第20卷 第3期　　力 学 学 报　　Vol. 20, No. 3
1988年5月　　ACTA MECHANICA SINICA　　May, 1988

圆柱运动的内波渐近解

张 蝶 丽
(中国科学院力学研究所)

提要 本文提供一个二维内波的渐近解法. 对水平圆柱在无粘、稳定的密度连续分层流体中任意倾角运动的问题，得到了伴随的色散关系式. 结合倾角 $\alpha=90°$ 圆柱垂直运动情况,给出了圆柱面上的边界条件和无穷远衰减条件. 用渐近展开的方法求出内波的渐近解;对内波传布的规律作了讨论并与内波流场显示结果进行了比较，计算结果合理. 运用本解法可望在求解分层流体中圆柱任意方向运动的问题,其它形状物体分层绕流的内波问题、非定常色散以及三维的内波问题中得到推广应用.

关键词 密度分层流体,内波,渐近方法,色散关系,常相位线.

一、引 言

在大气、海洋、地质、复合材料中，由于介质(或材料)在空间分布的不均匀性，存在内波问题. 尽管人们期望控制方程也有可分离变量形式的解，但作为波数分量的函数——振幅是有奇性的,它们属于色散方程类型. 由于数学上的困难,这类问题能够精确求解的为数极少,行之有效的解法也不多见.

关于圆柱在密度分层流体中垂直运动，Warren[1] (1959) 用特殊函数方法得到了内波波谱,但用这种方法解其它绕流问题的内波,显得十分麻烦. Rarity[2] (1967) 给出了圆柱以任意倾角运动时波峰、波谷的相位线，但没有最终给出内波解析表达式. 本工作考虑了圆柱以任意倾角在稳定的密度分层流体中运动问题的数学提法，通过 Fourier 变换,把解微分方程的问题化为解代数方程的问题，得到了伴随的色散关系式. 此时再作 Fourier 反变换求振幅 $F(K_1, K_2)$ 通常是比较困难的. 本工作通过另一条途径，结合倾角 $\alpha=90°$ 圆柱垂直运动情况,给出圆柱运动时的边界条件，用流动可视化的方法,获得圆柱面上流线的清晰图形,这与理论曲线是十分吻合;再给出无穷远的衰减条件，求得了振幅表达式. 对于任意倾角运动情况就不难通过坐标变换来得到. 用复变函数方法求解了一重积分以后,进一步用 Lighthill[3] (1979)、Jeffrey[4] (1962) 及 de Bruizn[5] (1970) 渐近展开方法中的鞍点法(或称常相位法)估计了积分的主要贡献在零点和奇性最坏的点附近,最后给出内波的渐近解析表达式,求出了内波的近似解.

在几种不同的圆柱直径、不同的运动速度和不同的环境频率情况下对内波形状和传播规律作了初步探讨并和实验[6]作了比较，计算结果合理;对所作的简化和近似可能导致的误差作了估计和分析.

本文于 1986 年 10 月 25 日收到，1987 年 9 月收到修改稿.

二、控制方程和色散关系

建立一个固定的直角坐标系 $\bar{O}\bar{X}\bar{Z}$ 和一个以 x 轴为水平，z 轴为铅垂并且向上为正的运动坐标系 oxz. 在原点 O 水平地放置一个圆柱，圆柱以常速度 V 沿着垂直于它母线的方向与水平成 α 倾角随同 oxz 坐标系一起移动，如图 1.

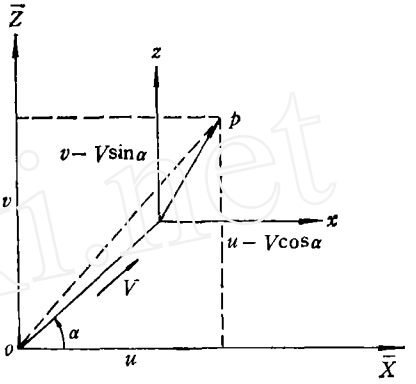

图 1　坐标系示意图

如果物体运动比较缓慢，在运动坐标系里流动可以视为定常的. 忽略粘性的影响，考虑圆柱二维运动引起的扰动.

令压力 $p = p_1 + p_0$，密度 $\rho = \rho_1 + \rho_0$，扰动速度 $(u - V\cos\alpha,\ v - V\sin\alpha)$，这里下标"0"表示静止介质中平衡状态的量，下标"1"表示扰动的量. 还利用密度沿着流体微团的路径是不变的假设：$\frac{d\rho}{dt} = 0$. 再考虑到 p_0 在 x 方向没有变化，在 z 方向其变化与重力相平衡，即 $\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0 g$. 控制方程写成：

$$(v - V\sin\alpha)\frac{\partial\rho_0}{\partial z} - V\cos\alpha\frac{\partial\rho_1}{\partial x} - V\sin\alpha\frac{\partial\rho_1}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

$$\rho_0 V\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \rho_0 V\sin\alpha\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial p_1}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\rho_0 V\cos\alpha\frac{\partial v}{\partial x} + \rho_0 V\sin\alpha\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial p_1}{\partial z} + \rho_1 g. \tag{3}$$

对方程(1)—(3)线性化，利用众所周知的 Väisälä-Brun 近似：除了在重力项中要计及密度变化的影响外，可把密度当常量. 引进流函数 ψ，满足 $u = \frac{\partial\psi}{\partial z}$、$v = \frac{\partial\psi}{\partial x}$. 就有方程：

$$V^2\cos^2\alpha\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + 2V^2\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial^4\psi}{\partial x\partial z^3} + 2V^2\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial^4\psi}{\partial x^3\partial z}$$
$$+ V^2\sin^2\alpha\frac{\partial^4\psi}{\partial z^4} + V^2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial z^2} + \omega_0^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0. \tag{4}$$

其中 ω_0 是 Väisälä 频率(也称自然频率或环境频率)，$\omega_0^2 = -\frac{g}{\rho_0^*}\frac{d\rho_0}{dz}$. 已知 ρ_0 是随着高度 $\bar{z}$ 线性减少的，$\rho^* = \rho_0|_{z=0}$.

方程 (4) 是非双曲型的，解的类型属色散波系，实际上色散波系是一个有奇性的简谐波系. 假设 (4) 有形如 $\psi(x, z) = \iint_{-\infty}^{\infty}\psi_0(z)f(k_1,k_2)\exp\{i(k_1x + k_2z)\}dk_1dk_2$ 的解，把 $\psi(\cdot, z)$ 的各阶导数代入(4)后，得到代数方程组. 若令 $\psi_0(z) = e^{Dz}$，只要 $D = 0$，就有

$$k_1^4V\cos^2\alpha + 2k_1k_2^3V^2\sin\alpha\cos\alpha + 2k_1^3k_2V^2\sin\alpha\cos\alpha + k_2^4V^2\sin^2\alpha$$
$$+ k_1^2k_2^2V - \omega_0^2k_1^2 = 0.$$

只要波数分量 k_1、k_2 满足色散关系式:

$$(k_1V\cos\alpha + k_2V\sin\alpha)^2 = \omega_0^2k_1^2/(k_1^2 + k_2^2). \tag{5}$$

那么

$$\phi(x, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(k_1, k_2)\exp\{i(k_1x + k_2z)\}dk_1dk_2 \tag{6}$$

就是方程(4)的解. 因此问题的解一定伴随着一个色散关系,而色散关系式确定了每个波数的传布方向,波数向量的方向就是波阵面的法向.

三、相 位 线

引进变换,$K_1 = \frac{V}{\omega_0}(k_1\sin\alpha - k_2\cos\alpha)$. $K_2 = \frac{V}{\omega_0}(k_1\cos\alpha + k_2\sin\alpha)$. 建立无量纲坐标, $X = \frac{\omega_0}{V}(x\sin\alpha - z\cos\alpha)$, $z = \frac{\omega_0}{V}(x\cos\alpha + z\sin\alpha)$. 令 $k_1 = k\cos\vartheta$, $k_2 = k\sin\vartheta$, 取 $k = |\sqrt{k_1^2 + k_2^2}|$, 且 $k > 0$. 利用色散关系 (5) 就有

$$k_1 = \frac{\omega_0}{V}\left|\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin\theta}\right|\sin(\theta+\alpha),\quad k_2 = -\frac{\omega_0}{V}\left|\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin\theta}\right|\cos(\theta+\alpha).$$

在解的表达式(6)中必须在常相位的点上取值, 即 $k_1x + k_2z = \phi$, $\phi = \pm\pi$、$\pm2\pi$、$\pm3\pi$、……,另一方面常相位的点必定异数为零,即 $\frac{dk_1}{dk_2}x + z = 0$,

令 $K_1 = K\cos\theta$, $K_2 = K\sin\theta$ 后,可得到

$$\left.\begin{aligned} X/\Phi &= \sin^2\theta\cos(\theta+\alpha)/\sin^2(\theta+\alpha), \\ Z/\Phi &= [\sin(\theta+\alpha) - \cos(\theta+\alpha)\sin\theta\cos\theta]/\sin^2(\theta+\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

这里波峰的相位是 Φ 取 $\pm2\pi$、$\pm4\pi$、$\pm6\pi\cdots$,波谷的相位是 Φ 取 $\pm\pi$、$\pm3\pi$、$\pm5\pi$、$\cdots$.

当 $\alpha = 90°$ 时,则有

$$\left.\begin{aligned} X/\Phi &= -\sin^3\theta/\cos^2\theta, \\ Z/\Phi &= (1+\sin^2\theta)/\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

图 2 给出圆柱垂直运动时内波的相位线. 对任意选定的 α, 我们由(7)式很容易得到圆柱以任意倾角 α 运动时内波的相位线,从这些波峰、波谷的连线, 可以领略到内波的图像.

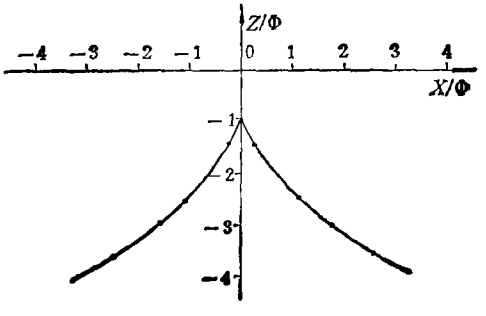

图 2 $\alpha = 90°$ 内波的常相位线

四、边界条件和振幅

这里由 Fourier 反变换求振幅是比较困难的，本文通过另一条途径，借助于可视化实验得到的圆柱面上零流线形状，它恰好用一个函数关系式表示，借助于找到的无穷远衰减条件，建立积分形式平衡关系式，从而得到振幅 $F(K,\theta)$ 的表达式.

在 OXZ 坐标中 Z 轴永远和圆柱的运动方向一致来考虑边界条件是方便的. 问题的解(6)可以写成:

$$\Psi(X,Z)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}F(K,\theta)\exp\{iK(X\cos\theta+Z\sin\theta\}KdKd\theta \tag{9}$$

这里无量纲 $\Psi(X,Z)=\phi(x,z)\Big/\left(\frac{V^2}{\omega_0}\right)$, $F(K,\theta)=f(k,\theta)\Big/\left(\frac{V^2}{\omega_0^2}\right)$.

我们首先考虑圆柱垂直运动这一基本情况. 即 $\alpha=90°$. 对任意倾角运动情况就不难通过坐标变换得到.

1) 无穷远条件: 当 $X\to\infty$, $F(K,\theta)\to 0$ (同样 $F(K_1,K_2)\to 0$). 我们令 $F(K,\theta)=\frac{c}{X}F^*(K,\theta)$, $\left(\text{同理 } F(K_1,K_2)=\frac{c}{X}F^*(K_1,K_2)\right)$. 其中 c 是待定常数，可通过内波的理论计算和实验结果的比较来确定; $F^*(K,\theta)$ 表示有限程度的扰动影响;因子 c/X 刻画振幅的衰减速率. (9) 式可以写成

$$\Psi(X,Z)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{c}{X}F^*(K,\theta)\exp\{iK(X\cos\theta+Z\sin\theta)\}KdKd\theta. \tag{9'}$$

2) 物面条件: 流动可视化得到的柱面上的流线形状可用如下函数关系来表达:

$$J_0(z)=\frac{1}{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2}. \tag{10}$$

因为当 $z=0$,有 $J_0(0)=1$;当 $z=a$,有 $J_0(a)=\frac{1}{2}$; 当 $z=\infty$, 有 $J_0(\infty)=0$. 其中 a 是相对水平方向在圆 1/2 半径处零流线的垂直升高，见图 3. 用分部积分的方法很容易证明并且如[7]所指出:

$$a\int_0^{\infty}\exp\{-aK\}\cos KzdK=\frac{1}{1+\left(\frac{Z}{a}\right)^2} \tag{11}$$

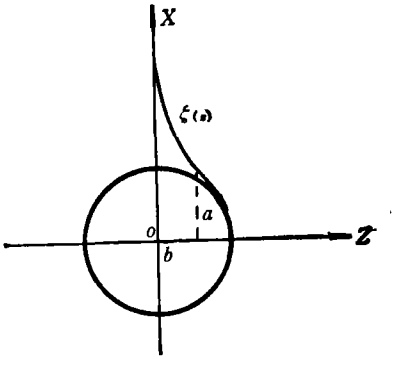

图 3　圆柱垂直运动时物面零流线 $\zeta(Z)$

联系(10)式和(11)式,就有

$$J_0(z)=a\int_0^{\infty}\exp\{-aK\}\cos KzdK \tag{12}$$

我们用文献[7]线性化形式，有 $VJ_z=u$, 在点 $(X=1,Z=0)$ 处无量纲的速度分量:

$$u=\frac{dJ_0(z)}{dz}=-a\int_0^{\infty}K\cdot\exp\{-aK\}\sin KzdK \tag{13}$$

当圆柱的半径相对于整个流场是比较小时，

$$\frac{\partial}{\partial z}\Psi(1,z)\simeq\frac{\partial}{\partial z}\Psi(0,z).$$

成立. 特别地,

$$\frac{\partial}{\partial z}\Psi(1,0)\simeq\frac{\partial}{\partial z}\Psi(0,z) \tag{14}$$

也成立. 于是得到一个平衡方程式(14). 又因为

$$u\Big|_{\substack{X=1\\z=0}}=\frac{\partial}{\partial z}\Psi(1,0)$$

再考虑到(13)式,就有

$$\frac{\partial}{\partial z}\Psi(1,0)\simeq-aK\int_0^\infty\exp\{-aK\}\sin Kz\,dK. \tag{15}$$

当 $X\to 0$ 时, (9′) 式中 $F^*(K_1,K_2)\exp\{i(K_1X+K_2Z)\}$ 趋向于 $F^{**}(K_1,K_2)\exp\{iKZ\}$ 要比 $\frac{c}{X}$ 趋向∞还要快. 这时,

$$\Psi(0,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c}{X}F^{**}(K_1,K_2)\exp\{iK_2Z\}dK_2,$$
$$=\int_0^\infty\frac{c}{X}F^{**}(K,\Theta)\exp\{iKZ\}KdK$$

其中 $F^{**}(K_1,K_2)=F^*(K_1,K_2)\frac{X}{c}B(K_1,K_2)$,同理 $F^{**}(K,\theta)=F^*(K,\theta)\frac{X}{c}B(K,\Theta)$. $B(K_1,K_2)$ 就是 K_1,K_2 满足的色散关系. $B(K,\theta)$ 同理.

$$\frac{\partial}{\partial z}\Psi(0,z)=-i\int_0^\infty\frac{c\cos^2\theta}{\Phi\sin^3\theta}K^2F^{**}(K,\theta)\exp\{iKz\}dK.$$

对上式取实部后连同(15)式代入(14)式的两端,得 F^{**},再考虑到相位关系式,进而有

$$F(K,\theta)=-\frac{ca\cos^2\theta\cdot\exp\{-aK\}}{\Phi K\sin^3\theta\cdot[K^2\sin^2\theta-\cos^2\theta]} \tag{16}$$

五、渐 近 解

把振幅 $F(K,\theta)$ 表达式代入方程的解(9)式后,

$$\Psi(X,Z)=\int_0^{2\pi}\int_0^\infty-\frac{ca\exp\{-aK\}\cdot\exp\{iK(X\cos\theta+z\sin\theta)\}}{\Phi\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}\cdot K[K^2\sin^2\theta-\cos^2 d\theta]}KdK\Theta \tag{17}$$

其中 $N=\left|\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right|$, K_0 取正数.

我们知道(17)式中积分的主要贡献来自分母为零的点以及相位 $K(X\cos\theta+z\sin\theta)$ 是常数的点,利用复变函数的性质,借助于积分 $\int_0^\infty\frac{\exp\{iKN\}}{K^2-K_0^2}dK-\frac{i\pi}{2}\frac{\exp\{iK_0N\}}{K_0}$ 这样把二重积分化成了一重积分,(17)式写成

$$\Psi(X, Z) \simeq -\frac{i\pi a}{2\Phi}\int_0^{2\pi}\frac{\exp\left\{-a\left|\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right|\right\}\cdot\exp\left\{i\left|\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right|(X\cos\theta+Z\sin\theta)\right.}{\frac{\sin^5\theta}{\cos^2\theta}\left|\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right|}d\theta \tag{18}$$

当圆柱向上运动时，由图 2 相位线可知内波发生在 $X>0$，$Z<0$ 的区域以及 $X<0$，$Z<0$ 的区域内．由于对称性，只考虑 $X>0$，$Z<0$ 的区域就够了．如果圆柱以任意倾角运动，情况则不然，要根据相位线的形状和位置再具体分析确定计算区域．当 $\alpha=90°$ 情况：

$$\Psi(X, Z) \sim -\frac{i\pi ca}{2\Phi}\int_{\pi-\varepsilon}^{3/2\pi-\varepsilon}\frac{\exp\left\{-a\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right\}\cdot\exp\left\{iz\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\frac{X}{Z}+\cos\theta\right)\right\}}{\frac{\sin^4\theta}{\cos\theta}}d\theta \tag{19}$$

对于较大的 Z，积分(19)式的渐近行为可由“常相位方法”(或叫“鞍点法”)来刻画．

令 $p=-\cos\theta$，那么 $\sin\theta=-\sqrt{1-p^2}$，$d\theta=\frac{-1}{\sqrt{1-p^2}}dp$．代入(19)式就有

$$\Psi(X, Z) \sim -\frac{i\pi ca}{2\Phi}\int_A^B\frac{\exp\left\{-a\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right\}\cdot\exp\left\{-iZ\left(\frac{X}{Z}\frac{p^2}{\sqrt{1-p^2}}+p\right)\right\}}{\frac{(\sqrt{1-p^2})^4}{p}\cdot\sqrt{1-p^2}}dp \tag{20}$$

再令

$$\frac{\exp\left\{-a\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right\}}{\frac{(\sqrt{1-p^2})^5}{p}}=\chi(p) \tag{21}$$

$$-\left(\frac{p^2}{\sqrt{1-p^2}}\frac{X}{Z}+p\right)=m(p) \tag{22}$$

则(20)式表示为

$$\Psi(X, Z) \sim -\frac{i\pi ca}{2\Phi}\int_A^B\chi(p)\exp\{izm(p)\}dp \tag{23}$$

这里积分变量 p 的上限和下限记为 B 和 A，积分路径 AB 的选择是这样来考虑的：$im(p)$ 的主要值集中在尽可能短的路径上．容易得到 $m'(p)=0$，

$$m''(p)=\frac{X}{Z}\left(\frac{2}{\sin^3\theta}-\frac{3\cos^2\theta}{\sin^3\theta}-\frac{6\cos^2\theta}{\sin^5\theta}-\frac{3\cos^4\theta}{\sin^5\theta}\right)\neq 0.$$

在奇点 $p=p_0$ 附近，函数 $\chi(p)$ 及 $m(p)$ 泰洛 (Taylor) 展开，线性化的假设使得 $\chi(p)$ 只要展开到常数项就足够了，对 $m(p)$ 只要展开到 p 的二次项就够了．

$$\chi(p)\doteq\chi(p_0)=\frac{p_0\cdot\exp\left\{-a\frac{p_0}{\sqrt{1-p_0^2}}\right\}}{(\sqrt{1-p_0^2})^5} \tag{24}$$

$$m(p)=m(p_0)+\frac{1}{2}m''(p_0)(p-p_0)^2$$
$$=-\left(\frac{p_0^2}{\sqrt{1-p_0^2}}\frac{X}{Z}+p_0\right)+\frac{1}{2}m''(p_0)(p-p_0)^2. \tag{25}$$

把(24)、(25)代入(23)式,则有

$$\Psi(X,Z)\simeq-\frac{i\pi ca}{2\Phi}\chi(p_0)\exp\{izm(p_0)\}\int_A^B\exp\left\{i\frac{Z}{2}m''(p_0)(p-p_0)^2\right\}dp. \tag{26}$$

现在我们考虑下面的积分[4],[5],[8]

$$I=\int_A^B\exp\left\{\frac{1}{2}zm''(p_0)(p-p_0)^2\right\}dp \tag{27}$$

由于 $m'(p)=0$, $m''(p)\neq 0$,故一定存在 $p=p_0$, p_0 点叫做奇点,也叫鞍点. 分两种情况定其符号:

1) $m''(p_0)>0$ 情况, $\mathrm{Sgn}\,m''(p_0)=+1$, 则在 p_0 附近有

$$\frac{1}{2}Zm''(p_0)(p-p_0)^2<0.$$

2) $m''(p_0)<0$ 情况, $\mathrm{Sgn}\,m''(p_0)=-1$, 则在 p_0 附近有

$$\frac{1}{2}zm''(p_0)(p-p_0)^2>0.$$

$p-p_0$ 的复数表示为: $p-p_0=|p-p_0|\exp\left\{i\frac{\pi}{4}\mathrm{Sgn}\,m''(p_0)\right\}$. 利用概率积分,(27)式成为

$$I=\int_A^B\exp\left\{\frac{1}{2}zim''(p_0)(p-p_0)^2\right\}\cdot\exp\left\{i\frac{\pi}{4}\mathrm{Sgn}\,m''(p_0)\right\}d|p|$$
$$\simeq\sqrt{\frac{-2\pi}{z|m''(p_0)|}}\cdot\exp\left\{i\frac{\pi}{4}\mathrm{Sgn}\,m''(p_0)\right\} \tag{28}$$

利用积分(28)式,问题的解(26)写成渐近解析式:

$$\Psi(X,Z)\simeq-\frac{i\pi ca}{2\Phi}\chi(p_0)\sqrt{\frac{-2\pi}{z|m''(p_0)|}}\cdot\exp\{izm(p_0)\}$$
$$\cdot\exp\left\{i\frac{\pi}{4}\mathrm{Sgn}\,m''(p_0)\right\}. \tag{29}$$

线性化允许我们用复数的形式去运算,但是理解为需要时应取实部或虚部. 取(29)式虚部,有

$$I_m\Psi(X,Z)\simeq\frac{\pi ca}{2\Phi}\frac{\exp\left\{-a\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\right\}}{\left(-\frac{\sin^5\theta_0}{\cos\theta_0}\right)}$$
$$\times\frac{\sqrt{\frac{-2\pi}{z}}\cos\left[\frac{\cos^2\theta_0}{\sin\theta_0}X+\cos\theta_0\cdot z+\frac{\pi}{4}\mathrm{Sgn}\,m''(p_0)\right]}{\sqrt{\left|\frac{X}{Z}\left(\frac{2}{\sin^3\theta_0}-\frac{3\cos^2\theta_0}{\sin^3\theta_0}+\frac{6\cos^2\theta_0}{\sin^5\theta_0}-\frac{3\cos^4\theta_0}{\sin^5\theta_0}\right)\right|}}. \tag{30}$$

(30) 式就是内波的渐近解析表达式．其中利用了参数的关系式，

$$p_0 = -\cos\theta_0, \qquad \sqrt{1-p_0^2} = -\sin\theta_0.$$

六、结果讨论

1. 当 $\alpha = 90°$，圆柱垂直运动情况，向上运动速度 $V = 0.37228\text{cm/s}$，Väisälä 频率 $\omega_0 = 0.7476\ 1/\text{s}$，圆柱半径 $b = 15\text{mm}$，$\frac{1}{2}$ 半径处零流线的垂直升高 $a = 16\text{mm}$，相位差 $\Delta\Phi = 0.1$，常数 $c = 18$，由内波渐近解析表达式(30)给出的内波图形，见图 4.

2. 在计算时相位间隔 $\Delta\phi$ 不宜取得过大，当 $\Delta\phi$ 取为 0.25 时，内波波形线出现折线状，曲线不够光滑；当 $\Delta\phi$ 取为 0.1 时，内波波形线比较光顺．

3. 从计算结果图 5—图 7 我们可以看到，在密度连续分层情况下，内波受圆柱运动速度 V、圆柱的直径 $2b$ 和自然频率 ω_0 影响．其中速度的改变对内波的影响最大，随着圆柱运动速度增大，振幅明显增大；圆柱直径的变化对内波的影响为其次；密度梯度的改变对内波影响较小．

4. 密度分层流体中由于浮力效应，密度 ρ_0 必定随着流体高度的增加而减少．考虑它有指数衰减的特性，可借助于一个经验公式来表示 $\rho_0 = \rho_0^* \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{g}\bar{Z}\right)$．这种指数型式可以泰洛展开，写成 $\rho_0 = \rho_0^*\left[1-\left(\frac{\omega_0^2}{g}\bar{Z}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\omega_0^2}{g}\bar{Z}\right)^2+\cdots\cdots\right]$．$\rho_0^* = \rho_0|_{z=0}$．密度分布在实验上通常可以通过折射率转换仪来测定．如果盐水溶液的最大高度 $\bar{Z}_{max} = 0.3$ 米，$\omega_0 = 0.75\ 1/\text{s}$，$g = 9.81\ \text{m/s}^2$，则 $\frac{\omega_0^2}{g}\bar{Z}_{max} = 0.017$，如果水箱中盐水溶液的最大高度 $\bar{Z}_{max} = 1.0$ 米，$\omega_0 = 0.516$/秒，则 $\frac{\omega_0^2}{g}\bar{Z}_{max} = 0.027$，因此比它更高阶的量，例如，

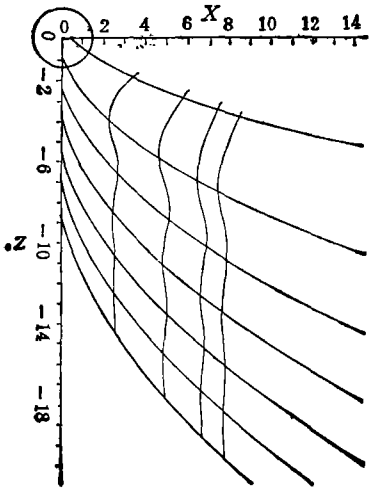

图 4　内波和相位线

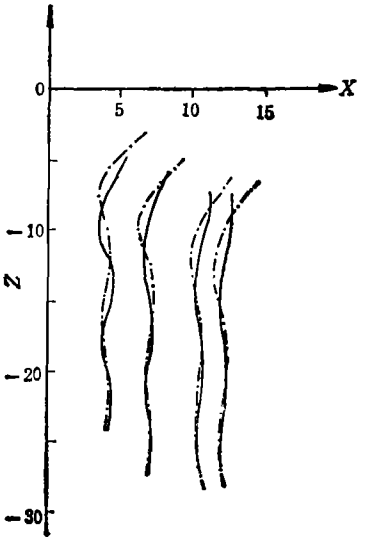

图 5　两种直径的内波波形比较

—— $2b_1 = 1.0\text{cm}$　-·-· $2b_2 = 2.5\text{cm}$

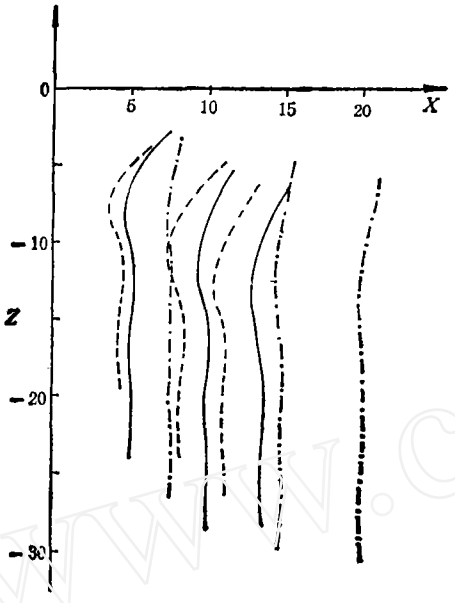

图 6 三种运动速度的内波波形比较

--- $V_1 = 0.4477$cm/s. —— $V_2 = 0.3723$cm/s,

-·- $V_3 = 0.25$ cm/s

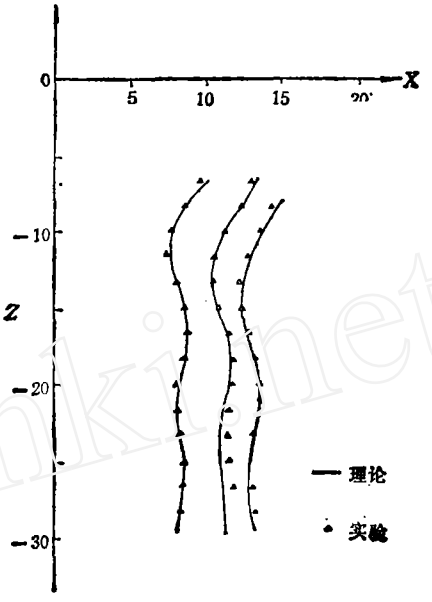

图 7 理论计算和实验结果比较

$\left(\frac{\omega_0^2}{g}\bar{Z}_{max}\right)^2$等都可以忽略不计，Väisälä-Brunt 近似带来的误差只有千分之几。

作者对 W. F. Merzkirch 教授的支持、林同骥教授的讨论、U. Gärtner 博士实验上的帮助深表感谢。

参 考 文 献

[1] Warren, F. W. G., *J. Fluid Mech.*, 7(1959), 209—229.
[2] Rarity, B. S. H., *J. Fluid Mech.* 30(1967), 329—336.
[3] Lighthill, M. J., Intruduction to fourier analysis and generalised functions, (1970).
[4] Jeffreys, H., Asymptotic approximations. Oxford uni press, London, (1962), 12—43.
[5] de Bruijn, N. G., Asymptotic methods in analysis. Nortt-Holland publ company, (1970), 77—101.
[6] Gärtner, U., Merzkirch, W. F. and Zhang Dieli (张蝶丽), 2nd Asian symp. on Fluid Mech., Beijing, (1983), 464—467.
[7] Yih, C. S., Stratified Fluid, Academic Press, New York, (1980), 71—80.
[8] Whitham, G. B., Linear and Nonlinear waves, A wiley interscience publication, New York, (1974), 369—384.

ASYMPTOTIC SOLUTION FOR INTERNAL WAVES BY A MOVING CYLINDER

Zhang Dieli

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract In this paper an asymptotic method for solving the two dimensional internal waves is presented. An approximate solution of a cylinder moving vertically in an inviscid stable density continually stratified fluid is obtained. The propagation behaviour of internal waves is discussed and the theoretical solution of internal waves is compared with visual observation. It is shown that the compated results are rational.

Key words density stratified fluid, internal waves, asymptotic approximation method, dispersion relation, constant phase line.

www.cnki.net