

旋涡内流计算

卞荫贵 赵烈于 欣
(中国科学院力学研究所)

摘要 本文采用涡量-向量势表示的不可压缩三维流动的基本方程及其边界条件。针对小曲率弯管流,忽略主流方向的扩散项而使基本方程抛物化并利用流量守恒条件确定轴向压力分布。为避免横向速度向量散度不为零所带来的麻烦,本文提出两种计算方案。计算结果证明:用于求解三维抛物化方程组的这两种方案都是方便可行的。

关键词 旋涡流动,内流,计算流体力学。

一、前 言

弯曲管道所引起的旋涡流动的研究有着广泛的应用。它涉及进气道与换热器的设计,也有助于了解人体动脉中沉积物的作用。

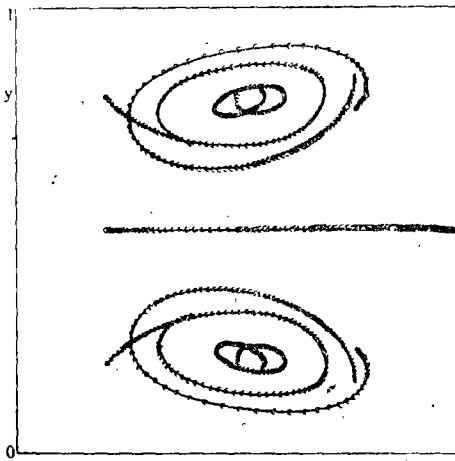


图1 质点轨迹投影图
($K = 143$)

当流体流过弯曲管道时,产生向心的压力梯度以与离心力平衡。由于摩擦效应,靠近壁面的流体要比管流中心部分流得慢,压力梯度的作用也相应减弱,从而产生由对称面分界的两股旋流。随着主流的带动,它们形成螺线型流动(图1)。

研究这种流动有两个重要参数:一是曲率参数,它是水力直径与曲率半径之比(d/R);另一个是Dean数(K),它由曲率和雷诺数组成, $K = \sqrt{d/R} Re$, $Re = \omega_0 d/\nu$ 。

本文从涡量-向量势方程出发,提出求解三维抛物化方程的两种计算方案。计算实践表明:这种对三维抛物化N-S方程的求解方法是可行的,对研究旋涡内流有一定的优越性。

二、涡量-向量势方程组

用差分方法求解不可压 N-S 方程的关键在于采用合适的方法求出压力而又满足连续方程。三维情况下，对于一个散度为零的螺线向量，可用向量势来表示。用涡量-向量势表示的方程为：

$$\partial \vec{\Omega} / \partial t + \vec{V} \cdot \nabla \vec{\Omega} - \vec{\Omega} \cdot \nabla \vec{V} = \gamma \nabla^2 \vec{\Omega} \quad (1)$$

$$\vec{V} = \nabla \times \vec{F} \quad \text{div } \vec{F} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V} \quad (3)$$

由此可得

$$\nabla^2 \vec{F} = -\vec{\Omega} \quad (4)$$

由于用向量势不象流函数那样有明确的物理意义，以致在提供 \vec{F} 的边界条件时出现过不同做法^[1]。事实上，在没有渗透的固壁附近，速度几乎平行壁面。如果只要求壁面法向速度为零，则有：

$$\hat{S} \cdot \vec{F} = 0 \quad \hat{n} \cdot \vec{F} \neq 0$$

再由 \vec{F} 的散度为零的条件(2)可知：

$$\frac{\partial}{\partial n} (\hat{n} \cdot \vec{F}) = 0$$

此外， \hat{n} 及 \hat{S} 分别为壁面法向及切向单位向量。所以(4)式的三个分量及边界条件如下：

$$\begin{array}{ccc} x-y \text{ 平面} & y-z \text{ 平面} & z-x \text{ 平面} \\ \nabla^2 F_1 = -\xi & F_1 = 0 & \partial F_1 / \partial x = 0 & F_1 = 0 \end{array} \quad (5a)$$

$$\begin{array}{ccc} \nabla^2 F_2 = -\eta & F_2 = 0 & F_2 = 0 & \partial F_2 / \partial y = 0 \end{array} \quad (5b)$$

$$\begin{array}{ccc} \nabla^2 F_3 = -\zeta & \partial F_3 / \partial z = 0 & F_3 = 0 & F_3 = 0 \end{array} \quad (5c)$$

上式之右端项将由求解(1)式给出。然而，这样只满足壁上法向速度为零的条件，而切向速度也应为零的条件有待在提供涡量边界条件时利用。这从二维问题的涡量-流函数方程组可以看得更清楚。

至此，用方程(1)和(5)求解三维问题时，有三个涡量方程和三个向量势方程，它们均属椭圆型。实际计算时，存储量大、费机时。为此，采用更适合于数值计算的抛物化方程。

三、抛物化方程及其解法

凡具有主流方向的流动，主流方向的扩散项一般比横向的扩散项小且可忽略。以这个方向上的坐标为准，其相应的动量方程便是抛物型的。因此，用抛物化方程近似求解“椭圆型”流场时，一个关键问题是用什么样的边界条件来考虑下游的效应，从而体现椭

圆型流场的本质。一般虽有主流方向的流动,而无粘流与粘性流的界限分不清,甚至根本不可分。压力分布作为求解的一部分,无法象二维边界层方程那样处理。因此,在一般情况下,求解抛物化方程用什么样的边界条件才能体现“椭圆型”流场的性质并没有很好解决。当然,对某些具体问题还可以采取适当的措施。

管道流用抛物化方程最为合适。主流方向沿着轴线,曲率小时可以不考虑下游效应,轴向压力分布可以利用流量守恒的条件,边迭代边推进计算出来。

1. 抛物化方程组

针对我们讨论的弯曲管道流,采用圆环坐标,如图2所示。其中, a 为方形截面边长; R_0 为弯曲管曲率半径; $R \approx R_0 + x$,用 a 作为参考长度; w_0 为参考速度。

本文考虑小曲率的情况,取 $a/R_0 = \epsilon \ll 1$ 。另外,横向尺度比轴向尺度小。所以将速度及坐标作相应的拉伸变换,现将无量纲的量列表如下:

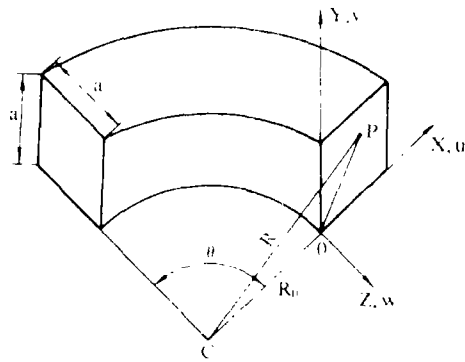


图2 弯曲管道及坐标系
 $R \approx R_0 + x, Z = \theta / \sqrt{a/R_0}$

变 量	原 物 理 量	无 量 纲 量*
坐 标	x, y, θ	$x/a, y/a, \theta / \sqrt{\frac{a}{R_0}}$
速 度	$\vec{V}(u, v, w)$	$\vec{v} \left(\frac{u}{w_0} / \sqrt{\frac{a}{R_0}}, \frac{v}{w_0} / \sqrt{\frac{a}{R_0}}, \frac{w}{w_0} \right)$
压 力	p	$\frac{p}{\rho w_0^2} = p_m + \frac{a}{R_0} p_1$
涡 量	$\vec{\Omega}(\xi, \eta, \zeta)$	$\vec{\Omega} \left(\frac{a}{w_0} \xi, \frac{a}{w_0} \eta, \frac{a}{w_0} \zeta / \sqrt{\frac{a}{R_0}} \right)$
向 量 势	$\vec{F}(F_1, F_2, F_3)$	$\vec{F} \left(\frac{F_1}{aw_0}, \frac{F_2}{aw_0}, \frac{F_3}{aw_0} / \sqrt{\frac{a}{R_0}} \right)$

* 无量纲坐标 $x' = x/a$, 代入方程后仍用相同符号 x , 但 θ 经变换后用 z 表示, $z = \theta / \sqrt{a/R_0}$ 。

将无量纲量代入用原始变量表示的方程组

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = - \text{grad} \frac{p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (6a)$$

$$D = \text{div} \vec{V} = 0 \quad (6b)$$

忽略 ϵ 一阶以上的高阶项, 则有:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (7a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (7b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla w = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{K} \nabla_i^2 w \quad (7c)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7d)$$

其中,

$$K = \sqrt{\frac{a}{R_0}} Re, \quad Re = \frac{w_0 a}{\nu}, \quad \nabla_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

由 (7a, b) 可知, 轴向压力梯度可以与横向压力梯度分开, 于是令:

$$p = p_m(z) + \varepsilon p_1(x, y, z) \quad (8)$$

最后得出用原始变量表示的三维抛物化 N-S 方程:

$$\vec{V} \cdot \nabla u - w^2 = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{1}{K} \nabla_i^2 u \quad (9a)$$

$$\vec{V} \cdot \nabla v = -\frac{\partial p_1}{\partial y} + \frac{1}{K} \nabla_i^2 v \quad (9b)$$

$$\vec{V} \cdot \nabla w = -\frac{d p_m}{dz} + \frac{1}{K} \nabla_i^2 w \quad (9c)$$

涡量方程(1), 涡量分量(3)以及用向量势表示速度式(2)的简化形式分别给出如下:

$$\vec{V} \cdot \nabla \xi - \vec{\Omega} \cdot \nabla_s u = \frac{1}{K} \nabla_i^2 \xi \quad (10a)$$

$$\vec{V} \cdot \nabla \eta - \vec{\Omega} \cdot \nabla_s v = \frac{1}{K} \nabla_i^2 \eta \quad (10b)$$

$$\vec{V} \cdot \nabla \xi + w \frac{\partial w}{\partial y} - \xi \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{K} \nabla_i^2 \xi \quad (10c)$$

其中,

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla_s = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} \quad (11)$$

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \eta = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (12)$$

$$u = \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad (12)$$

求解向量势的方程(5), 经简化后的形式:

$$\nabla_i^2 F_1 = -\xi, \quad \nabla_i^2 F_2 = -\eta, \quad \nabla_i^2 F_3 = -\xi \quad (13)$$

方程(13)与方程(5)虽然都是 Poisson 方程, 但前者是在 $x-y$ 平面内进行计算的二维问题, 而(5)式仍是三维方程。最后, 不论用哪一组方程, 都要另外计算压力, 而且只要计算 p_1 , p_m 的求法见后面。于是对(9a)式取 x 导数, 对(9b)式取 y 导数, 而后相加, 再利用(7d)式得:

$$\nabla_i^2 p_1 = \left(\vec{V} \cdot \nabla - \frac{1}{K} \nabla_i^2 \right) \frac{\partial w}{\partial x} + 2w \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \cdot (\nabla u) - \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \cdot (\nabla u) \quad (14a)$$

或

$$\nabla_z^2 p_1 = -\frac{d^2 p_m}{dz^2} + 2w \frac{\partial w}{\partial x} - \operatorname{div}(\vec{r} \cdot \nabla \vec{r}) \quad (14b)$$

2. 计算方案

尽管抛物化 N-S 方程的计算要比直接求解 N-S 方程方便很多, 但抛物化只适用于主流方向上的方程。对于三维问题, 横向截面上仍然需要求解两个 N-S 方程, 而且横向速度又不是散度为零的向量, 会带来不少麻烦。现在我们用几个二维 Poisson 方程求势函数, 可以回避这些问题, 从而又得到进一步的简化。做法是: 在主流方向上既用运动方程求 w , 也用涡量方程求 ζ , 它们都是抛物型方程。而后用二维 Poisson 方程求横向截面上的势函数。算法是从上游开始, 沿着主流方向边迭代边推进。

(1) 计算方案一:

先从(9c)式和(10c)式分别求 w 及 ζ , 而后用(13)式求 \vec{r} 以及用(12)式求 \vec{v} , 最后用(14)式求压力。在进行上述计算时还要补充几点说明。

a. 在求解(9c)式时, 需要补充一个用管道流量守恒的条件确定 $p_m(z)$ 的关系式。因此, 求得 w 后要求满足下列关系式:

$$\int_0^1 \int_0^1 w dx dy = Q \quad (\text{常值}) \quad (15)$$

如上述条件得不到满足, 再修正 p_m 的值。

b. ζ 的边界条件, 经验表明用一阶精度公式较好^[1]。

$$\text{在 } x-z \text{ 平面上} \quad \zeta_w = -u_{w+1}/h \quad (16)$$

$$\text{在 } y-z \text{ 平面上} \quad \zeta_v = v_{w+1}/h$$

其中, u_{w+1} , v_{w+1} 为近壁处第一个内点上的值。

c. 求解向量势方程(13)的边界条件, 见(5)式。

$$\text{在 } x \text{ 轴上} \quad F_1 = 0, \quad \partial F_2 / \partial y = 0, \quad F_3 = 0 \quad (17)$$

$$\text{在 } y \text{ 轴上} \quad \partial F_1 / \partial x = 0, \quad F_2 = F_3 = 0$$

d. 压力边界条件

用(14)式求压力 p_1 时, 边界条件可以从运动方程(9a)和(9b)求得:

$$\text{在 } x \text{ 轴上} \quad \partial p_1 / \partial y = \frac{1}{K} \partial^2 v / \partial y^2 \quad (18)$$

$$\text{在 } y \text{ 轴上} \quad \partial p_1 / \partial x = \frac{1}{K} \partial^2 u / \partial x^2$$

但这样求出来的压力值可能相差一个常值, 这一点经常被人们所忽视, 现在把方程(14)写成如下形式:

$$\nabla_z^2 p_1 = f$$

用 Neumann 条件求解 Poisson 方程时需要满足一个约束条件^[2], 即由上式进行面积分, 再用高斯定理得:

$$\int \partial p_1 / \partial n ds = \int_0^1 \int_0^1 f dx dy \quad (19)$$

(2) 计算方案二:

用轴向方程求 ω 、 ζ 与计算方案一相同, 但在求横向速度向量 \vec{V} 时稍有不同。由于 \vec{V} 既不是无旋向量, 又不是散度为零的螺线向量, 而且, $\vec{V} = \vec{V}_1 + \hat{z}\omega$, 现在将 \vec{V} 分成两个向量, $\vec{V}_1 = \vec{V}_2 + \vec{V}_3$, 这里 \vec{V}_2 和 \vec{V}_3 有:

$$\vec{V}_2 = \text{grad } \phi \quad \vec{V}_3 = \nabla \times \vec{F} \quad (20)$$

但 \vec{F} 只有一个分量 $\hat{z}F$, 现在用 ψ 替换 F , 不难得出:

$$\nabla_{\perp}^2 \phi = -\frac{\partial \omega}{\partial z} \quad (21)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \psi = -\zeta \quad (22)$$

计算步骤: 先从 (9c) 式及 (10c) 式求 ω 、 ζ , 再从上两式求 ϕ 及 ψ , 它们的边界条件分别为:

$$\partial \phi / \partial n = 0, \quad \psi = 0$$

再求速度

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (23)$$

压力的求法与方案一同。

四、计算结果与讨论

为了检验本文提出的三维抛物化方程组的计算方案, 我们计算分析了方形截面弯曲管道中不可压层流流动。计算用的参数范围为:

$$K = 55 \sim 210, \quad a/R_0 = 1/36$$

计算用的初值为:

$$z=0, \quad \omega = \omega_0 = 1, \quad u = v = 0$$

$$p_m(0) = 0, \quad p_1 = 0, \quad \zeta = 0$$

采用均匀网格, $\Delta x = \Delta y = h = 1/20$ 及 $1/36$, $\Delta z = 0.005$, 计算表明, $h = 1/20$ 的网格能得到满意的结果, 而且每一工况的 CPU 时间为 15 分钟。

计算结果见图 3 到图 7。图 3 给出不同 K 值时的轴向速度剖面。图 3 (1) 所示的沿水平中心面 ($0 \leq x \leq 1, y = 0.5$) 上 u 剖面随着轴向距离的推移而逐渐由对称型变为不对称型。其峰值位置不断向外壁漂移, 这表明弯管流中离心力的作用越来越明显。另外, 图 3 (2) 为垂直中心面 ($x = 0.5, 0 \leq y \leq 1$) 上 ω 剖面, 当 $K = 100, 143$ 时, 剖面渐渐出现双峰, 表明有一对涡存在。

图 4 为横截面上旋流 (二次流) 图象, 当 K 比较小时, 只有一对旋涡, $K = 210$ 时已明显地呈现两对旋涡。

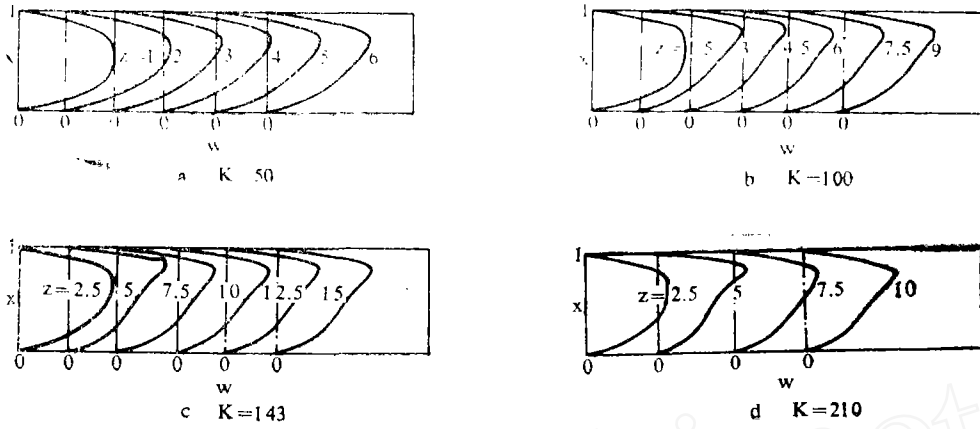


图3 (1) 轴向速度 w 的剖面 ($y=0.5, z=\theta/\sqrt{a/R_0}$)

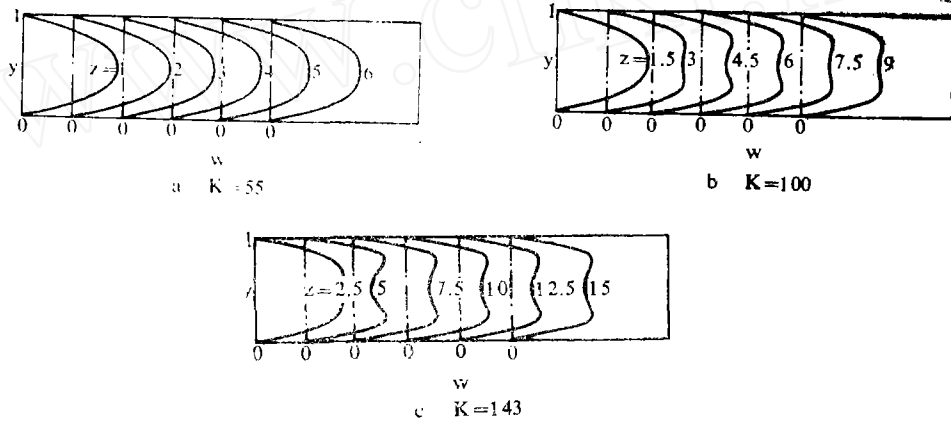


图3 (2) 轴向速度 w 的剖面 ($x=0.5$)

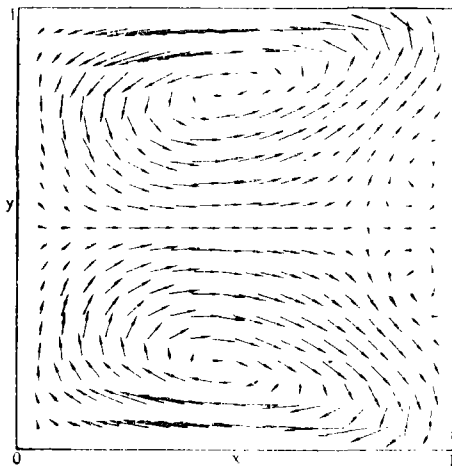


图4 二次流图象 ($K=210, z=9$)

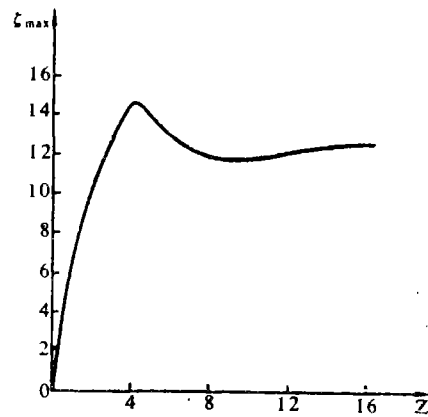


图5 最大涡量的变化

图 5 为最大涡量随轴向距离的变化，它反映了旋涡强度变化规律。图 6(a) 是横截面上总压等值线图。图 6(b) 表明总压沿轴向的变化。

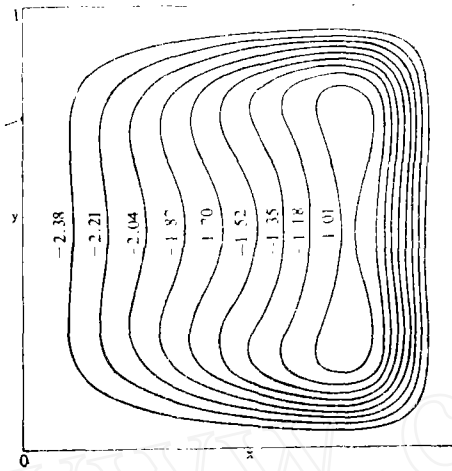


图 6a 总压等值线 ($K=143, z=8$)

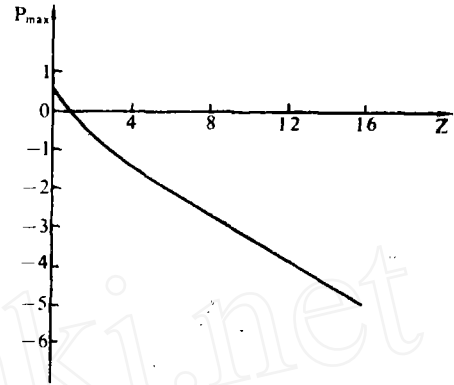


图 6b 总压沿轴向的变化

以上计算结果均按计算方案二求得，并且与 Ghia 等人^[4]的计算做了比较，趋向是一致的。图 7 是根据方案一的计算结果，与图 4 对照，证实方案一的有效性。

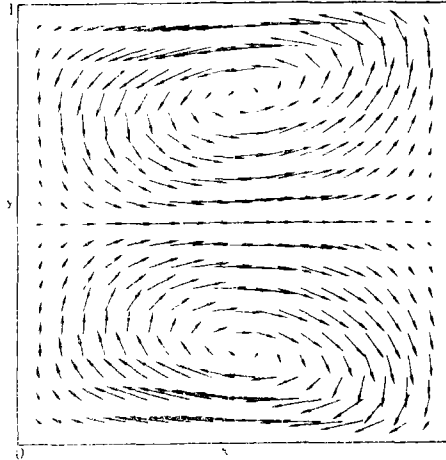


图 7 二次流图象(方案一, $K=143, z=4$)

本文着重探讨了用涡量-向量势表示的方程组及相应的边界条件。这些方程经抛物化后，对弯曲管道这样的三维问题进行了计算。结果表明，计算方案是方便可行的。

参 考 文 献

- [1] Aziz and Mallinson, *Phys. Fluids*, **10**, 2(1967), 314—324.
- [2] Roache, *Computational Fluid Dynamics* (1976).
- [3] Briley, *J. Comp. Phys.* **14**, 1(1974), 8—28.
- [4] Ghia et al., *ASME J. Fluids Eng.* Vol. 99(1977), 640—648.

CALCULATION OF INTERNAL VORTEX FLOW

Bian Yingui Zhao Lie Yu Xin

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract The flow in curved ducts has wide applications in engineering practice, such as heat exchangers, blade passages of turbomachinery, aircraft intakes etc. There are two similarity parameters in treating the curved duct flow. One is a measure of curvature by d/R , the other is Dean number $k = \sqrt{d/R} Re$, where $Re = W_0 d/L$. The numerical simulation is to solve the 3-D Navier-Stokes equations. In view of the primitive variables used, we employ the vorticity-vector potential formulation. Further simplification is needed in order to parabolize this set of equations along with the assumption of slightly curved duct to be analyzed. Two approaches of numerical solution are presented. It is shown that this way of solving the 3-D parabolized equations is feasible and is also advantageous to treat the internal vortex flow.

Key words vortex flow, internal flow, computational fluid dynamics.