

# 流体力学基本方程组 (BEFM) 的 层次结构理论和简化 Navier- Stokes 方程组 (SNSE)

高 智

(中国科学院力学研究所, 北京)

**提要** 本文从流场中空间和时间的尺度分析及流体力学基本方程组 (BEFM) 中诸项的量级分析出发, 提出了 BEFM 的层次结构理论. 表明: 当特征雷诺数  $Re > 1$ 、且一坐标方向的长度尺度大于其它坐标方向的长度尺度时, 按照 BEFM 中诸项的量级关系, 形成从 Euler 方程到 BEFM 和从边界层方程到 BEFM 的两支层次结构. 文中以二维可压缩流动和不可压缩轴对称射流为例说明了两支层次结构的关系和特点, 分析了诸层次方程组的特征、次特征 (Subcharacteristics) 以及它们的数学性质. 并把诸层次方程组与已有的诸简化 Navier-Stokes 方程组 (SNSE) 作了对照比较.

**关键词** 流体力学、粘性流、纳维埃-斯托克斯方程组、尺度模型、特征方法.

## 一、尺度、量级和流体力学基本方程组 (BEFM) 的层次结构

流场中可能存在许多长度和时间的尺度, 这些尺度是流体力学诸变量的变化速度的度量; 尺度本身可能随空间和时间而改变, 但诸尺度必须满足流体力学基本方程组 (BEFM) 加给它们的约束条件. BEFM 包括连续性方程、状态方程、能量方程和动量方程组. 因而, BEFM 中诸项的量级可能彼此不相同、且同一项的量级也可能随时间和空间位置的变化而改变, 但诸项的量级之间满足一定的关系和一定的变化规律. 因此可以想像, 按照 BEFM 中诸项的量级关系, BEFM 可被分成为若干明显的层次, 每一层次的方程组 (BEFM 除外) 构成了描述流场的一个近似理论. 今以完全气体绕流物体的非定常、可压缩二维流动为例, BEFM, 即连续性方程、Navier-Stokes 方程组、能量方程和状态方程的无量纲形式分别为

$$S_t \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0 \quad (1.1)$$

$$Re^{-n_\rho+n_t}; \quad Re^{-n_\rho-n_u+n_x}; \quad Re^{-n_\rho-n_v+n_y}$$

$$S_t \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$Re^{-n_u+n_t}; \quad Re^{-2n_u+n_x}; \quad Re^{-n_u-n_v+n_y}; \quad Re^{-n_p+n_\rho+n_x}$$

本文于 1985 年 11 月 30 日收到.

$$+ \frac{1}{\rho Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \quad (1.2)$$

$Re^{-1-n_u+2n_x+2n_\rho} \qquad Re^{-1-n_u+2n_y+2n_\rho}$

$$S_t \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} +$$

$$Re^{-n_\nu+n_t} \quad Re^{-n_u-n_\nu+n_x} \quad Re^{-2n_\nu+n_y} \quad Re^{-n_\rho+n_\rho+n_y}$$

$$+ \frac{1}{\rho Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \quad (1.3)$$

$Re^{-1-n_\nu+2n_x+2n_\rho} \qquad Re^{-1-n_\nu+2n_y+2n_\rho}$

$$S_t \left( \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right)$$

$$Re^{-n_T-n_\rho+n_t} \quad Re^{-n_\rho+n_t} \quad Re^{-n_T-n_\rho-n_x+n_x} \quad Re^{-n_\rho-n_\rho+n_x}$$

$$= \frac{C_p}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + \frac{\mu}{Re} \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$Re^{-1-n_T+n_\rho+n_t} \quad Re^{-1-n_T+n_\rho+2n_y} \quad Re^{-1-2n_u+2n_x+n_\rho}$

$$+ 2 \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (1.4)$$

$$Re^{-1-2n_u+2n_x+n_\rho} \quad Re^{-1-2n_\nu+2n_x+n_\rho} \quad Re^{-1-2n_u+2n_y+n_\rho}$$

$$p = \rho T \quad (1.5)$$

$$Re^{-n_\rho} \quad Re^{-n_\rho-n_T}$$

其中坐标变量用物体特征长度  $L$ 、时间用被绕流物体的振动特征频率  $f$ 、流速分量用自由流速度  $U_\infty$ 、密度、压力、温度、粘性系数和定压比热分别用  $\rho_\infty$ 、 $\rho_\infty U_\infty^2$ 、 $U_\infty^2/R$ 、 $\mu_\infty$  和气体常数  $R$  无量纲化;无量纲参数  $S_t$ 、 $Re$  和  $Pr$  分别为

$$S_t = \frac{Lf}{U_\infty}, \quad Re = \frac{\rho_\infty U_\infty L}{\mu_\infty}, \quad Pr = \frac{C_p \mu}{\lambda_T} \quad (1.6)$$

其中  $\lambda_T$  为导热系数。今假定

$$\begin{aligned} t &\sim Re^{-n_t}, & x &\sim Re^{-n_x}, & y &\sim Re^{-n_y}; & u &\sim Re^{-n_u}, \\ v &\sim Re^{-n_\nu}, & \rho &\sim \mu^{-1} \sim Re^{-n_\rho}, & p &\sim Re^{-n_\rho}, & T &\sim Re^{-n_T}, \\ S_t &\sim Re^0, & C_p &\sim Re^0, & Pr &\sim Re^0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

其中  $n_t$  可称为表示时间尺度的尺度指数,  $n_x$  为  $x$  方向长度尺度的尺度指数等。根据连续性方程 (1.1) 和状态方程 (1.5) 以及  $u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$  的关系, 容易推出诸尺度指数  $n_t$ 、 $n_x$  等满足如下的关系式

$$\left. \begin{aligned} n_t &= -n_u + n_x, & -n_u + n_x &= -n_\nu + n_y \\ n_\rho &= n_\rho + n_T, & n_\rho - n_\rho &= 2n_u \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

利用 (1.7) 和 (1.8) 诸式容易导出基本方程组 (1.1)–(1.5) 中诸项的量级, 它们均已在各项的下边标出。

BEFM 层次结构的基本前提是: 1) 特征雷诺数  $Re > 1$ , 2)  $x$  坐标方向的长度尺度大于  $y$  坐标方向的长度尺度, 即

$$Re^{-n_x} > Re^{-n_y}, \quad n_y > n_x \geq 0 \quad (1.9)$$

故有

$$n_v > n_u \geq 0, \quad u \sim Re^{-n_u} > v \sim Re^{-n_v} \quad (1.10)$$

首先考虑最大粘性项与最大惯性项为同一数量级, 即  $\frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \sim u \frac{\partial u}{\partial x}$  的情况, 推出诸尺度指数  $n_t$ 、 $n_x$  等满足如下的关系

$$\begin{aligned} -n_u + n_t &= -2n_u + n_x = -1 - n_u + 2n_y + 2n_\rho > -n_v + n_t = -n_u - n_v + n_x \\ &= -1 - n_v + 2n_y + 2n_\rho > -1 - n_u + 2n_x + 2n_\rho > -1 - n_v + 2n_x + 2n_\rho \end{aligned} \quad (1.11)$$

由式 (1.11) 可知, 按照 BEFM 中诸项的量级关系, BEFM 可被分成四个层次, 在式 (1.11) 中已用垂直虚线标出了它们, 也参见层次结构图 1. 这四个层次是:

1) **边界层方程层次**: 把 BEFM 中诸项保留到  $O(Re^{-1-n_u+2n_y+2n_\rho})$  量级项, 得到边界层方程层次, 层次方程组就是边界层方程组<sup>[1]</sup>.

2)  **$O(Re^{-n_u-n_v+n_x})$  量级方程层次**: 把 BEFM 中诸项保留到  $O(Re^{-n_u-n_v+n_x})$  量级项, 得到  $O(Re^{-n_u-n_v+n_x})$  量级方程层次; 层次方程组的左端与 BEFM (1.2)–(1.4) 的左端一致, 层次方程组的右端分别为

$$RHS_t = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.12)$$

$$RHS_n = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \right\} \quad (1.13)$$

$$RHS_e = \frac{C_p}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{Re} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (1.14)$$

其中 RHS 表示方程的右端, 足标  $t$  和  $n$  分别表示切向和法向动量方程,  $e$  表示能量方程, 上述符号将在下文继续使用. 我们指出: 对于二维可压缩粘性流动,  $O(Re^{-n_u-n_v+n_x})$  量级方程层次与从 Euler 方程到 BEFM 外层次结构中的内外层匹配 (IOM) 方程层次相重合, 参看图 1.

3) **部分抛物化方程层次**: 把 BEFM 中诸项保留到  $O(Re^{-1-n_u+2n_x+2n_\rho})$  量级项, 得到法向动量方程对  $x$  是抛物化的部分抛物化方程层次, 层次方程组的左端与 BEFM (1.2)–(1.4) 的左端一致, 层次方程组的右端分别为

$$\begin{aligned} RHS_t &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$RHS_n = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \quad (1.16)$$

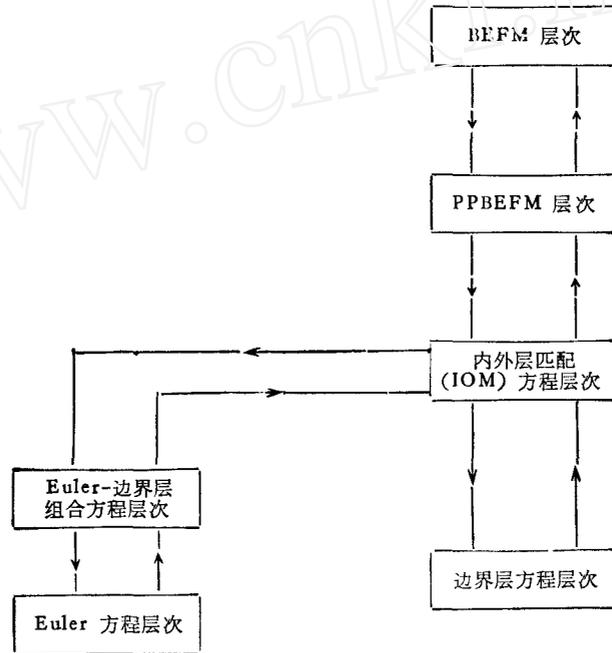
$$\begin{aligned} RHS_e &= \frac{C_p}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + \frac{\mu}{Re} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.17)$$

4) **BEFM 层次**: 把 BEFM 中的所有量级项全部保留下来, 得到 BEFM 层次, 层

次方程组自然就是 BEFM (1.1)–(1.5) 本身。

其次, 考虑最小量级惯性项与最大量级粘性项可相比较, 即  $\frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \ll u \frac{\partial v}{\partial x}$  的情况, 即着眼于考虑无粘-粘性流之间的过渡流动区域, 在该区域惯性项不可忽略粘性扩散也开始起作用。利用 (1.8) 和 (1.9) 诸式, 以及  $\frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \ll u \frac{\partial v}{\partial x}$  的关系, 容易导出诸尺度指数  $n_u, n_x$  等满足如下的关系

$$\begin{aligned} -n_u + n_t = -2n_u + n_x > -n_v + n_t = -n_u - n_v + n_x > -1 - n_u + 2n_y + 2n_p \\ > -1 - n_v + 2n_y + 2n_p > -1 - n_u + 2n_x + 2n_p > -1 - n_v + 2n_x + 2n_p \end{aligned} \quad (1.18)$$



$$O\left[\frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)\right] \ll O\left(u \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad O\left(u \frac{\partial v}{\partial x}\right) \sim O\left[\frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)\right]$$

图1 可压缩、二维粘性流动, 流体力学基本方程组 (BEFM) 的层次结构 (坐标方向长度尺度为  $x \sim Re^{-n_x}$ ,  $y \sim Re^{-n_y}$ ,  $n_y > n_x \geq 0$ ,  $Re > 1$ ; 内外层匹配 (IOM) 方程层次亦为  $O(Re^{-n_u - n_v + n_x})$  量级方程层次)

由式 (1.18) 可知, 按照 BEFM 中诸项的量级关系, BEFM 可被分为五个层次, 在 (1.18) 中已用垂直虚线标出了它们, 参见图 1。这五个层次是:

1) Euler 方程层次: 把 BEFM 中诸项保留到  $O(Re^{-n_u - n_v + n_x})$  量级项, 得到 Euler 方程层次, 层次方程组就是 Euler 方程组。

2) Euler 边界层组合方程层次: 把 BEFM 中诸项保留到  $O(Re^{-1 - n_u + 2n_y + 2n_p})$  量级项, 得到 Euler 边界层组合方程层次, 层次方程组的左端与 BEFM (1.2)–(1.4) 的左端一致, 层次方程组的右端分别为

$$\text{RHS}_t = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho Re} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.19)$$

$$\text{RHS}_n = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1.20)$$

$$\text{RHS}_e = \frac{C_p}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{Re} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (1.21)$$

3) 内外层匹配(IOM)方程层次:把 BEFM 中诸项保留到  $O(Re^{-1-n_x+2n_y+2n_\rho})$  量级项,得到既保留了全部惯性项同时又保留了各坐标方向上的主要粘性项的 IOM 方程层次. IOM 层次方程组就是方程组(1.1)、(1.5)、(1.12)–(1.14),这里不再写出.不过应注意到:这里 IOM 方程组中诸项的量级关系不同于从边界层方程到 BEFM 内层次结构中  $O(Re^{-n_x-n_y+n_x})$  量级层次方程组中诸项的量级关系.

4) 部分抛物化方程层次:把 BEFM 中诸项保留到  $O(Re^{-1-n_x+2n_y+2n_\rho})$  量级项,得到法向动量方程对  $x$  是抛物化的部分抛物化方程层次,层次方程组就是(1.1)、(1.5)、(1.15)–(1.17),这里不再写出.但同样应注意到:这里部分抛物化方程组(PPBEFM)中诸项的量级不同于从边界层到 BEFM 内层次结构中 PPBEFM 中诸项的量级.

5) EEFM 层次:把 BEFM 中的所有量级项全部保留下来,得到 BEFM 层次,层次方程组就是 BEFM (1.1)–(1.5) 本身.

## 二、分析与讨论

对上节的理论,作如下的分析和讨论:

1) 若特征雷诺数  $Re > 1$ ,且某一坐标方向的长度尺度大于其它坐标方向的长度尺度时,按照 BEFM 中诸项的量级关系可把 BEFM 分成为若干层次,诸层次的层次方程组(BEFM 本身除外)构成了描述流场的合理的近似理论(或称近似方程组).

2) BEFM 的层次结构分为两支,一支是从边界层方程到 BEFM 的内层次结构,一支是从 Euler 方程到 BEFM 的外层次结构,参看图 1 和图 2. 值得注意的是这两支层次结构并不在 BEFM 层次上开始重叠或开始分叉. 按照最大惯性项与最大粘性项为同一数量级的层次分析,若惯性项中不包含小于  $O(Re^{-1-n_x+2n_y+2n_\rho})$  量级的项,两支层次结构在 IOM 方程层次上开始重叠或开始分叉,例如上节讨论的二维流动就是这种情况;若惯性项中包含小于  $O(Re^{-1-n_x+2n_y+2n_\rho})$  量级的项,则两支层次结构在部分抛物化方程(PPBEFM)层次上开始重叠或开始分叉,这种情况的一个例子是不可压缩轴对称射流流动. 考虑从位于坐标原点小孔中射入无界流场的轴对称射流,在球坐标系  $(r, \theta, \varphi)$  中,射流轴线位于  $\theta = 0$ , 流速分量为  $(u, v, o)$ , 有关尺度表示为:

$$r \sim Re^{-n_r}, r\theta \sim Re^{-n_\theta}, u \sim Re^{-n_u}, v \sim Re^{-n_v} \quad (2.1)$$

其中  $Re > 1$ . 不可压缩轴对称射流的 BEFM 以及 BEFM 中诸项的层次理论之量级为:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \sin \theta) = 0 \quad (2.2)$$

$$Re^{-n_u+n_r} \quad Re^{-n_v+n_\theta}$$

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right. \\
 \left. - \frac{2u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{2v \cot \theta}{r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.3) \\
 Re^{-2n_u+n_r} \quad Re^{-2n_v+n_r} \quad Re^{-1-n_u+2n_r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right. \\
 \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \frac{v}{r^2 \sin \theta} \right] \quad (2.4) \\
 Re^{-n_u-n_v+n_r} \quad Re^{-2n_v+n_\theta} \quad Re^{-1-n_v+2n_r} \\
 Re^{-1-n_v+n_r+n_\theta} \quad Re^{-1-n_v+2n_\theta}
 \end{aligned}$$

在层次理论的尺度-量级分析中,假定射流流场中  $r$  方向的长度尺度大于  $\theta$  方向的长度尺度,即  $n_\theta > n_r \geq 0$ 。类似于上节的分析,对最大惯性项与最大粘性项为同一数量级,即  $\frac{1}{Re r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \sim u \frac{\partial u}{\partial r}$  的情况,推出诸尺度指数  $n_r, n_\theta$  等满足如下的关系

$$\begin{aligned}
 -2n_u + n_r = -1 - n_u + 2n_\theta > -n_u - n_v + n_r = -2n_v + n_\theta = \\
 -1 - n_v + 2n_\theta > -1 - n_u + 2n_r = -2n_v + n_r > -1 - n_v + 2n_r \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

对最大粘性项与最小惯性项可相比较即  $\frac{1}{Re r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \leq \frac{v^2}{r}$  的情况,推出诸尺度指数  $n_r$  等满足如下的关系

$$\begin{aligned}
 -2n_u + n_r > -n_u - n_v + n_r > -2n_v + n_r \geq -1 - n_u + 2n_\theta > \\
 -1 - n_v + 2n_\theta > -1 - n_u + 2n_r > -1 - n_v + 2n_r \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

由式(2.5)和(2.6)可知,对不可压缩轴对称射流从边界层方程到 BEFM 的内层次结构分为四层,而从 Euler 方程到 BEFM 的外层次结构则有五层,两支层次结构在对  $\theta$  方向部分抛物化方程(PPBEFM)层次上开始重叠或开始分叉,参看图 2,应注意到 IOM 方程层次位于从 Euler 方程到 BEFM 的外层次结构中,它与  $O(Re^{-n_u-n_v+n_r})$  量级方程层次不相重合。

3) 诸层次方程组的特征、次特征(Subcharacteristics)和数学性质:诸层次方程组的特征分析是数值计算的必要前提,它决定了方程组所描述的流场的主要结构和特点,规定了影响和依赖区域,并为稳定数值方案的设计提供依据。诸层次方程组均为拟线性偏微分方程组,其特征由最高阶偏导数所组成的一次齐式即层次方程组的主部所决定<sup>[2]</sup>。诸层次方程组在  $Re \rightarrow \infty$  的近似下,即略去粘性扩散和热传导项后得到的偏微分方程组规定了原始诸层次方程组的次特征<sup>[3]</sup>。考虑二维可压缩流动的定常情况,对 BEFM(1.1)~(1.5)令

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} = U^{(x)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = U^{(y)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = V^{(x)} \\
 \frac{\partial v}{\partial y} = V^{(y)}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = q^{(x)}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = q^{(y)} \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

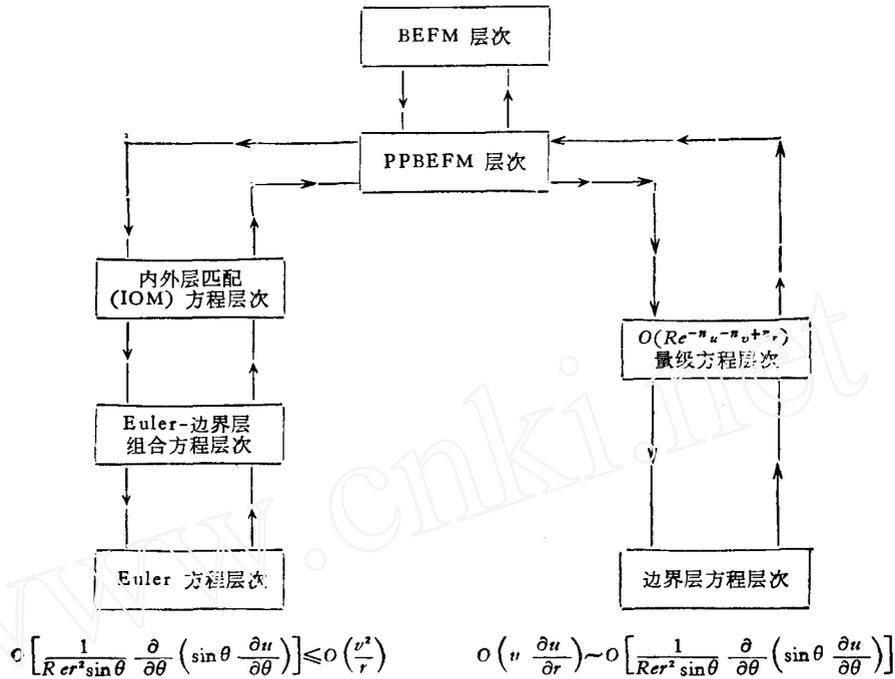


图 2 不可压缩、轴对称射流流动,流体力学基本方程组 (BEFM) 的层次结构(坐标方向长度尺度为:  $r \sim Re^{-n}r$ ,  $r\theta \sim Re^{-n}\theta$ ;  $n_0 > n, \geq 0$ ,  $Re > 1$ )

利用 (2.7) 诸式, 并利用状态方程 (1.5) 消去压力  $p$ , 即可把连续性、动量和能量诸方程转换为关于  $Z = (\rho, u, U^{(x)}, U^{(y)}; v, V^{(x)}, V^{(y)}; T, q^{(x)}, q^{(y)})$  的联立一阶拟线性偏微分方程组

$$A \frac{\partial Z}{\partial x} + B \frac{\partial Z}{\partial y} = F \quad (2.8)$$

其中  $Z$  和  $F$  是 10 维列向量,  $A$  和  $B$  为  $10 \times 10$  维矩阵。拟线性偏微分方程组 (2.8) 的特征方程为

$$\det(\sigma_1 a_{ij} + \sigma_2 b_{ij}) = 0 \quad (2.9)$$

特征根为

$$\sigma_1^3 = 0, \lambda_4 = \frac{v}{u}, \lambda_{5,6,7} = i, \lambda_{8,9,10} = -i \quad (2.10)$$

其中  $\lambda = -\sigma_1/\sigma_2$ ,  $\sigma_1^3 = 0$  的三重零特征相应于方程组 (2.8) 中主部为  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  和  $\frac{\partial T}{\partial x}$  的三个方程, 它们与方程组 (2.8) 中其它七个方程的主部无关; 其它七个方程, 也就是说其它特征根决定了原始方程组的数学性质, 其它七个特征根除一个为实根外其余六个均为虚根, 因此 BEFM 为椭圆型。通过类似的数学运算, 可得到其它层次方程组的特征, 它们分别是: 对部分抛物化方程组 (PPBEFM)

$$\sigma_1^3 = 0, \sigma_2^2 = 0, \lambda_6 = \frac{v}{u}$$

$$(\lambda_7, \lambda_8, \lambda_9, \lambda_{10}) = \left( i, -i, \frac{2}{5} \sqrt{5} i, -\frac{2}{5} \sqrt{5} i \right) \quad (2.11)$$

对内外层匹配 (IOM) 方程组

$$\sigma_1^3 = 0, \sigma_2^6 = 0, \lambda_{10} = \frac{v}{u} \quad (2.12)$$

对 Euler-边界层组合方程组

$$\sigma_1^2 = 0, \sigma_2^4 = 0, \lambda_7 = \frac{v + \sqrt{T}}{u}, \lambda_8 = \frac{v - \sqrt{T}}{u} \quad (2.13)$$

对经典边界层方程组

$$\sigma_1^2 = 0, \sigma_2^6 = 0 \quad (2.14)$$

式 (2.13)–(2.16) 表明: 部分抛物化方程组 (PFBEFM) 为椭圆型, IOM 方程组和 Euler-边界层组合方程组为双曲-抛物型, 边界层方程组为抛物型.

Euler 方程组的特征根求出为

$$\lambda_{1,2} = \frac{v}{u}, \lambda_3 = \frac{M_x M_y + \sqrt{M^2 - 1}}{M_x^2 - 1}, \lambda_4 = \frac{M_x M_y - \sqrt{M^2 - 1}}{M_x^2 - 1} \quad (2.15)$$

其中  $M_x = u/a$ ,  $M_y = v/a$ ,  $M^2 = (M_x^2 + M_y^2)$ ,  $a$  为声速,  $M$  为马赫数. 当  $M > 1$ , 所有四个特征根为实根, 属双曲型;  $M < 1$  时,  $\lambda_3$  和  $\lambda_4$  为复根, 属椭圆型.

关于次特征, 除边界层方程组和 Euler 方程组外, 所有其它层次方程组的次特征就是 Euler 方程组的特征, 就是说 BEFM、部分抛物化方程组 (PPBEFM)、IOM 方程组、 $O(Re^{-n} u^{-n} v^{n+1} x)$  量级层次方程组和 Euler-边界层组合方程组, 它们的次特征均为 (2.15). 边界层方程组的次特征求得为:

$$\sigma_2^2 = 0, \lambda_{3,4} = \frac{v}{u} \quad (2.16)$$

即有二重零特征和二重实特征.

上述诸层次方程组的特征分析表明:

i) BEFM 和部分抛物化方程组 (PPBEFM) 的数学性质一致, 均为椭圆型, 它们的椭圆性质既通过高阶粘性扩散项(特征)也通过压力梯度  $\frac{\partial p}{\partial x}$  项(次特征)来反映. 高阶粘性扩散项表征的椭圆型与马赫数  $M$  无关; 压力梯度项表征的椭圆型与  $M$  数有关, 即仅在  $M < 1$  的亚声速流动区为椭圆型, 这就是说压力梯度的存在可使扰动通过亚声速区逆流方向向上游传播.

ii) 内外层匹配 (IOM) 方程组、 $O(Re^{-n} u^{-n} v^{n+1} x)$  量级层次方程组和 Euler-边界层组合方程组的特征为零根和实根, 就是说它们均略去了高阶粘性扩散“引起的”椭圆性质; 但这些方程组的次特征在  $M < 1$  时有复根, 故它们又都保留了压力梯度“引起的”椭圆性质, 即扰动将通过亚声速区逆流方向向上游传播.

iii) 二维可压缩流边界层方程组的特征为零根, 次特征包含零根和实根, 因此边界层方程组为抛物-双曲型.

iv) 对于 BEFM 的近似理论来说, 显然, 边界层方程层次、Euler 方程层次以及两支层次结构开始重叠或开始分叉的层次是三个最重要的层次. 两支层次结构开始重叠或

开始分叉的层次可能是 IOM 方程层次,也可能是部分抛物化方程 (PPBEFM) 层次.然而,考虑到 PPBEFM 在数学上为椭圆型, IOM 方程组的数学性质在  $M > 1$  时为抛物-双曲型, IOM 方程组明显地比 PPBEFM 简单,因此, IOM 方程层次是三个最重要层次中的一个层次.

### 三、对已有诸简化 Navier-Stokes 方程组 (SNSE) 的注释

近十几年来文献上提出了不少简化 Navier-Stokes 方程组 (SNSE) 的方法和原则,相应的 SNSE 已广泛用于流场的数值计算.对 SNSE 的注释以及把诸 SNSE 与本文层次方程组的比较如下:

1) 关于 SNSE 的一个实际情况是:对同一流场且选择同一坐标系的条件下,已有诸简化原则导致的诸 SNSE 并不相同.文献 [4—7] 对常见的一些 SNSE 作了数值的或解析的比较研究,他们的结果已表明诸 SNSE 的结果之间存在着比较明显的差异.诸 SNSE 之间的区别在于一些粘性项,按照经典边界层理论<sup>[1]</sup>的量级估计,这些粘性项为  $Re^{-1/2}$  量级.然而实际情况并非完全如此.用 SNSE 的目的是计算全流场,其中包括无粘和粘性流场,粘性流场可以是边界层流,也可以是比边界层流更复杂的流动;因此,上述粘性诸项并非总是  $Re^{-1/2}$  量级,事实上,按照本文层次理论的普适量级估计,这些粘性项的量级应为  $Re^{-1-n_v+2n_y+2n_p}$  量级,由于  $0 < 1 + n_v - 2n_y - 2n_p \leq \frac{1}{2}$ ,当等于  $\frac{1}{2}$  时为经典边界层流动,故这些粘性项能够不是小量.这既为文 [4—7] 关于诸 SNSE 结果之间存在明显差异的结论提供了一个新的解释,同时也说明诸 SNSE 之间的差异值得重视.

2) 对给定的粘性流动,若对描述该流动的相应诸 SNSE 及层次方程组作与上节相类似的特征分析,能够发现诸 SNSE 的特征、次特征及数学性质与层次方程组中的 IOM 方程组、 $O(Re^{-n_u-n_v+n_x})$  量级层次方程组和 Euler-边界层组合方程组的特征、次特征及数学性质完全一致,这表明对数值计算来说诸 SNSE 与上述诸层次方程组的难易是等同的.从诸 SNSE 和上述诸层次方程组中挑选最合理的方程组是有意义和有用的;同时也说明,关于 BEFM 的近似理论(或称近似方程组),按照它们的数学性质来分类,可分为四类:即边界层方程组、Euler 方程组、PPBEFM 和以 IOM 方程组为代表的 SNSE (它们包括已有的诸 SNSE 以及层次方程组中的 IOM 方程组、 $O(Re^{-n_u-n_v+n_x})$  量级方程组和 Euler-边界层组合方程组).

3) 已有的诸 SNSE,有的与本文的层次方程组相重合、有的不相重合.不相重合的例子如 Davis 粘性层方程组<sup>[8]</sup>,略去粘性应力流向导数的部分抛物化 NS 方程组<sup>[9]</sup>和 Baldwin-Lomax 薄层近似<sup>[10]</sup>等,显然这些 SNSE 不满足量级一致性原则,即它们简化 NS 方程时,NS 方程中相同数量级的诸粘性项,有的被保留在 SNSE 中,有的则被略去了. SNSE 与层次方程组相重合的例子如内外层匹配 SNSE<sup>[11]</sup>、薄层一阶 SNSE<sup>[12]</sup>.内外层匹配 SNSE 就是 IOM 方程组,只不过前者是按照经典边界层理论<sup>[1]</sup>的量级分析由 BEFM 导出的,后者则是按照层次结构理论的更普适量级分析由 BEFM 导出的.薄层一阶 SNSE 就是 Euler-边界层组合方程组.

## 参 考 文 献

- [1] Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory* (7th ed.), New York, McGraw-Hill, (1979).
- [2] Петровский, И. Г. лекции об уравнениях с частными Производными М., Гостехиздат. (1953).
- [3] Telionis, D. P., *Unsteady Viscous Flows* (Springer Series in Computational Physics), Springer-Verlag, New York Inc., (1981).
- [4] Емельянова, з. м., Павлов, б. М., В КН. Вычислительные Методы и Программирование. Вып. 34 М., Изд-во Моск. УН-Та, (1981).
- [5] Murray, A. L., Lewis, C. H., *AIAA Jour.* **16**, 12 (1978), 1279.
- [6] 高智, 力学学报, **17**, 3(1985), 201.
- [7] 高智, 中国科学 A 辑, **30**, 6(1987).
- [8] Davis, R.T. *AIAA Jour.* **8**, 5 (1970), 843.
- [9] Patankar, S. V., Spalding, D. B., *Inter. Jour. of Heat and Mass Transfer* **15**, 10 (1972), 1987.
- [10] Baldwin, B. S., Lomax, H., *AIAA Paper* 78-257.
- [11] 高智, 力学学报, **14**, 6(1982), 606.
- [12] Головачев, Ю. П., Кузьмин, А. М., Попов, Ф. Д., *Ж. вычисл. Матем. и Матем. Физ.* **13**, 4(1973), 1021.

## GRADE STRUCTURE THEORY FOR THE BASIC EQUATIONS OF FLUID MECHANICS (BEFM) AND THE SIMPLIFIED NAVIER-STOKES EQUATIONS (SNSE)

Gao Zhi

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

**Abstract** A grade structure for the basic equations of fluid mechanics (BEFM) is found in this paper in the light of an analysis of the scales of length and time that proves a measure of the rate of change of the quantities describing the motion of the fluid as well as an estimation of the order of magnitude of various terms included in BEFM. The grade structure theory shows that if 1) the characteristic Reynolds numbers  $Re$  is larger than unity and 2) the length scale in one coordinate direction is larger than that in other coordinate directions, BEFM can be classified into some grades according to an estimation of the order of magnitude of various terms included in BEFM. The grade structure of BEFM has two branches: one is of from BLE-to BEFM-inner grade, the other is of from EE-to BEFM-outer grade, where BLE and EE are abbreviated from the boundary-layer equations and Euler equations, respectively. The relationship between the two branches of the grade structure, the characteristics and subcharacteristics and mathematical properties of the grade equations are studied. A comparison between the present grade equations and the Simplified Navier-Stokes equations (SNSE) appearing in literatures is also made. BLE-, EE- and Inner-outer-matched (IOM) equations grade are the most important and useful three grades for solving approximately viscous flow-fields.

**Key words** Fluid Mechanics, Viscous Flows, Navier-Stokes Equations, Scale Model, Characteristics Methods.