第21卷 第4期　　力 学 学 报　　Vol. 21. No. 4
1989年7月　　ACTA MECHANICA SINICA　　July, 1989

粘性液体上浮体的稳定性条件*

朱如曾　吴汉明
（中国科学院力学研究所）

提要　本文研究了有限范围粘性液体上浮体的稳定性问题．由浮体-液体系统关于平衡态附近的小振动导出的本征方程 $\mathscr{L}(\sigma)\varphi=0$，用谱分析法给出了平衡态的稳定条件及各振动模的稳定条件．并表明粘性将使稳定的系统变为渐近稳定．另外还给出了两条泛函微分定理，它们是近似求解本征值的理论基础．

关键词　浮体稳定性，粘性，泛函微分

一、引　言

流体中浮体的稳定性问题是海洋和湖泊工程中的一个重要课题[1-5]，并具有一般力学的意义．过去的研究都是在无粘条件下作出，本文则抛弃 Wehansen 在理想流体无旋运动假设下所给出的浮体小运动线性方程组[6,7]，而从纳维-斯托克斯方程以及粘性流体中浮体的动力学方程出发，用谱分析法[8,9]讨论了浮体在粘性液体中关于平衡态作小振动时的稳定性条件，以及各振动模的稳定条件，并证明粘性将使稳定态变为渐近稳定态．此外，还给出了两条泛函微分定理，它们是近似求解本征值的理论基础．

二、小振动模的本征方程

本文所有量均为无量纲量，无量纲化的方法则不同寻常，而是都取实际量与单位量之比，故本文的无量纲量实际上就是简单地扣除物理量的单位而仅保留数字而已．之所以这么做是为了定义内积时比较方便．考虑质量为M的固体浮于液面，考虑液面有限但足够大，以致当浮体高度发生变化时，可忽略平衡液面的高度变化．采用如同文献[5]中的坐标系统：坐标 $oxyz$ 为固定坐标架，其中 y 轴垂直向上，静止水面为 oxz 平面（如图1）．平衡时，浮体的质心为

$$\boldsymbol{r}_G=(0,\ y_G,\ 0)$$

浮心为

$$\boldsymbol{r}_B=(0,\ y_B,\ 0)$$

受到小扰动后浮体质心相对于平衡位置的平动位移为

$$\boldsymbol{r}_1=(x_1,\ y_1,\ z_1)$$

故扰动的平动速度为

本文于1987年4月24日收到，1988年2月15日收到修改稿．
* 国家自然科学基金资助项目．

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_1 = (\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)$$

扰动角位移为

$$\boldsymbol{\Sigma} = (\alpha, \beta, \gamma)$$

其中 α, β 和 γ 分别为绕 x, y 和 z 轴的转动角度，从而扰动角速度可写为

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\Sigma} = (\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$$

同时我们还引入如下定义的记号：

M　浮体总质量

$\boldsymbol{J}$　平衡浮体绕质心的转动惯量张量

V_0　浮体平衡时的排水体积

S_0, S_1 和 S_2 分别如图 1 所定义的那样，为平衡时包围流体的三个面．并设 S_0 与 S_1 相交而不相切．

$\boldsymbol{n}$　S_0 的外法向单位矢量．

W　浮体平衡时的水面截面，也称为浮面．

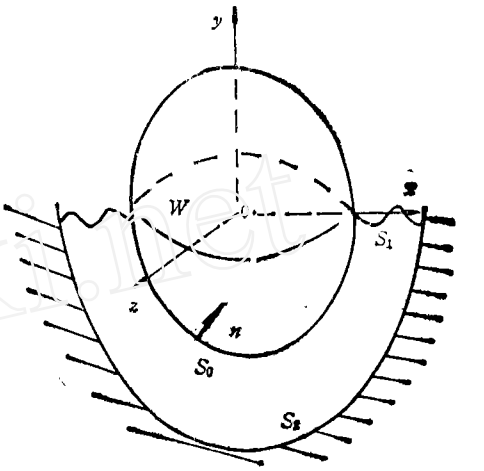

图 1

$$x_c = \frac{1}{W}\int_W x dS \quad z_c = \frac{1}{W}\int_W z dS$$

$$d_1^2 = \frac{1}{W}\int_W x^2 dS \quad d_3^2 = \frac{1}{W}\int_W z^2 dS$$

$$\bar{y}_B = \frac{1}{V_0}\int_{V_0}(y - y_G)d_V \quad \bar{x}_B = \bar{z}_B = 0$$

$$W d_1^2 + V_0\bar{y}_B = V_0 H_1 + W x_c^2$$

$$W d_3^2 + V_0\bar{y}_B = V_0 H_3 + W z_c^2$$

其中 H_1 和 H_3 分别为浮体关于过平衡浮面的惯量中心而分别平行于 x 与 z 轴的两轴之倾心高度(以平衡态中浮体的质心为基准)．

于是线性化后的运动方程可以表示为

$$\begin{aligned} &M\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \int_{S_0} p_1 d\boldsymbol{S} - \int_{S_0} \boldsymbol{\chi}\cdot d\boldsymbol{S} - \rho g W(y_1 - z_c\alpha + x_c\gamma)\boldsymbol{e}_y \\ &\boldsymbol{J}\cdot\ddot{\Sigma} = \boldsymbol{L} \\ &\rho\ddot{\xi} = -\nabla p_1 + \nabla\cdot\boldsymbol{\chi} \\ &-\nabla\cdot\dot{\xi} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

其中 ρ 为流体密度，

$$\boldsymbol{\chi} = \mu\left(\frac{\partial\dot{\xi}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\dot{\xi}_j}{\partial x_i}\right)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

为粘性张量，下标 i, j 取 1, 2, 3 时分别表示 x, y, z 三个方向的分量，$p_1 = p + \rho g y$，为扰动压力，由于忽略大气对浮体的作用，故可考虑大气压力为零．另外 $\boldsymbol{L}$ 为扰动力矩，具体表示为

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\boldsymbol{L}=\int_{S_0}[x\boldsymbol{e}_x+(y-y_G)\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z]\times[p_1\mathbf{I}-\boldsymbol{\chi}]\cdot d\boldsymbol{S}+\rho g[Wz_cy_1-(V_0H_1+Wz_c^2)\alpha+J_{13}\gamma]\boldsymbol{e}_x+\rho g[J_{13}\alpha-Wx_cy_1-(V_0H_3+Wx_c^2)\gamma]\boldsymbol{e}_z \tag{1a}$$

其中

$$J_{13}=\int_W xz\,dS$$

因为原方程 (1) 中不显含时间 t，又根据小扰动假设，我们可在复数域内设

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_{10}e^{\sigma t},\quad \boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{\Sigma}_0e^{\sigma t}$$

$$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_0e^{\sigma t},\quad p_1=p_{10}e^{\sigma t}$$

其中 $\boldsymbol{r}_{10}$，$\boldsymbol{\Sigma}_0$，$\boldsymbol{\xi}_0$ 及 p_{10} 中均不含时间 t（为了方便起见，以下所有的下标"0"都略去不记）. 将它们代入原方程 (1) 中，即有

$$\hat{\mathscr{L}}(\sigma)\varphi=\begin{bmatrix}\sigma^2M\boldsymbol{r}_1-\int_{S_0}p_1d\boldsymbol{S}-\rho gW(z_c\alpha-y_1-x_c\gamma)\boldsymbol{e}_y+\sigma\int_{S_0}\mathbf{T}\cdot d\boldsymbol{S}\\ \sigma^2\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\Sigma}-\boldsymbol{L}\\ \sigma^2\rho\boldsymbol{\xi}+\nabla p_1-\sigma\nabla\cdot\mathbf{T}\\ -\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}\end{bmatrix}=0 \tag{2}$$

其中

$$\mathbf{T}=\mu\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\right)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

$$\varphi^T=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\xi},p_1)$$

上角 T 表示转置. 须注意，此地的 $\boldsymbol{L}$ 形式上与原始方程中的 (1a) 相同，只是现在，表示运动量的字母表示其复振幅而已. 方程 (2) 就是浮体在粘性液体中关于平衡态作小振动的本征方程.

相应的边界条件:

$$\text{在 } S_0 \text{ 上，}\ \boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{\Sigma}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_G). \tag{3}$$

在 S_1 上(即 $y=0$)，

$$p_1=\rho g\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{e}_y+2\mu\sigma\frac{\partial\xi_y}{\partial y}$$

以及

$$T_{xy}=T_{zy}=0. \tag{4}$$

$$\text{在 } S_2 \text{ 上，}\ \boldsymbol{\xi}=0. \tag{5}$$

三、稳定性判据

将满足方程 (2)，且满足所有边界条件 (3—5) 的本征态 φ 取其复共轭后与方程 (2) 在流体区域 V_0 内作内积，得到

$$(\varphi,\hat{\mathscr{L}}\varphi)=\sigma^2\left[M\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_1^*+\boldsymbol{\Sigma}^*\cdot\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\Sigma}+\int_{V_0}\rho\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}^*dV\right]+\sigma\left[\boldsymbol{r}_1^*\cdot\int_{S_0}\mathbf{T}\cdot d\boldsymbol{S}+\boldsymbol{\Sigma}^*\cdot\int_{S_0}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_G)\times\mathbf{T}\cdot d\boldsymbol{S}\right.$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$
\begin{aligned}
&-\int_{V_0} \boldsymbol{\xi}^* \cdot \nabla \cdot \mathbf{T} dV \Big] + \Big\{ -\boldsymbol{r}_1^* \cdot \int_{S_0} p_1 dS - \rho g W \\
&\cdot (-y_1 y_1^* + z_c \alpha y_1^* - x_c \gamma y_1^*) - \int_{S_0} \boldsymbol{\Sigma}^* \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_G) \\
&\times p_1 \mathbf{I} \cdot d\boldsymbol{S} - \rho g \alpha^* [W z_c y_1 - (V_0 H_1 + W z_c^2)\alpha + J_{13}\gamma] \\
&- \rho g \gamma^* [J_{13}\alpha - W x_c y_1 - (V_0 H_3 + W x_c^2) \cdot \gamma] \\
&+ \int_{V_0} [\boldsymbol{\xi}^* \cdot \nabla p_1 - p_1^* \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}] dV \Big\} \\
&\equiv \sigma^2 E + \sigma \Phi + H = 0
\end{aligned} \tag{6}
$$

对上式中各项，利用边界条件 (3—5) 与条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$，稍加整理后，它们可分别表示为

$$
\left.
\begin{aligned}
E &= M|\boldsymbol{r}_1|^2 + \boldsymbol{\Sigma}^* \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \int_{V_0} \rho \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}^* dV \\
\Phi &= \frac{\mu}{2} \sum_i \sum_j \int \left| \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right|^2 dV
\end{aligned}
\right\} \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
H = \rho g \{ & W|y_1|^2 + (V_0 H_1 + W z_c^2)|\alpha|^2 + (V_0 H_3 + W x_c^2)|\gamma|^2 \\
& + W x_c (\gamma y_1^* + \gamma^* y_1) - W z_c (y_1 \alpha^* + \alpha y_1^*) \\
& - J_{13}(\alpha \gamma^* + \gamma \alpha^*) + \int_{S_1} |\xi_y|^2 dS \}
\end{aligned} \tag{8}
$$

显然，这里 H 为实数，而且只要 $H \neq 0$，(6) 式便保证 E 与 Φ 均为正实数。

从式 (6) 便可得到本征值与本征态的积分关系

$$
\sigma = \frac{-\Phi \pm (\Phi^2 - 4EH)^{1/2}}{2E} \tag{9}
$$

由此可得

定理 1　对某一模，若 $H > 0$，则渐近稳定*.

证明　从 (9) 式得知 $H > 0$ 使

$$
\mathrm{Re}(\sigma) < 0
$$

故渐近稳定.

$$
\begin{aligned}
H &= \rho g (y_1, \alpha, \gamma)^* \begin{pmatrix} W & -W z_c & x_c W \\ -W z_c & H_1 V_0 + W z_c^2 & -J_{13} \\ x_c W & -J_{13} & H_3 V_0 + W x_c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \\
&\quad + \rho g \int_{S_1} |\xi_y|^2 dS \\
&= \rho g \Big\{ W \Big| y_1 + x_c \gamma - z_c \alpha \Big|^2 + V_0 H_1 \Big| \alpha + \frac{W}{V_0 H_1} \Big(x_c z_c - \frac{J_{13}}{W} \Big) \gamma \Big|^2 \\
&\quad + \frac{1}{V_0 H_1} [V_0^2 H_1 H_3 - (W x_c z_c - J_{13})^2] \\
&\quad \cdot |\gamma|^2 \Big\} + \rho g \int_{S_1} |\xi_y|^2 dS
\end{aligned} \tag{10}
$$

因此，我们可得到平衡态各参数的稳定性定理：

* 当 $t \to \infty$ 时，模衰减到零，简称"模渐近稳定".

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

定理 2

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } H_1>0,\ W>0\\ V_0^2H_1H_3-(J_{13}-x_cz_cW)^2>0,\end{array}\right\}\tag{11}$$

则系统的 $y_1, \alpha, \gamma, \xi_y|_{S_1}$ 渐近稳定.

证明 当 H_i 和 W 均大于零,并且

$$V_0^2H_1H_3-(J_{13}-x_cz_cW)^2>0$$

时,由 (10) 式表明只要 $y_1\alpha\gamma\neq 0$ 且 $\xi_y|_{S_1}\not\equiv 0$, 则 $H>0$, 再由 (9) 式可知,与 y_1, α, γ 及 $\xi_y|_{S_1}$ 有关的模都有 $Re(\sigma)<0$, 故定理成立. 证毕.

如果我们一开始就使 x、y 轴与平衡浮面 W 的惯量主轴平行 (我们可以称之为标准坐标系),则易证

$$Wx_cz_c-J_{13}=0$$

在标准坐标系中,记 $H_1=\bar{H}_1$, $\bar{H}_3=H_3$ 于是 (10) 式化为

$$H=\frac{1}{2}\rho g\left\{W|y_1+x_c\gamma-z_c\alpha|^2+V_0\bar{H}_1|\alpha|^2\right.$$
$$\left.+V_0\bar{H}_3|\gamma|^2+\int_{S_1}|\xi_y|^2dS\right\}$$

从而可得

定理 3 在标准坐标中,若 $\bar{H}_1>0$, $\bar{H}_3>0$, $W>0$, 则系统的 y_1, α, γ 和 $\xi_y|_{S_1}$ 渐近稳定.

因为 (11) 式保证位能 H 关于 $(y_1, \alpha, \gamma, \xi_y|_{S_1})$ 取严格极小,故位能严格极小保证这些参量渐近稳定.

比较本文诸定理与文献 [5] 的各定理可知粘性使稳定系统变为渐近稳定.

四、泛函微分定理

在满足边界条件 (3)—(5) 及二次连续可微条件的所有函数列 $\phi(\phi^T=(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\xi}, p))$ 所构成的集合中,按函数矩阵的加法以及复数与函数矩阵的乘法定义复数域上线性空间,记为 G, 并定义标积

$$\langle\phi_1, \phi_2\rangle=\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{\Sigma}_1\cdot\boldsymbol{\Sigma}_2+\int_{V_0}\boldsymbol{\xi}_1\cdot\boldsymbol{\xi}_2dV+\int_{V_0}p_1p_2dV$$

积分区域为平衡流体所占的空间.

引理 1 对 G 中的自伴线性算子 $\hat{M}\phi$, 存在势泛函

$$\mu(\phi)=\frac{1}{2}\langle\hat{M}\phi, \phi\rangle.$$

引理 2 G 中不存在与所有向量正交的非零向量.

直接验证可知 $\hat{\mathscr{L}}$ 为自伴算子,由引理 1, 势泛函为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\langle\phi, \hat{\mathscr{L}}\phi\rangle$$

其中 $\phi^T=(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\xi}, p)$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\sigma^2 E + \frac{1}{2}\sigma\Phi + \frac{1}{2}H$$

$$E = Mr^2 + \boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\Sigma} + \int_{V_0}\rho\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}dV$$

$$\Phi = \frac{\mu}{2}\sum_i\sum_j\int\left(\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\right)^2 dV$$

$$H = \rho g\left\{Wr_2^2 + (V_0H_1 + Wz_c^2)\Sigma_1^2 + (V_0H_3 + Wx_c^2)\Sigma_3^2 + 2Wx_c\Sigma_3 r_2\right.$$

$$\left. - 2Wz_c r_1\Sigma_1 - 2J_{13}\Sigma_1\Sigma_3 + \int_{S_1}\xi_2\xi_2 dS\right\} - 2\int_{V_0}p\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}dV$$

其中下标 1, 2, 3 分别表示 x, y, z 分量。

由引理 (1) 和 (2) 可得

泛函微分定理 1　在 G 中使

$$D\mathscr{L}|_\sigma = 0$$

的充分必要条件为

$$\hat{\mathscr{L}}\phi = 0$$

其中下标"σ"表示 σ 在微分中不变。

若令 $\mathscr{L}(\sigma) = 0$，则此式确定 σ 为 ϕ 的泛函

$$\sigma = \frac{-\Phi \pm (\Phi^2 - 4EH)^{1/2}}{2E}$$

于是

$$\left(\sigma E + \frac{1}{2}\Phi\right)D\sigma = -(D\mathscr{L})_\sigma$$

从而有

泛函微分定理 2　若 $\phi\in G$，使 $D\sigma = 0$，则 ϕ 必为本征方程

$$\hat{\mathscr{L}}\phi = 0$$

的解；反之，若 $\phi\in G$ 是方程

$$\hat{\mathscr{L}}\phi = 0$$

的解，并使

$$\Phi^2 \neq 4EH,$$

则必然使

$$D\sigma = 0.$$

泛函微分定理是近似求解本征值的基础。

参　考　文　献

[1] Clayton, B. R. ed. Mechanic of Marine Vehiches, Gulf. Pub. Company, London (1982).

[2] Lamb, H., Static 3rd, Cambridge Univ. Press. Cambridge (1949).

[3] 梅强中，水波动力学，科学出版社(1984).

[4] Kyozuka Y. and K. Yoshicla (1981) Appl. Ocean Res. 3. 183.

[5] 朱如曾，吴汉明，第二届全国水动力学学术会议论文集，苏州(1988)，288.

[6] John, F., *Comm. Pure. Appl. Math.* 3(1950), 45.

[7] Wehausen, J. V., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 3(1971), 237.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

[8] Spies, G. O., *Phys. Fluids*, 23(1980), 2017.
[9] 朱如曾,中国科学A辑,(1987),1161.

STABILITY CRITERIA FOR A FLOATING BODY ON A VISCOUS FLUID

Zhu Ruzeng, Wu Hanming
(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract In this paper, the stability problem of a floating body on a viscous fluid in finit domain is investigated. The eigen-equation $\hat{\mathscr{L}}(\sigma)\varphi=0$ is derived for a small oscillation around a equilibrium state of the system including floating body and fluid. The stability criteria for a equilibrium state and every oscillation mode are obtained. It is shown that the viscosity in fluid makes a stable system become an asymptotically stable one. Furthermore, two theorems of functional differential are given, which are the base of the approximate method for finding the eigenvalues.

Key words stability of floating body, viscousity, functional differential

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net