

# 复合材料及其结构的非线性力学问题

王震鸣

中国科学院力学研究所, 北京 (邮政编码100080)

**摘要** 本文根据最近文献及新近进展, 讨论了复合材料及其结构的非线性力学问题, 这是一个在实用上和理论上很重要并且越来越重要的问题。

**关键词** 复合材料力学; 复合材料结构力学; 几何非线性; 物理非线性; 强度和刚度问题

## 1 引言

随着复合材料的发展, 纤维、基体和复合材料的种类越来越多。高级纤维在纤维方向的强度、模量和延伸率的不断提高, 增韧环氧和热塑性树脂的应用, 使复合材料基体的断裂应变明显增大; 设计水平和制造工艺的发展, 使复合材料结构变得更薄且更轻。这对复合材料力学和复合材料结构力学的研究, 提出了更高的要求: 仅仅研究复合材料及其结构的线性力学问题, 是远远不够的; 为了充分发挥复合材料及其结构的优越性和潜力, 必须加强研究它们的非线性力学问题, 包括物理非线性力学问题、几何非线性力学问题和两者兼有的力学问题, 以及微观和宏观的非线性力学问题。

研究复合材料及其结构的非线性力学问题, 必须考虑复合材料及其结构的一系列力学特点。例如: 各向异性、微观构造不均匀性、宏观构造呈层性、层间剪切变形、拉压模量与拉压强度不同、某些强度很低以及缺陷、损伤、脱层和裂纹所引起的不连续性等。这些特点使复合材料及其结构的非线性力学问题, 比均匀、连续和各向同性的材料(金属和非金属材料)及其结构的非线性力学问题, 更为复杂和困难。

复合材料及其结构的线性力学问题的研究, 已取得了巨大的进展, 可以解决许多实际问题; 各向同性材料(包括金属和聚合物材料)及其结构的非线性力学问题的研究, 经过数十年的努力, 也取得了较大的进展, 可说理论上和实用上许多非常重要的问题都已弄清, 为进一步研究复杂而又困难的复合材料及其结构的非线性力学问题打下了良好基础。高速电子计算机和计算方法(特别是有限元法)的迅速发展, 又为研究工作提供了很好的条件。复合材料及其结构的非线性力学与均匀各向同性材料及其结构的非线性力学既有共同的问题又各有特殊的问题。共同问题往往采用和求解各向同性材料及其结构的非线性力学问题相类似的方法, 但由于几何参数、材料参数和未知函数(自变量)增多, 因此问题变得更为复杂和困难, 与均匀各向同性材料及其结构相比, 研究水平较低。由复合材料及其结构的一系列

特点所引起的一些特殊问题,可以用复合材料及其结构的线性力学问题的求解方法,再加上考虑物理和几何非线性以及损伤等因素来进行研究,也因问题非常复杂和困难,研究水平不高。不过从本文所列参考文献来看,近几年这方面的进展还是很大的。下面讨论纤维增强复合材料及其结构的非线性力学问题。

## 2 物理非线性问题

2.1 拉伸性能 单向复合材料的纵向拉伸性能主要由纤维决定,混合定律具有很高的精度;但纵向压缩性能就与基体的横向拉压性能和剪切性能有密切关系,不能认为主要是由纤维决定的。纤维在纵向的拉伸性能是线性弹性的。纤维越细、缺陷越小越少、晶体的定向排列越好,则单向复合材料的拉伸模量越高,拉伸刚度也较大。因此,由高级纤维(例如碳纤维和硼纤维)增强的单向长纤维复合材料,在纵向具有很高的拉伸模量和强度,在较大的应变范围内,其应力应变关系几乎是线弹性的,但在接近拉断的较小范围内,由于基体的开裂和纤维的不断断裂,呈现出比较明显的非线性。基于许用应变的设计,单向复合材料在纵向的应力应变关系,可认为是线弹性的;基于极限承载能力的设计,就应该考虑非线性了。

聚合物基体材料和金属基体材料,其本构关系总是非线性的。根据温度、压力、应力状态、固化程度、加载历史、损伤状况和应变率等不同情况,其本构关系可能是非线性弹性的、非线性粘弹性的、弹塑性的、粘塑性的,或者是更为复杂的非线性本构关系。因此,由基体性能控制的复合材料宏观力学性能,例如复合材料的横向拉压模量和剪切模量,总是非线性的。但对于应变较小的情况,为了简单起见,往往假定为线弹性的,虽不够合理,由于影响较小,因此误差不大;而基体的延伸率提高和断裂应变增大后,不应再作线性化的假定,而应采用非线性的本构关系,以免误差过大。

单向复合材料在纵向受拉时,由混合定律可以看到:聚合物基体在纤维方向对复合材料的强度和刚度所起的作用是次要的;而金属基体所起的作用则要大得多。这是因为金属比聚合物的强度和刚度要大得多。然而,各种基体对复合材料的有关性能所起的重要作用,在混合定律中没有充分地或完全地反映出来。例如单向复合材料的综合性能显著优于纤维束的性能,单向复合材料的拉伸断裂应变明显大于纤维束的平均断裂应变。对于连续的没有缺陷和断头的纤维或纤维束,混合定律在纤维方向所得的强度和模量的结论是正确的;对于有缺陷和断头的长纤维,所得的刚度是正确的,但所得的强度只是大体上正确。所以聚合物基复合材料在纤维方向的本构关系,在相当大的应变范围内,是线弹性的或接近于线弹性的。而金属基复合材料在纵向的拉伸性能,由于基体的模量和强度较大,金属基体在单向复合材料中的作用比聚合物基体大,因此,在纵向的本构关系的非线性就较大,不能任意忽略。短纤维复合材料即使是单向排列的,由于基体所起的作用增大,其纵向本构关系的非线性也比连续纤维复合材料明显得多。它的初始模量有所下降,而拉伸强度大幅度下降。编织复合材料中的纤维是弯曲状的,其本构关系可出现比较明显的非线性,在一定的应变范围内,拉伸模量可随应变的增大而有所增大,其后又随着纤维的逐步断裂,拉伸模量逐渐下降。

2.2 压缩性能 单向复合材料沿纤维方向的压缩性能,在纤维没有发生局部屈曲和弯折前,纤维在强度和刚度上所起的作用是决定性的,而且符合混合定律。单独纤维没有抗压和抗弯能力。单向复合材料之所以能够抗压和抗弯,基体(还有界面)所起的作用极为重要,

但在混合定律中并没有得到反映。单向复合材料在纵向的压缩性能，同基体对纤维的侧向拉压支承与剪切支承有密切的关系。在基体中和界面上，还存在着缺陷、损伤和裂纹，而且纤维在几何上也不是很直的，因此在压缩应力增大时，在基体中和界面上所受到的侧向拉压应力与剪切应力随之增大，应力和应变的分布是不均匀的，基体和界面的本构关系是非线性的，最终发生压缩破坏。纤维的局部屈曲是一种有时渐变有时突变的过程，它在渐变时已使单向复合材料呈现出一定程度的（可以觉察到的）非线性。大体说来，在压缩应变较小时模量较大，与初始拉伸模量基本相同；随着压缩应变的增大，压缩模量逐渐下降。

碳纤维较粗且有特殊的微观构造。这种复合材料的纵向抗压性能很好，压缩强度高于拉伸强度，因此，沿纤维方向受压时，具有较好的线弹性。芳纶纤维容易发生沿纤维方向的劈裂，使芳纶复合材料的抗压性能很差，在纵向受压时具有非常明显的非线性本构关系。碳纤维复合材料的压缩性能介于上述两者之间。由于碳纤维的拉伸强度和模量在不断提高，纤维直径变细，晶体的定向排列更有规则，所以碳纤维复合材料的拉伸强度和模量也在不断提高，而压缩强度则很难提高，甚至可能下降。聚合物基体碳纤维复合材料，由于碳纤维的纵向热膨胀系数为负值，固化后在碳纤维中的残余应力是压应力，所以它的初始模量要低些。沿纤维方向的压缩强度除纤维本身因素外，受基体和界面的影响较大，难以指望象拉伸情况那样地增大。提高基体的模量和强度以及界面的强度，可使单向复合材料的纵向压缩强度增大。采用增韧环氧和热塑性树脂作基体，可改善复合材料的韧性和提高断裂应变，但在压缩应变较大时，基体的横向拉压强度与剪切强度以及它们的模量减小，使纤维方向的压缩强度和模量下降。在湿热环境中，这种变化更为明显。因此，压缩时的切线模量和割线模量总是小于或明显小于拉伸时的切线模量和割线模量，应力应变关系呈现出非线性。

2.3 处理方法与问题 单向复合材料在纵向受拉且应力达到拉伸强度的  $1/3-1/2$  时，由声发射监听可发现基体开裂、界面脱粘和少量纤维断裂的讯号。从宏观力学观点看，单向复合材料还有继续增长的承拉能力，其应力应变关系仍接近于线性。从细观力学观点看，每根纤维中的应力只是大致均匀而不是绝对均匀，各根纤维的平直度和应变量不完全相同，纤维中存在着的缺陷、损伤和裂纹也不相同，因此，那些应力最大或（和）最为薄弱的纤维先断裂是不可避免的。固化残余应力（和应变）使基体和界面所受应力（和应变）不均匀，加之有孔穴、损伤和微裂纹，在基体中存在着应力集中问题，因此在基体中和界面上不可避免地要萌生微裂纹、产生脱粘和裂纹扩展。就细观和局部而言，不少部位早已达到或接近断裂应变，不能认为是线弹性的。尤其是基体材料，应变较大时就不是线弹性的。金属基体会产生弹塑性力学问题，高温时会产生非线性粘弹性和蠕变问题。聚合物基体应变率很大时，粘性所起的影响很大。要涉及线性和非线性的粘弹性问题。聚合物基复合材料在吸收水分和温度升高后，产生材料性能（由基体性能起主要作用的那部分性能）下降和非线性影响增大问题。因此在研究复合材料的细观力学强度问题时，应考虑纤维、界面尤其是基体性能的非线性影响，这样才能进一步弄清和说明复合材料的破坏机理和强度（包括疲劳强度、冲击强度和断裂机理等）问题，用以改进和提高复合材料的性能。

复合材料的宏观非线性力学性能，主要来自基体材料的非线性和复合材料中损伤累积的影响，和纤维的非线性也有关系。对于韧性基体，例如增韧环氧、热塑性树脂和金属基体，在基体没有大量开裂和纤维没有大量断裂以前，单向复合材料在纤维方向和其他方向力学

性能的非线性,主要来自基体,当然和损伤也有一定关系,但影响较小.为简单起见,只考虑基体的非线性对复合材料宏观力学性能的影响.这样处理虽不够完善,但已考虑了主要的方面.若将基体的性能略加修正,以考虑损伤的影响,也是一种可取的处理方法.基体在主动塑性变形阶段可用非线性弹性的本构关系来描述.如有必要,根据单向复合材料的混合定律,考虑纤维在纵向的非线性和基体材料的非线性,可得到复合材料的非线性本构关系,包括应力应变关系,应力增量和应变增量的关系.确定本构关系需要进行实验,有理论的指导可减少实验工作量并取得较好的结果.当复合材料中的基体大量开裂和纤维大量断裂时,损伤和断裂就成为主要问题,已不属于非线性本构关系所能解决的问题,但仍然是非线性的力学问题.可以肯定,在复合材料的损伤范围较小和程度较轻时,损伤对复合材料性能的影响也是非线性的.如果这种影响在基体性能中综合地加以考虑和修正,那就更好了.

从细观角度研究材料中已断裂纤维端头部位的应力(剪应力 $\tau_{LT}$ ,  $\tau_{LZ}$ 和横向应力 $\sigma_Z$ ,  $\sigma_T$ )时,应考虑基体本构关系的非线性.从宏观上研究叠层复合材料的边界效应、孔口和缺口处的应力分布时,应考虑复合材料本构关系的非线性.在研究复合材料及其结构连接的端头应力(层间剪应力和层间拉应力)时,应当考虑复合材料本构关系的非线性(主要是由基体的非线性引起的),因为这些部位的应力和应变最大.

对于复合材料结构(梁、板、壳及其组合),应当考虑基体材料或复合材料本构关系非线性的问题有:非线性弹性失稳,弹塑性失稳,蠕变失稳和湿热影响下的非线性失稳问题,具有非线性本构关系的结构应力分析和振动问题,具有非线性粘弹性复合材料的动力响应和波的传播问题,非线性阻尼对复合材料振动的影响,胶接和机械连接中的非线性应力集中以及工艺力学中与固化过程有关的非线性力学问题等.

对于编织复合材料,由于纤维呈波纹状,即使在纤维方向的应力应变关系,其非线性也比单向复合材料的要明显得多.拉伸时弹性模量随应变的增大而有所增大;压缩时弹性模量随应变的增大而减小.对于短纤维复合材料,基体所起的作用更大,所以本构关系的非线性也比单向复合材料纵向本构关系的非线性更为明显.但对于杂乱短纤维复合材料,其本构关系的非线性,要比单向复合材料的横向拉压和剪切性能的非线性小.芳纶纤维增强复合材料由于芳纶纤维很容易在基体中产生剪切型局部屈曲和弯折,所以它的拉压强度不同,拉压模量也不同.采用双模量(即拉、压模量不同但均为常数)的概念来近似地描述受拉和受压时不同的应力应变曲线,是一种简化处理,在解决变形问题时误差较小,在求解稳定问题时误差较大.因为前者所需的是割线模量而后者所需的主要是切线模量.在解决振动问题时,误差介于上述二者之间.采用多模量的概念(应力应变曲线用折线来模拟,因而具有多个拉、压模量)来解决复合材料及其结构的力学问题,效果更好,但更复杂.用双模量和多模量方法进行计算时,由于板、壳中性面的位置一时不易确定,需要多次试算才能解决,因此保留着求解非线性问题的某些特点.

在研究复合材料及其结构的力学问题时,有时必须考虑本构关系的非线性(包括全部的本构关系或主要部分的本构关系),有时却可采用双线性(双模量)或线性本构关系,这随问题和精度要求的不同等情况而定,不是把问题弄得越复杂越好.即使采用非线性的本构关系,也应只考虑其中起主要作用的那一部分非线性,而将接近于线性的那部分作线性化处理,以节省计算时间和经费.用非线性本构关系求解一些典型问题,有助于了解作线性化假定

后所带来的误差。对于必须考虑非线性本构关系的情况，用解析法求解有困难时，可用数值方法求解。

### 3 几何非线性问题

3.1 起因和机制 复合材料及其结构的几何非线性问题由大变形所引起，其中包括有限应变（大应变）和大转动（大挠度）问题，这和各向同性材料及其结构的几何非线性问题基本相同。也会遇到线性和非线性的本构关系。但是，对复合材料及其结构还需要考虑沿厚度方向剪切变形的影响。各向异性耦合效应，以及某些强度很低容易脱层和某些方向的层次在较低载荷下产生损伤与破坏的问题。而金属材料是各向同性的和均匀的，无耦合效应，金属结构一般可忽略沿厚度方向剪切变形的影响（因而可以采用 Kirchhoff 假定），各种强度是同一个数量级，它没有某些层次早期开裂问题，没有吸湿问题，没有材料性能是坐标函数的问题，而且在 200℃ 以下，不均匀的温度场对材料性能几乎没有影响。因此与复合材料及其结构的力学问题相比，显然要简单得多。即使对金属材料及其结构的几何非线性力学问题，由于复杂和困难，研究得尚不够广泛和深入。因此不难想象复合材料及其结构的非线性力学问题的研究现状了。但这个问题非常重要，确有深入研究的必要。

纤维增强复合材料沿纤维方向的断裂应变，视纤维种类不同而有所不同，约为 0.005—0.030；此外，脆性树脂基体的断裂应变约为 0.0078；增韧环氧和改性双马来酰亚胺树脂的断裂应变约为 0.020—0.025；热固性树脂的断裂应变约为 0.03—0.05（过大了并不好）；金属基体的断裂应变约为 0.05—0.100 或更大些。橡胶基体可经受百分之几十或者更大的应变，具体数值可由试验测定。在基体接近于断裂应变时，对于韧性基体，应采用有限应变和位移间的非线性关系，从而引入了几何非线性。

复合材料板壳由于强度和刚度大，总是做成薄壁轻结构的形式。由于沿厚度方向剪切变形所产生的剪切挠度和拉弯耦合效应所产生的弯曲挠度，以及许用应变较大（约为 0.003—0.004）等，因此复合材料的薄壁板壳结构更容易发生大挠度问题和薄膜问题，从而应采用有限应变和位移间的非线性关系。

对薄板薄壳作大挠度分析时，可出现多种情况。受横向载荷作用的薄板，承载形式是弯矩  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$ （这是小挠度板的主要承载形式）和薄膜力  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ 。而且挠度越大以薄膜力承载的部分也越大，当挠度为板厚的 3 倍以上时，薄膜力是主要的承载形式。这时，弯曲刚度、耦合刚度和剪切刚度都可以略而不计，只需考虑拉伸刚度。于是薄板问题就变为薄膜问题，两端固支梁的问题就变为柔索问题。

从柔索和薄膜问题可以看到，边界条件对于承受载荷起着极为重要的作用，如果柔索的两端和薄膜的周边可以自由滑动，那时柔索和薄膜就没有承载能力。如果柔索的两端和薄膜的周边固定（只要求边界上的面内位移  $u = v = 0$ ，或能承受水平力，并不要求对转动有约束），则柔索和薄膜就有承载能力。此外，对于周边滑动简支的大挠度圆板，在横向载荷作用下，可出现在板的外圈形成一个受压环（ $N_\theta$  为负值），而圆板内侧可出现既有  $M_r$  和  $M_\theta$ ，又有  $N_r$  和  $N_\theta$ （ $N_r$  和  $N_\theta$  皆为正）这样一种比较复杂的情况。

因为大挠度薄板包含两种承载机制：一种是抗弯作用，因此提高抗弯刚度和增加边界处对转动的约束（最有效的是固支边），就可增加这部分的承载能力；另一种是薄膜力的作用，提高拉伸刚度和增加边界处对面内位移的约束或承受水平力的能力（最有效的为边界上不

许有面内位移),就可增大这部分的承载能力。当然这两种承载机制有耦合作用,使柔韧板的变形协调,只有按大挠度板的控制方程和边界条件严格求解,才能求得所需的结果。

对于小挠度板(刚性板)来说,由于挠度很小,

$$\frac{\partial w}{\partial x} \approx \frac{\partial w}{\partial y} \approx 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \approx \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \approx 0$$

当内力  $N_x, N_y, N_{xy}$  和内力矩  $M_x, M_y, M_{xy}$  同时存在时,可以分别计算应力而后叠加。

对于大挠度板(柔韧板)来说,由于挠度较大,  $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  和  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  不能全部为零或全不为零,故在既有薄膜力  $N_x, N_y, N_{xy}$  又有初挠度  $w_0(x, y)$  时,会产生  $N_x \frac{\partial^2}{\partial x^2}(w + w_0), N_y \frac{\partial^2}{\partial y^2}(w + w_0)$  和  $2N_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(w + w_0)$  这样的当量横向载荷。其中  $N_x, N_y, N_{xy}$  和  $w$  皆为未知值,使问题变得复杂了。在  $N_x, N_y, N_{xy}$  较小的部位,即使  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(w + w_0), \frac{\partial^2}{\partial y^2}(w + w_0), \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(w + w_0)$  不为零或为稍大的值,其当量载荷依旧不

大。在端部作用有横向集中载荷的悬臂梁和悬臂板,由于薄膜力的数值很小(有的部位为零),虽然端部的挠度达到或者略微超过梁的厚度,但按小挠度梁和板计算仍可得到良好的结果。而周边支承的薄膜大挠度问题,已在上面作过说明,就不重复了。总之,边界条件对大挠度板的承载能力,影响是很大的。

在薄壳承载时,除了抗弯形式的承载外还有薄膜力的承载形式,且随着曲率的增大薄膜力的影响也增大,有时还可出现弯矩为零或者仅限于局部的情况,小挠度问题已相当复杂,大挠度问题就更为复杂。

现在讨论薄壳例如圆柱壳的稳定问题。在轴压作用下薄壳产生薄膜力  $N_x$ , 如果又有初挠度  $w_0$ , 将出现当量横向载荷  $N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$ , 且不可避免地有指向曲率中心的载荷分量。圆柱薄壳在周向的抗拉性能很好而抗压性能很差,薄壳在母线方向没有足够大的抗弯能力来承受这部分指向曲率中心的载荷,因此将产生较大的挠度  $w(x, y)$ , 这时横向当量载荷将为  $N_x \frac{\partial^2}{\partial x^2}(w + w_0)$ 。此载荷将促使各向同性、正交各向异性或复合材料的圆柱薄壳在低于或

远远低于临界载荷的情况下发生屈曲,这就是经典临界载荷值远低于实验所得屈曲载荷值的原因。线性稳定理论没有考虑这种影响,在有些情况下(主要是初始挠度与壳厚之比较大时)误差很大。应当按非线性理论(必须考虑几何非线性和初挠度的影响)来研究壳体的稳定问题。

用几何非线性理论研究壳体的屈曲和后屈曲问题,在1940—1945年间出现了两种理论,一种是 Koiter 的初始后屈曲理论,一种是 Kármán-钱学森的后屈曲理论,它们的特点和用途不同,但都有助于深刻理解壳体的屈曲和后屈曲问题,并得到了不少很有价值的结论。就确定壳体的屈曲载荷而言, Koiter 及其后继者所做的工作更有价值。一个结构已经制造出来,其初始挠度的分布可用非接触式测量装置来测得,用 Arbocz 发展的更为实用的方法来计算,能得到很好的结果。但是,一个壳体的初始挠度随运输、安装、使用条件和使用时间而变化。此外,一个结构在设计制造以前,没法确切知道初始挠度的大小及其分布规律,参照

同类结构和产品的初挠度数据,未必精确可靠。因此这种方法的理论价值虽然较大,在应用时还存在着许多困难。而且这种理论只能研究壳体在初始后屈曲时的性状,不能研究进一步后屈曲(advanced postbuckling)时的性状,而后者也是极为重要的问题。例如研究加筋板壳在面板或筋条局部屈曲后的承载能力时,就要用到面板和筋条在局部屈曲以后的折合刚度(有效刚度)和折合宽度(有效宽度)。此外,在研究壳体屈曲过程中的跳跃现象和菱形大塌陷等的本质问题时,只有采用 Kármán-钱的非线性稳定理论才能解决。在高度后屈曲阶段,初始挠度的影响很小,这个结论也很有意义。平板和微曲板在轴压下失稳后的后屈曲性状是稳态的,在一定的范围内可以有继续增长的承载能力,这对于充分发挥板壳结构的承载能力和减轻重量很有价值。加筋板在整体失稳后的后屈曲性状是下降和非稳态的,曲率较大的曲板、壳段和加筋壳在总体失稳后的后屈曲性状也是下降和非稳态的,即在屈曲后意味着丧失承载能力。在小应变时采用线弹性的假定比较切合实际,但在屈曲后的大应变大变形阶段,采用线弹性的假定就不大切合实际,应该用非线性的本构关系取代。

以上的论述对于金属材料和复合材料都适用。但金属材料比较接近于均匀、连续和各向同性,且拉、压和剪切强度相差不大。而复合材料是不均匀的,有某种程度的不连续性和各向异性,且各种强度的差别很大。要解决复合材料结构的非线性力学问题,离不开边值和初值问题的求解,将在下面讨论。

3.2 复杂性 复合材料及其结构的材料参数和几何参数增多,未知函数、控制方程、边界条件和初始条件增多,问题变得很复杂,求解更困难。例如采用一阶剪切变形的非线性理论求解复合材料板壳的静力学问题,位移函数、控制方程和边界条件各为5个;采用 Reddy 型简化的非线性高阶理论来求解,位移函数虽然仍为5个(即 $u_0, v_0, \phi_x, \phi_y$ 和 $w$ ),偏微分方程组仍为5个(但复杂化了),边界条件却为7个;采用 LCW 型高阶理论的非线性理论来求解,则有11个未知位移函数,11个偏微分方程和11个边界条件。对于金属薄板壳,大挠度和沿厚度方向剪切变形二者,对单层板壳是不能并存的,对夹层板壳却可能并存。对于复合材料板壳,由于层间剪切模量很低,在不少场合上述两个因素可能并存,不但需要考虑大挠度因素而且要考虑沿厚度方向剪切变形的影响和厚度的变化。由于复合材料性能的优越,复合材料板壳可以做得很薄,因此多数问题还是可以采用 Kirchhoff 假定的非线性理论来求解。总之应按问题的性质和要求,计算精度和计算费用等,采用最合适的理论和计算方法。

近10多年来特别是近几年来,不断有人尝试将上述 Koiter 理论和 Kármán-钱理论推广应用到复合材料板壳结构的非线性稳定问题,已有了一定的进展,但目前尚未达到金属板壳结构那样的发展程度。工程界乐于采用建立在实验基础上的经验公式或半理论半经验公式,以解决设计复合材料结构的问题。因为是建立在大量试验基础之上的,当然就比较精确,由于所涉及的因素(或参数)较少,当然就比较简单。但这类公式的适用范围有限,不能任意外推,而比较严格的非线性理论往往还停留在对典型问题的求解上,由于因素复杂,参数很多,不能一一作实验验证。

有初挠度时,加筋板壳的局部屈曲波形和整体屈曲波形之间存在着耦合作用和非线性的相互影响。对于复合材料板壳,可能产生脱层屈曲问题,脱层将使屈曲载荷下降,而屈曲变形将使脱层进一步扩展,从本质上说,它们之间的相互影响是非线性的。对于金属基复合材

料,基体的塑性在应力不大时就已表现出来,它和加载时间、应力强度和温度等都有关系,在高温时也有蠕变问题,金属基复合材料的结构也存在蠕变屈曲和应力松弛等问题。

当几何非线性和物理非线性同时出现时,有可能使分叉屈曲问题变为极值屈曲问题。

粘弹性问题除和屈曲问题有关外,还和动态响应有很大关系,和波动也有密切关系。线性粘弹性理论已得到广泛应用,与线性行为相对应的实验技术,也得到了充分发展。但非线性粘弹性理论远不如线性理论发展得那么完善,它虽然也有所进展,取得了一些值得注意的结果,但仍然处于研究的初、中期阶段,还遇到不少困难,有时甚至难以前进。线性和非线性粘弹性波的传播问题与复合材料的无损检测方法有密切关系,它可提供内部损伤的信息。在纤维和基体间的界面上结合不完善的部位,存在着摩擦力,它与界面上法向应力的拉压性质和大小有关。它对复合材料结构振动的影响是非线性的,所提供的断裂能也是非线性的。

短纤维复合材料在注塑成型过程中,在固化完成前,会遇到流变和粘弹性的问题。控制纤维和聚合物的流动方向,对于设计和制造是重要的。在复合材料及其结构的工艺力学问题中,存在着不少既复杂而又困难的非线性力学问题,解决这些问题可以提高产品的性能和质量,这是有待研究和开发的领域。

复合材料及其结构在使用过程中,会出现损伤、裂纹和某些层次的破坏,而且是不可逆的过程。复合材料性能的下降具有非线性的性质,在一定度内,虽然存在一些损伤,但并不影响构件的正常承载能力和使用寿命,这个限度称为损伤容限。复合材料结构在复杂受力情况下,损伤和某些层次的开裂,并不是到处出现的和均匀分布的,需用无损检测和计算来弄清。在计算面内力和弯矩作用下的承载能力时,将叠层复合材料的强度理论、刚度退化的确定原则和有限元法相结合,将是解决这种非线性力学问题的一种比较现实可行的方法。

求解柔韧板壳的问题,需要采用摄动法(奇异摄动法),而修正迭代法改进了摄动法的计算程序,使计算既简单又正确,效果良好。解析法和电子计算机相结合的解析电算法,解决了求解高次修正迭代解及摄动解的计算困难。

我国学者在研究各向同性材料的柔韧板壳方面,做了许多出色的工作。将这些方法推广应用到复合材料的柔韧板壳方面,定能取得良好的进展。

#### 4 讨论

总的说来,复合材料及其结构的线性力学问题的研究,已取得了巨大的进展并趋于成熟,这为复合材料及其结构的设计奠定了坚实的基础。复合材料及其结构的非线性力学问题日趋重要,研究工作也正在向广度和深度发展,但由于复杂和困难,研究得还不充分,恐怕在短期内也不能大见成效。关于非线性弯曲、振动和后屈曲等问题,对于复合材料结构来说有着重大的实用价值,可作为改进设计、挖掘潜力和保证安全的依据,在理论上也有重要的意义,这是固体力学在复杂条件下的发展。

复合材料及其结构的力学是一门应用性很强的学科,应该优先研究有较大实际意义和实用价值的课题。在研究线性和非线性力学问题时,都应着重考虑主要因素,而次要因素可以暂时不考虑,否则会因过于复杂,花费很大,收效甚少而寸步难行。

对于复合材料及其结构来说,设计成正交各向异性或准正交各向异性的结构是做得到。作对称均衡铺层还可使耦合效应基本上消失。在此前提下,正交各向异性因素对设计计算所带来的困难就不大了,而且可使复合材料的优越性得到更好的发挥,由于复合材料结构



往往很薄,在多数情况下可采用 Kirchhoff 假定,或只在板壳结构的部分区域需要考虑层间剪切变形的影响,在部分区域仍可采用 Kirchhoff 假定。在应力和应变较大的区域,物理非线性比较明显,可采用非线性本构关系;在应力和应变较小的区域,物理非线性不明显,可采用线性本构关系。用有限元法求解时,这种简化可减少计算工作量。有关拉压模量不等问题,一般情况下二者相差不大,所以影响也不大。若拉压模量相差很大,就必须考虑其影响。用有限元法求解问题,不论材料性能、湿热分布和厚度等如何变化都不会带来很大的困难。在上述多种情况下若同时考虑几何非线性问题,由于有所简化,有利于解决一些急需解决的实际问题。

关于在经典理论下复合材料板壳的非线性弯曲、振动和后屈曲问题等的研究,相对说来已取得了较大的进展。关于几何非线性问题的有限元法也取得了一定的进展。看来,在研究复杂的复合材料及其结构的非线性力学问题时,采用解析法会遇到更多的困难,而采用有限元法却比较有效。正在研究一些新因素或复杂因素所产生的非线性力学问题。所有切合实际的研究进展都在不同的程度上促进了复合材料及其结构性能的提高,使结构更安全可靠和更经济。前景是美好的,但任务是艰巨的。

#### 参 考 文 献

- 1 Luo S Y, Chou T W. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **55**, 1 (1988) : 149—155
- 2 Chou T W, Takahashi K. *Composites*, **18**, 1 (1986) : 25—34
- 3 Hamamoto A, Hyer M W. *Int. J. Solids Structures*, **23**, 7 (1987) : 919—935
- 4 Singh G, Sandasiva Rao Y V K. *Composite Structures*, **8**, 1 (1987) : 13—29
- 5 Chandrashekhara K. General nonlinear bending analysis of composite beams, plates, and shells. *Proc. ICCMS*, (eds. Pandalai K A V, Molhotra S K), Modras, India (1988) : 392—402
- 6 Sathyamoorthy M. Vibrations of moderately thick composite shallow spherical shells at large amplitudes. *ibid*: 305—312
- 7 Chen J K, Sun C T. *Composite Structures*, **8**, 4 (1987) : 271—285
- 8 Bushnell D. *Computers and Structures*, **25**, 4 (1987) : 465—605
- 9 Chia C Y. *Int. J. Solids Structures*, **23**, 8 (1987) : 1123—1132
- 10 Reddy J N, Chandrashekhara K. *Shock and Vib. Digest*, **19**, 4 (1987) 3—9
- 11 Chia C Y. *Int. J. Engng Sci.*, **25**, 4 (1987) : 427—441
- 12 Kassapoglou C. *Composite Structure*, **9**, 2 (1988) : 139—159
- 13 Wu C M L. *Computers and Structures*, **25**, 5 (1987) : 787—798
- 14 Saigal S, Kapania R K, Yang T K. *J. Comp. Mat.*, **20**, 2 (1986) : 197—214
- 15 Dvorak G J, Bahei-El-Din Y A. *Acta Mech.*, **69**, 1—4 (1987) : 219—241
- 16 Kelkar A, Elber W, Raju I S. *AIAA J.*, **25**, 1 (1987) : 99—106
- 17 Ishikawa T, Matsushima M, Hayashi Y. *AIAA J.*, **25**, 1 (1987) : 107—113
- 18 Rajagopal S V, Singh G, Sandasiva Rao Y V K. *AIAA J.*, **25**, 1 (1987) : 130—133
- 19 Noor A K, Peters J M. *AIAA J.*, **24**, 9 (1986) : 1545—1553
- 20 Hinrichsen R L, Palazotto A N. *AIAA J.*, **24**, 11 (1986) : 1836—1842
- 21 Chang W P, Jen S C. *Int. J. Solids Structures*, **22**, 3 (1986) : 267—281
- 22 Lilholt H. *Composite Sci. and Tech.*, **22**, 4 (1985) : 277—284
- 23 Reddy J N, Chandrashekhara K. *Int. J. Nonlinear Mech.*, **20**, 2 (1985) : 79—90
- 24 Picket A K, Hollaway L. *Composite Structures*, **4**, 2 (1987) : 135—160
- 25 Lee C E, Palazotto A N. *Composite Structures*, **4**, 3 (1987) : 217—229
- 26 Takahashi K, Chou T W. *J. Comp. Mat.*, **21**, 5 (1987) 396—420
- 27 Chang E K, Chang K Y. *J. C. M.*, **21**, 9 (1987) : 809—833
- 28 Wu Y C, Yang T Y. *J. C. M.*, **21**, 10 (1987) : 898—909

# THE PROBLEMS OF NONLINEAR MECHANICS OF COMPOSITE MATERIALS AND THEIR STRUCTURES

Wang Zhen-ming  
Institute of Mechanics, Academia Sinica

**Abstract** In this paper, based on the recent references and advances in this region, the problems of nonlinear mechanics of composite materials and their structures are discussed. These are very important problems both in practice and in theory and will become more and more important.

**Keywords** *mechanics of composite materials; mechanics of composite structures; geometrical nonlinearity; physical nonlinearity; strength and stiffness problems*

(上接第 244 页)

决定着起飞和着陆时飞机之间所允许的间距。更一般地说，旋涡是使机翼表面或使其他通过流体运动的物体表面上产生湍流边界层的拟序结构。而且，以理想化点涡为基础的方法对某些流体流动的数值仿真提供了一个重要的途径。

阵面作为拟序结构的存在对物理世界中非线性的本质作用提供了另一个例证。线性扩散方程不能维持波状解。但是，非线性的存在使扩散方程可以有行波解，它具有表示系统从一个状态向另一个状态过渡的传播波阵面。例如，化学反应扩散系统可以具有把反应过的物质和未反应的物质分隔开的行波阵面。通常，正如火焰阵面或内燃机内，这些化学行波和流体模很好地耦合在一起。浓度阵面出现在从矿床沥滤矿物中，传染病人和未被传染者之间的移动阵面可以在象狂犬病之类的流行病中检验出来。在先进的采油过程中，注入的水和储存在油层中的油之间的（不稳定）阵面控制着采油过程的效率。

给出非线性现象的普遍性和明显的重要性后，可喜的是近些年来已经目睹在了解和模拟这些一般拟序结构方面有了明显的进展。重要的是，这个进展恰恰是通过我们议论过的表征非线性科学的计算、理论和实验之间的协同来取得的。而且，作为这个进展的一个结果，拟序结构和孤立子已表现为非线性科学的一个实质性范例，它提供了一个统一的概念和理论、计算和实验各层次互相配合的一种方法论。这个范例对技术应用的重要性和它对基础科学的固有兴趣，将保证它在这个课题所有未来研究中的中心作用。（未完待续）

黄永念译自：Los Alamos Science, No.15 (Special Issue)  
(1987): 218—262. (董务民校)