

# 自约束球形等离子体的平衡与稳定性

吴 汉 明

中国科学院力学研究所  
1988 年 11 月 16 日收到

本文用磁流体力学的概念,解释并证实了环境压力  $p_0$  中确可存在平衡且稳定的球形等离子体。同时发现在自约束的等离子体平衡态不可能是无力场位形。还证明自约束的球状等离子体平衡态不唯一。计算结果表明,等离子体火球内部的压力  $p$  小于环境压力  $p_0$ 。与球形马克的磁场形态比较后发现自约束等离子体火球中的磁轴向中心偏移约 10%,磁场的剪切稍弱。用 Mercier 判据可初步得知自约束球形等离子体平衡态是关于局域模稳定的。

## 一、引 言

有界等离子体的磁流体力学 (MHD) 平衡与稳定性问题多年来一直是国内外学者感兴趣的课题。在实验室里,有界等离子体周围基本上是真空,故必须外加磁场方能使其维持在力学平衡态上。而自然界中的等离子体在有引力或外部环境压力时并无人为的外加磁场。那么,问题是有界等离子体是如何在它的生成环境中依靠自身磁场达到一个平衡且稳定的状态。

球形等离子体位形在磁约束核聚变装置中早已为人们所熟悉,例如球形马克 (spheromak), 旋转马克 (rotamak) 等叫作紧凑环 (compact torus) 的装置<sup>[1-3]</sup>。然而,对于自然界中的自约束等离子体的 MHD 平衡和稳定性的研究则主要局限于太阳日冕环的问题<sup>[4-6]</sup>。对自约束球状等离子体的平衡与稳定性问题的研究国内外尚属空白。至于对球形闪电的研究,绝大部分学者都将注意力集中在其发光机制的问题上,而忽略了基本的力学平衡和稳定性问题<sup>[7-10]</sup>。本文用 MHD 模型研究自平衡球形等离子体的平衡与稳定性性质,为进一步研究球形闪电的性质提供一些信息。

在本文中用 Virial 定理定性分析了自约束球形等离子体的自平衡条件。讨论了从  $\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$  导出的 Grad-Shafranov 磁面方程,得到自约束等离子体球内的磁场和压力分布。将球形等离子体的自平衡位形与球形马克 (spheromak) 中等离子体平衡位形进行了比较,同时用 Mercier 稳定性判据讨论了局域模的稳定性问题。

## 二、MHD 平衡的一般性质

考虑引力  $F_g$  与电磁力  $F_e$  之比远小于 1,从而可忽略引力的影响。同时,由于实际观察到的大气中的等离子体火球温度可达 2 万度<sup>[9,10]</sup>,因此采用理想 MHD 的模型就显得比较合理。

平衡的 MHD 系统需满足如下方程:

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla p, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

式中  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{J}$  和  $p$  分别为磁感强度、电流密度和热压,  $\mu_0$  为真空磁导率.

直接求解方程(1)一般比较困难,可以从方程(1)导出 Virial 定理出发,定性地讨论 MHD 平衡的一些性质.

Virial 定理: 一个平衡的等离子体系统必然满足如下关系式:

$$\int_{\tau} (3p + B^2/2\mu_0) d\tau = \int_{\Sigma} \left[ \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s})/\mu_0 \right]. \quad (2)$$

对有界孤立等离子体系统,上式等号左边大于零,右边的面积分在无穷处为零(此时  $B|_{r \rightarrow \infty} \sim 1/r^3$ ). 从而得到推论: 有限区域的等离子体只能在有固定载流导体的情况下才能处于平衡. 这也是实验室等离子体为什么必须借助外加的磁场才能平衡的原因.

这里必须注意到上述的推论有一个前提,即假设等离子体的环境压力为零. 因此,当环境压力  $p_0 \neq 0$  时,自约束的等离子体平衡态是否存在? 这将是下面要讨论的问题.

### 三、自平衡的磁场位形

任何一个 MHD 系统只有在满足平衡方程(1)时才能处于力学平衡态. 因此,为了研究自约束球形等离子体的平衡性质,首先要求解方程(1). 由于直接求解方程(1)一般比较困难,故求解由方程(1)导出的磁面方程(即 Grad-Shafranov 方程)<sup>[1]</sup>. 为了方便,假设平衡位形为柱对称,即  $\partial/\partial\varphi = 0$ , 于是在柱坐标下  $(R, \varphi, z)$  磁面方程为

$$\begin{aligned} \hat{L}\psi &= \left( R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi \\ &= -2\pi\mu_0 \left[ 2\pi R^2 \frac{d}{d\psi} p(\psi) + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{d\psi} I^2(\psi) \right] \\ &= -2\pi\mu_0 R J_{\varphi}, \end{aligned}$$

式中压力  $p$  和角向电流  $I$  为磁面  $\psi$  的函数,  $J_{\varphi}$  为环向电流密度. 通过坐标变换,不难得到球坐标  $(r, \varphi, \theta)$  下的磁面方程,即

$$\begin{aligned} \hat{L}\psi &= \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \psi \\ &= -2\pi\mu_0 r \sin\theta J_{\varphi}, \end{aligned} \quad (3)$$

式中

$$J_{\varphi} = 2\pi r \sin\theta \frac{d}{d\psi} p(\psi) + \frac{\mu_0}{4\pi r \sin\theta} \frac{d}{d\psi} I^2(\psi),$$

相应的边界条件为

$$\psi|_{r_0} = 0, \quad \mathbf{r} \cdot \nabla\psi|_{r_0} = 0. \quad (4)$$

这些边界条件表示在边界  $(r = r_0)$  上的热压  $p_0$  为常数和磁场为零.

Virial 定理意味着无力场 ( $\mathbf{J} \parallel \mathbf{B}$ ) 可能存在于一个外部环境压力  $p_0$  大于内部压力  $p$  的区域内. 因此,先不妨假设自平衡等离子体球内的磁场形态为无力场,即

$$\nabla \times \mathbf{B} = k\mathbf{B}, \quad (5)$$

式中  $k$  为常数, 称为无力因子<sup>[12]</sup>.

于是方程 (3) 中的  $J_\varphi$  可写为

$$J_\varphi = k^2 \psi / 2\pi\mu_0 r \sin\theta.$$

故磁面方程 (3) 为

$$\hat{L}\psi = -k^2\psi. \quad (6)$$

这是一个关于本征值  $k$  的本征方程. 分离变量后不难得到此方程的解为

$$\psi_l(r, \theta) = a_l r \sin\theta P_l(\cos\theta) J_l(k_l r), \quad (7)$$

式中  $P_l(\cos\theta)$  为缔合勒让德函数,  $J_l(k_l r)$  为  $l$  阶球贝塞耳函数. 待定系数  $a_l$  由边界条件定出. 由边界条件 (4) 式的两个方程得知  $a_l$  必须为零, 即方程 (6) 只有全零解. 由此得到有界球形等离子体的自平衡态不可能是无力场形态.

现在考虑有力场情况. 不妨假设等离子体球内的平衡压力和角向电流与磁面的关系为

$$p(\psi) = a_0 \psi + p_0, \quad I(\psi) = c_0 \psi, \quad (8)$$

即环向电流分布为

$$J_\varphi = 2\pi a_0 r \sin\theta + \frac{\mu_0 c_0}{4\pi r \sin\theta} \psi,$$

式中  $a_0$  和  $c_0$  为常数, 它们分别与压力梯度和角向电流梯度有关,  $p_0$  为环境压力.

于是方程 (3) 可写为

$$\hat{L}\psi = -ar^2 \sin^2\theta - b^2\psi, \quad (9)$$

式中  $a = 4\pi^2 \mu_0 a_0$ ,  $b = \mu_0 c_0$ .

方程 (9) 的通解为

$$\psi = r \sin^2\theta \left[ \alpha_0 J_1(br) - \frac{a}{b^2} r \right]. \quad (10)$$

由边界条件 (4) 式及贝塞耳函数递推关系式便可定出

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= ar_0/b^2 J_1(br_0), \\ J_2(b_n r_0) &= 0 \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

式中  $b_1 = 5.7635/r_0$ ,  $b_2 = 9.095/r_0$ ,  $\dots$ , 由  $J_2(x)$  的周期性可知  $\{b_n\}$  为无穷集. 对第  $l$  个  $b$  值的解写为

$$\psi_l = \frac{ar \sin^2\theta}{b_l^2} \left[ \frac{r_0}{J_1(b_l r_0)} J_1(b_l r) - r \right]. \quad (12)$$

球形等离子体内的磁轴位置可由  $\nabla\psi_{\max} = 0$  定出, 即

$$\frac{2r^3 J_1(b_l r_0) b_l^2}{r_0} - b_l r \cos(b_l r) + (1 - b_l^2 r^2) \sin(b_l r) = 0 \quad (13)$$

的根  $r = r_m$  为磁轴  $\psi_{\max}$  的位置 (此时  $\theta = \pi/2$ ).

由 (12) 式不难得到对应于  $b_l$  的平衡磁场分布

$$\begin{aligned} B_{\theta l} &= \frac{2a \cos\theta}{b_l^2 r} \left[ \frac{r_0 J_1(b_l r)}{J_1(b_l r_0)} - r \right], \\ B_{\theta 0} &= \frac{a \sin\theta}{r b_l^2} \left\{ 2r - \frac{r_0}{J_1(b_l r_0)} \left[ J_1(b_l r) + r \frac{d}{dr} J_1(b_l r) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$B_{\varphi} = \frac{a \sin \theta}{2\pi b_l} \left[ \frac{r_0 J_1(b_l r)}{J_1(b_l r_0)} - r \right], \quad (14)$$

式中下标  $r, \theta$  和  $\varphi$  分别表示磁场的  $r, \theta$  和  $\varphi$  分量.

不难写出球形等离子体自平衡态的压力分布为

$$p_l = \frac{4\pi^2 \mu_0 a^2}{b_l^2} \left[ \frac{r_0 J_1(b_l r)}{J_1(b_l r_0)} - r \right] + p_0. \quad (15)$$

引入空间平均记号  $\langle \dots \rangle$  后, 可以证明有

$$\left\langle \frac{r_0 J_1(b_l r)}{J_1(b_l r_0)} - r \right\rangle < 0.$$

因此得出结论: 自约束球形等离子体内的平衡压力分布平均量小于球外的环境压力, 即

$$\langle p_l \rangle < p_0. \quad (16)$$

此结论与太阳日冕中的压力分布的研究结果一样, 都是外部环境压力大于内部平均压力<sup>[6]</sup>.

#### 四、稳定性性质的讨论

既然球形马克与自平衡等离子体球的平衡形态相似, 有必要将它们两者作一些有趣的比较.

以  $l = 1$  态为例, 用文献 [1, 3] 中有外加磁场球形马克中的平衡磁场形态同本文的结果比较.

假设两者的半径和总磁通相同, 即  $r_0$  和  $\psi_{\max}$  相等.

从图 1 看出在球形马克中磁轴的位置在  $0.6 r_0$  处<sup>[3]</sup>, 而本文的结果则在  $0.5 r_0$  处, 两者差 10%, 从物理上看可能是球形马克中心贯穿的外加磁场的磁压的作用, 使球形马克中的磁轴向外偏离.

由文献 [1] 可知, 在球形马克中的安全因子在磁轴和等离子体边界上分别为  $q_A = 0.825\gamma$  和  $q_R = 0.72$ , 其中  $\gamma = (\text{自约束等离子体球的 } \psi_{\max}) / (\text{球形马克中的 } \psi_{\max})$ . 由 (14) 式不难得到等离子体球自平衡时  $q$  在磁轴和边界上的值

$$q_A = 0.122, \quad q_R = 0.0818, \quad (17)$$

式中  $r_m$  为磁轴位置, 它可由 (13) 式给出. 对磁场剪切粗略的估计为

$$\left| \frac{dq/d\psi}{q} \right| \approx \frac{2}{q_A + q_R} \left| \frac{q_A - q_R}{\psi_{\max}} \right| = \begin{cases} 56.4 & \text{球形马克,} \\ 23.8 & \text{自约束球形等离子体.} \end{cases}$$

由此看出, 自约束的球形等离子体具有较弱的磁场剪切, 从 MHD 观点看, 这将对抑制交换模不稳定性产生一些不利影响.

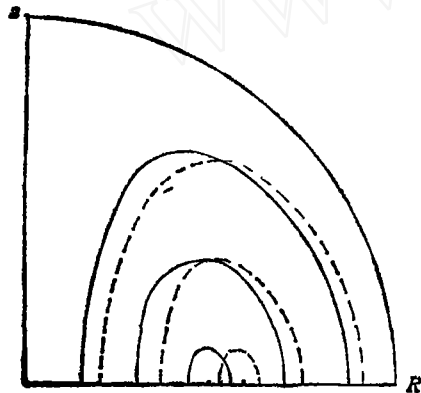


图 1

——为自约束球形等离子体平衡位形;

.....为球形马克平衡位形

由 (15) 和 (16) 两式可以看出, 自约束球形等离子体中的压力梯度指向球外, 即  $\frac{\partial p}{\partial r} > 0$ , 由 (17) 式可知  $q < 1$ , 因此用类似文献 [6] 的方法, 用 Mercier 判据可初步得知, 球形等离子体自约束的平衡态基本上是关于局域模扰动稳定的。

实际观察结果表明, 球形闪电具有较好的稳定性性质, 这与本文自约束等离子球的稳定性性质相似。这的确出乎作者预料, 一个没有外加平衡磁场的等离子体球不仅能平衡而且有良好的稳定性性质。

作者感谢薛明伦研究员的富有启发的讨论和热情的鼓励。

- [ 1 ] M. N. Rosenbluth, M. N. Bussac, *Nuclear Fusion*, 19(1979), 489.
- [ 2 ] I. R. Jones, Flinders University Report No. FUPH-R-151, (1979).
- [ 3 ] 吴汉明、潘良儒, 物理学报, 33(1984), 1100.
- [ 4 ] J. C. Brown and D. F. Smith, *Rep. Prog. Phys.*, 43(1980), 125.
- [ 5 ] E. R. Priest, (ed) *Solar Flare MHD*, Gordon & Breach, New York (1981).
- [ 6 ] MingLun Xue, James Chen, *Solar Phys.*, 84(1983), 119.
- [ 7 ] B. M. Smirnov, *Phys. Reports*, 152(1987), 178.
- [ 8 ] Zou Yousuo, *Advances in Atmospheric Sciences*, 6(1) (1989).
- [ 9 ] A. I. Grigorjev & M. T. Dmitriev *Izvestija. VUSGV USSR, Ser. Phys., depon.*, (29) (1979); (296) (1979).
- [ 10 ] I. P. Stakhanov, *The Physical Nature of Ball Lightning*, Energoatomizdat, Moscow, (1985).
- [ 11 ] Glenn Bateman, *MHD 不稳定性*, 徐复等译, 原子能出版社, 北京(1982).
- [ 12 ] 潘良儒, 大文学报, 20(1979), 182.

## EQUILIBRIUM AND STABILITIES OF A SELF-CONFINED PLASMA BALL

WU HAN-MING

*Institute of Mechanics, Academia Sinica*

(Received 16 November 1988)

### ABSTRACT

Based on MHD concepts, we explain and prove that a self-confined plasma ball imbedded in a constant pressure  $p_0$  can be in equilibrium as well as stable states. Besides, it is found that the equilibrium states can not be force-free configurations. The conclusion that the average pressure inside the plasmaball is less than  $p_0$  is drawn from the calculation. Furthermore, we point out that the condition for the stability against local perturbations is satisfied, even magnetic shear is weaker in the plasmaball, which implies that the self-confined plasma ball can be expected to have some favourable MHD stability characteristics.