

$$\int_{\Omega^e} \phi_m \nabla \cdot \bar{u}^h d\Omega = 0 \tag{30}$$

其中近似解 $\bar{u}^h = \sum_{l=1}^{L} \bar{u}_l \varphi_l$。构造无散度速度基函数的理论工作有 Temam (1977), Thomasset (1981), Griffiths (1979, 1981) 等。这些参考材料都可以从文献[9]找到他们的出处。国内也有少数人正在进行这项研究[10]。目前原理性的论证工作较多,这是必要的。关键问题是如何构造无散度的速度基函数 φ_l 以满足连续方程在单元上的积分形式(30)式,实际上,φ_l 并不是逐点满足无散度条件,而是在平均意义上的无散度基函数,现在用简单的非协调平面三角形单元为例。速度基函数为线性函数,压力为常值,单元与单元之间压力是不连续的。速度的节点在三角形各边的中点,压力节点在三角形的中心处。顶点的标号为1, 2, 3。S_k 为顶点 k 相对的边,其中心点为 $k+3$ 所以速度节点在三个边上的中点标号为4, 5, 6。此时,ϕ_m 为常值,所以(30)式变为:

$$\int_{\Omega^e} \nabla \cdot \bar{u}^h d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{u}^h \cdot \bar{n} d\Gamma \tag{31}$$

$\bar{n}$ 为边界上单位法向矢量。$\bar{u}^h$ 本身不是无散度矢量,可以分解成切向与法向两个分量,

$$\bar{u}^h = \sum(u_{t,l}\varphi_{t,l} + u_{n,l}\varphi_{n,l}) \tag{32}$$

为了构造能满足(31)式法向速度,引进流函数,$\bar{u}^h = \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}, -\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$ 代入(31)式:

$$\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}n_x - \frac{\partial\psi}{\partial x}n_y\right)d\Gamma = \int_{\Gamma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}t_y + \frac{\partial\psi}{\partial x}t_x\right)d\Gamma$$

$$= \int_{\Gamma} \nabla\psi \cdot \bar{t} d\Gamma \tag{33}$$

其中 $\bar{t} = (t_x, t_y) = (-n_y, n_x)$。沿着三角形 S_k 的边上积分得

$$\int_{S_k} \nabla\psi \cdot \bar{t} ds = \int_{S_k} \frac{\partial\psi}{\partial s} ds = \psi_{k+1} - \psi_k$$

同时 $$\int_{S_k} \bar{u}^h \cdot \bar{n} ds = u^h_{n,k+3} l_k,\ l_k \text{ 为 } k \text{ 边的边长}$$

由于上两式相等,故有 $u^h_{n,k+3} = (\psi_{k+1} - \psi_k)/l_k$。代入(32)式可以看出原来要求解的速度变量是三个边的中点上六个速度分量,转换成求解三个边的中点上切向速度分量以及三角形顶点的流函数。这种变量的转换可用矩阵的形式表示如下[9]

$$\bar{u}^h = \bar{R}\hat{u} \tag{34}$$

用新变量 $\hat{u}$ 后,(31)式的约束条件,完全得到满足。现在回到方程组问题。Stokes 方程积分形式中的压力项由于 v_i 为无散度矢量而消失,所以有限元解的形式为(见(24)式)

$$\bar{S}\bar{u} = \bar{F}, \qquad \bar{L}\bar{u} = 0 \tag{35}$$

改用新变量,则有 $\bar{L}\bar{R}\hat{u} = 0$, 由于 $\hat{u}$ 为任意矢量,所以 $\bar{L}\bar{R} = 0$(24) 式简化为 $\bar{R}^T\bar{S}\bar{R}\hat{u} = \bar{R}^T\bar{F}$,详细求解过程可参阅所引用文献.总之,人们认为这个方法比前两个有限元法节省机时和存储量.一方面由于压力和速度可以分开来求解,另外,也不像罚函数法那样,需要确定小参数 ε, 但这个方法的不足之处是如何将构造无散度速度基函数的原理具体落实到高阶格式及三维问题。看来还有大量的"软件"研究工作好做。无疑这是一项很有意义的研究领域.

参 考 文 献

[1] Roache, P. J., Computational Fluid Dynamics (1976).
[2] Peyret, R. & Taylor, C., Computational Methods for fluid flow (1983).
[3] Patankar, S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow* (1980).
[4] Shih, T. M., Numerical Heat Transfer (1984).
[5] Harlow, F. H. & Welsh, J. E. *The Physics of Fluids*, **8** (1965), 2182—2189
[6] Chorin, A. J., J. Computational Physics, **2**. 1(1967).
[7] Kwak, D. *AIAA J.*, **24**. 3(1986).
[8] Heinrich, J. C. & Marshall, R. S., *Computers & Fluids*, **9**. 1(1981).
[9] Segal, A., *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, **5**. 3(1985).
[10] 于欣, 计算物理, **2**, 3(1985),**5**,2(1988).

关于时间序列分析

朱 照 宣

(北 京 大 学)

提要 本文从方法论评述了统计学、工程技术和物理学三方面在时间序列分析上的不同观点,指出力学工作者在解决具体问题时应针对问题的性质从这几方面吸取有用的思想.

关键词 时间序列,混沌、分数维、ARMA 模型,方法论

时间序列分析 (time series analysis) 的方法,值得当前力学工作者重新加以重视。

任务 最常见的时间序列,是一串数字,它们代表相等时间间隔一个量的(观测或统计)数值.图 1 是太阳黑子数从 1749 年到 1924 年的变化情况,每年有一个值。图 2 是某航空公司从 1949 年到 1960 年逐月售出飞机票的张数。图 3 中的 x_t 数值是从迭代式 $x_t = 4x_{t-1}(1 - x_{t-1})$ 和初值 $x_1 = 0.1$, $t = 2, 3, \cdots, 100$ 计算出来的。这些图实际上只有离散的点子,图 1 有 176 个点,图 2 有 144 个,图 3 有 100 个点。为了醒目起见,通常把它们用直线段连起来.在力学实验中,常有每过一个时刻取一读数,有些纪录是连续型的,也可离散化后从中取出这样的序列。如果拿到的数据是一连串(按时间顺序)的阿拉伯数字,那么按照有经验的时间序列分析者的意见,最重要的是画一张象图 1—图 3 那样有线段的图,否则就是"自找麻烦",其中奥妙,下面会讲起。

时间序列分析的任务,是从这样一串数字(或图示)寻找这个量的变化规律,建立有关的数学模型,从而获得系统的有关信息,预测将来的动态,学科或任务不同,提法也不同,诸如有:建模