第19卷 第1期　　力 学 学 报　　Vol. 19, No. 1
1987 年 1 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Jan., 1987

韧性材料的剪切带状分叉

李 国 琛
(中国科学院力学研究所)

提要 本文从两个位移变量入手分析了平面应变条件下的剪切带状分叉从而放弃了分叉时体积不变的约束. 文中论证了分叉时材料将伴随有局部性的体积变化，应变软化，即材料性质的分叉突变. 文中还用摄动法近似分析了材料缺陷可能造成的影响.

关键词 韧性、剪切带、分叉.

一、引 言

实验观察查明，韧性材料断裂初发的一种型式是产生剪切带状的局部变形. 此时常伴随有次级空洞在带内的出现[1]. 此外，一些材料进入塑性后还会出现滑移带[2]. 对于这类材料中的带状分叉现象，Hill 和 Hutchinson 提出过理论分析方法[3,4]. 这一理论还被推广应用于研究非正交塑性规律对平面应变条件下的分叉的影响[5]以及材料缺陷和空洞的作用[6,7].

最近 Anand 和 Spitzig[8] 在马氏体时效钢上做了平面应变条件下的单向加载实验，他们用出现剪切带时的平面应变切线模量代入 Hill-Hutchinson 方程以计算临界应变及剪切带角度，结果用流动理论求出的计算值与实验值相差有数倍之多. 如改用形变理论，结果会接近些但仍有较大差距. 这一矛盾难以全用材料缺陷予以解释，原因是 Anand 和 Spitzig 用的是实测的临界条件下的平面应变切线模量值计算的.

本文重新分析了剪切带状分叉问题. 文中论证了材料中的分叉现象与固体结构屈曲的不同之处在于，它可以不遵循屈曲时材料属性不变的变形路径，而在分叉时即伴随有局部性的体积变化和应变软化等. 也即材料性质出现了突变. 文中还用摄动法近似分析了材料的缺陷或非均匀性可能造成的影响.

二、材料分叉理论及其方程

欲使增量解满足平衡，应使以下势能型的泛函[9,10]

$$I=\frac{1}{2}\int_V\left[\frac{\mathscr{D}\tau^{ij}}{\mathscr{D}t}D_{ij}-\sigma^{ij}(2D_{ki}D_{lj}g^{lk}-V^k|_jV_k|_i)\right]dV-\int_s\dot{F}^iV_ids \tag{1}$$

达到极小值. 其中 $\frac{\mathscr{D}\tau^{ij}}{\mathscr{D}t}$ 是 Kirchhoff 应力的 Jaumann 率；D_{ij} 是由速率的协变导数所

本文于 1984 年 12 月 21 日收到.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

组成的应变率张量 $\left(=\frac{1}{2}(V_i|_j+V_j|_i)\right)$；$\sigma^{ij}$ 是 Cauchy 或真应力张量；$\dot{F}^i$ 是载荷率向量；g^{ij} 是度量张量；V 是体积；s 是已知外力的边界面．对 (1) 式变分后得到

$$\delta I=\int_V[L^{ijkl}D_{kl}-\sigma^{ik}D^j_k-\sigma^{jk}D^i_k+\sigma^{ik}V^j|_k]\delta V_j|_i dV-\int_s\dot{F}^i\delta V_i ds=0 \tag{2}$$

其中引用了本构方程

$$\frac{\mathscr{D}\tau^{ij}}{\mathscr{D}t}=L^{ijkl}D_{kl} \tag{3}$$

又 $L^{ijkl}=L^{klij}=L^{jilk}=L^{lkji}$.

由 Dirichlet-Kelvin 的经典稳定性定义可知，稳定性的充分条件是：如 $\Delta I>0$ 是稳定的，而若 $\Delta I<0$ 则为不稳定的．由 Taylor 级数展开可知

$$\Delta I=\delta I+\frac{1}{2!}\delta^2 I+\cdots\ (\text{又 } \delta I=0) \tag{4}$$

于是稳定与否就取决于

$$Q=\delta^2 I \tag{5}$$

若 $Q>0$ 是稳定的，$Q<0$ 是不稳定的．$Q=0$ 为稳定限即达到屈曲点，其中包括分叉型及极值型两类型式．对 (2) 式再作变分即得到

$$Q=\int_V[L^{ijkl}\delta D_{kl}-\sigma^{ik}\delta D^j_k-\sigma^{jk}\delta D^i_k+\sigma^{ik}\delta V^j|_k]\delta V_j|_i dV \tag{6}$$

由于名义应力率张量

$$\dot{S}^{ij}=\frac{\mathscr{D}\tau^{ij}}{\mathscr{D}t}-\sigma^{ik}D^j_k-\sigma^{jk}D^i_k+\sigma^{ik}V^j|_k \tag{7}$$

所以方程式 (2) 和 (6) 的物理意义在于

$$\delta I=\int_V\dot{S}^{ij}\delta V_j|_i dV-\int_s\dot{F}^i\delta V_i ds \tag{8}$$

和

$$\delta^2 I=\int_V\delta\dot{S}^{ij}\delta V_j|_i dV \tag{9}$$

其中利用了

$$\delta\frac{\mathscr{D}\tau^{ij}}{\mathscr{D}t}=L^{ijkl}\delta D_{kl} \tag{10}$$

这是按照“弹性比较固体”概念导出 (6) 式的．方程 (10) 中的 L^{ijkl} 所包含的材料参数没有变化．欲求屈曲方程和边界条件可对 Q 作新的变分 δ^*．即寻求 (δV_j) 的变化 $\delta^*(\delta V_j)$ 所导致的 Q 变化 δ^*Q．类似的作法，在弹性体系中 Trefftz 和 Kappus[11,12] 早已提出过．同样也不难证明，$Q=0$ 时必然导致 $\delta^*Q=0$.

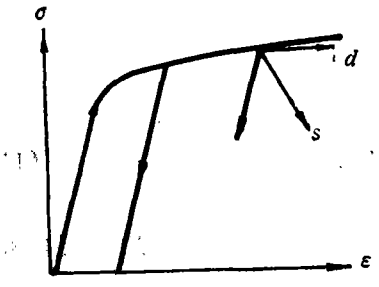

图 1

以上所说的都是固体结构的屈曲理论．在小应变下，材料性质仅可能是塑性加载或弹性卸载，如图 1 中的实线所示．在这一材料规律下，“弹性比较固体”的论证表明屈曲瞬时没有弹性卸载，材料性质与屈曲前

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

相一致[4]．但在大应变和高应力情况下，材料性质是随着内部组织状况的变化而有明显的改变．尤其是本文要研究的剪切带状的分叉，带内外材料的组织有急剧变化．可将带内材料的应力-应变路径改为图 1 中的 $d(d\sigma/d\varepsilon$ 仍为正)或 s 路径 $(d\sigma/d\varepsilon$ 为负)．这也就是材料分叉与固体结构分叉的不同物理背景，即材料分叉可以伴随有性质的突变．所以，材料分叉时的本构方程应由 (10) 改为

$$\delta\frac{\mathscr{D}\tau^{ij}}{\mathscr{D}t}=L_*^{ijkl}\delta D_{kl} \tag{11}$$

其中 L_*^{ijkl} 与 L^{ijkl} 的区别在于它可以包含有图 1 中的路径 d 和 s．

于是在对 (2) 式作第二次变分导出 (6) 式时应改为以 (11) 式替代 (10) 式，所以

$$Q=\int_V[L_*^{ijkl}\delta D_{kl}-\sigma^{ik}\delta D_k^j-\sigma^{jk}\delta D_k^i+\sigma^{ik}\delta V^j|_k]\delta V_j|_i dV \tag{12}$$

当联系应力-应变变化的刚度系数保持为 L_*^{ijkl} 时对 (δV_j) 给予新的变分 $\delta^*(\delta V_j)$，由此导致 Q 的变分

$$\delta^*Q=2\int_V[L_*^{ijkl}\delta D_{kl}-\sigma^{ik}\delta D_k^j-\sigma^{jk}\delta D_k^i+\sigma^{ik}\delta V^j|_k]\delta^*(\delta V_j)|_i dV \tag{13}$$

同前所述，$Q=0$ 时将有 $\delta^*Q=0$，由此利用散度定理可以导出材料分叉时的方程与边界条件分别为

$$[L_*^{ijkl}\delta D_{kl}-\sigma^{ik}\delta D_k^j-\sigma^{jk}\delta D_k^i+\sigma^{ik}\delta V^j|_k]|_i=0 \tag{14}$$

及

$$[L_*^{ijkl}\delta D_{kl}-\sigma^{ik}\delta D_k^j-\sigma^{jk}\delta D_k^i+\sigma^{ik}\delta V^j|_k]n_i=0 \tag{15}$$

其中 n_i 为在广义时间 t 时边界上向外的单位法线向量．

三、平面应变条件下的剪切带状分叉

材料中受拉(或压)以后，在材料块中会出现一片薄带域 (图 2)．相对带外，其中的位移速率有一个突变 δV_i．在直角坐标系下可表示为

$$\delta V_i=V_i(n),\quad n=n_ix_i \tag{16}$$

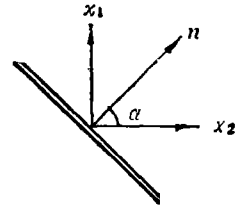

图 2

于是

$$\delta V_{i,j}=V_i'(n)n_j=c_in_j \tag{17}$$

其中“′”为对 n 的导数．由于带内外速率有个急剧变化，可以令 $V_i'=\lambda V_i$，$V_i''=\lambda^2V_i$．其中 λ 为对 n 求导的放大系数．于是由 (14)，(15) 两式并注意到 (17) 式可以看出

$$\begin{aligned}&\Big[L_{ijkl}^*\frac{1}{2}(\delta V_{k,l}+\delta V_{l,k})-\sigma_{ik}\frac{1}{2}(\delta V_{j,k}+\delta V_{k,j})\\&\qquad-\sigma_{jk}\frac{1}{2}(\delta V_{i,k}+\delta V_{k,i})+\sigma_{ik}\delta V_{j,k}\Big]_{,i}\\&=\lambda\Big[L_{ijkl}^*\frac{1}{2}(\delta V_{k,l}+\delta V_{l,k})-\sigma_{ik}\frac{1}{2}(\delta V_{j,k}+\delta V_{k,j})\\&\qquad-\sigma_{jk}\frac{1}{2}(\delta V_{i,k}+\delta V_{k,i})+\sigma_{ik}\delta V_{j,k}\Big]n_i\\&=\lambda\delta\dot{F}_j=0\end{aligned} \tag{18}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

其物理意义是，虽然在带内外交界面上位移速率沿法线方向存在有跳跃，但在此面上的应力率变化却为零. Needleman 就是利用这个概念导出其分叉方程的[5].

在单向受力平面应变条件下，令 $r=c_1/c_2$, $s=n_2/n_1$, 由此立即可以解出

$$r=-\frac{L^*_{2222}s^2+L^*_{1212}+(\sigma_{11}/2)}{(L^*_{1212}+L^*_{1122}-\sigma_{11}/2)s} \tag{19}$$

及方程

$$\left(L^*_{1212}-\frac{\sigma}{2}\right)s^4+\frac{1}{L^*_{2222}}\left[(L^*_{1111}-\sigma)L^*_{2222}+\left(L^{*2}_{1212}-\frac{\sigma^2}{4}\right)\right.$$
$$\left.-\left(L^*_{1212}+L^*_{1122}-\frac{\sigma}{2}\right)^2\right]s^2+\frac{L^*_{1111}-\sigma}{L^*_{2222}}\left(L^*_{1212}+\frac{\sigma}{2}\right)=0 \tag{20}$$

其中 $\sigma=\sigma_{11}$. 这样就把分叉问题化为求解 (20) 式的根值 s.

对于在分叉时限定只产生无体积变化的位移速率变化时将导致

$$c_1n_1+c_2n_2=0 \text{ 或 } r=-s \tag{21}$$

就得文献 [3][7] 中的结果形式.

本文试从以下几个方面来阐明产生理论与实验的差距的原因：(1) 材料中可能的原始缺陷影响；(2) 放弃假定分叉时材料体积不变；(3) 分叉时剪切带内材料性质有突变.

四、材料不均匀性或原始缺陷影响的分析

由于剪切带的尺度相对材料的宏观尺寸较小，为此实际上应该估计材料不均匀性可能带来的影响. 以下将用摄动法做近似估算. 令

$$\left.\begin{aligned}L^*_{ijkl}/E&=L^{(0)}_{ijkl}+L^{(1)}_{ijkl}\varepsilon+O(\varepsilon^2)\\ \sigma&=\sigma^{(0)}+\sigma^{(1)}\varepsilon+O(\varepsilon^2)\\ \delta V_i&=V^{(0)}_i+V^{(1)}_i\varepsilon+O(\varepsilon^2)\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

其中 E 是弹性模量，ε 为小参数，$O(\varepsilon^2)$ 为略去的二级以上小量. $L^{(0)}_{ijkl}$ 及 $\sigma^{(0)}$ 各自为常量. 将 (18) 式中各量按 (22) 式展开，归并后可得 "0" 阶与 "1" 阶的方程组为

$$(\varepsilon^0)\quad \left(L^{(0)}_{1111}-\sigma^{(0)}\frac{\varepsilon_Y}{\sigma_Y}\right)(V^{(0)}_{1,1})_{,1}+L^{(0)}_{1122}(V^{(0)}_{2,1})_{,2}+\left(L^{(0)}_{1212}-\frac{\sigma^{(0)}}{2\sigma_Y}\varepsilon_Y\right)(V^{(0)}_{1,2})_{,2}$$
$$+\left(L^{(0)}_{1212}-\frac{\sigma^{(0)}}{2\sigma_Y}\varepsilon_Y\right)(V^{(0)}_{2,1})_{,2}=0 \tag{23a}$$

$$\left(L^{(0)}_{1212}-\frac{\sigma^{(0)}}{2\sigma_Y}\varepsilon_Y\right)(V^{(0)}_{1,1})_{,2}+\left(L^{(0)}_{1212}+\frac{\sigma^{(0)}\varepsilon_Y}{2\sigma_Y}\right)(V^{(0)}_{2,1})_{,1}+L^{(0)}_{1122}(V^{(0)}_{1,1})_{,2}$$
$$+L^{(0)}_{2222}(V^{(0)}_{2,2})_{,2}=0 \tag{23b}$$

$$(\varepsilon^1)\quad \left(L^{(0)}_{1111}-\frac{\sigma^{(0)}}{\sigma_Y}\varepsilon_Y\right)(V^{(1)}_{1,1})_{,1}+L^{(0)}_{1122}(V^{(1)}_{2,1})_{,2}+\left(L^{(0)}_{1212}-\frac{\sigma^{(0)}}{2\sigma_Y}\varepsilon_Y\right)(V^{(1)}_{1,2})_{,2}$$
$$+\left(L^{(0)}_{1212}-\frac{\sigma^{(0)}}{2\sigma_Y}\varepsilon_Y\right)(V^{(1)}_{2,1})_{,2}=B_1 \tag{24a}$$

$$\left(L^{(0)}_{1212}-\frac{\sigma^{(0)}}{2\sigma_Y}\varepsilon_Y\right)(V^{(1)}_{1,1})_{,2}+\left(L^{(0)}_{1212}+\frac{\sigma^{(0)}\varepsilon_Y}{2\sigma_Y}\right)(V^{(1)}_{2,1})_{,1}+L^{(0)}_{1122}(V^{(1)}_{1,1})_{,2}$$
$$+L^{(0)}_{2222}(V^{(1)}_{2,2})_{,2}=B_2 \tag{24b}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中

$$B_1 = -(L^{(1)}_{1111}V^{(0)}_{1,1})_{,1} + \frac{\sigma^{(1)}}{\sigma_Y}\varepsilon_Y(V^{(0)}_{1,1})_{,1} - (L^{(1)}_{1122}V^{(0)}_{2,2})_{,1} - (L^{(1)}_{1212}V^{(0)}_{1,2})_{,2}$$
$$+ \frac{\sigma^{(1)}}{2\sigma_Y}\varepsilon_Y(V^{(0)}_{1,2})_{,2} - (L^{(1)}_{1212}V^{(0)}_{2,1})_{,2} + \frac{\sigma^{(1)}}{2\sigma_Y}\varepsilon_Y(V^{(0)}_{2,1})_{,2}$$

$$B_2 = -(L^{(1)}_{1212}V^{(0)}_{1,2})_{,1} + \frac{\sigma^{(1)}}{2\sigma_Y}\varepsilon_Y(V^{(0)}_{1,1})_{,2} - (L^{(1)}_{1212}V^{(0)}_{2,1})_{,1} - \frac{\sigma^{(1)}}{2\sigma_Y}\varepsilon_Y(V^{(0)}_{2,1})_{,1}$$
$$- (L^{(1)}_{1122}V^{(0)}_{1,1})_{,2} - (L^{(1)}_{2222}V^{(0)}_{2,2})_{,2}$$

σ_Y，ε_Y 分别为屈服应力和屈服应变，且有 $\sigma_Y = E\varepsilon_Y$. 如用 $V^{(0)}_1$ 乘 (24a) 等号左端各项，$V^{(0)}_2$ 乘 (24b) 的左端项，相加后其面积分可以证明为零. 由此导出正交条件

$$\iint (B_1V^{(0)}_1 + B_2V^{(0)}_2)dx_1dx_2 = 0 \tag{25}$$

从而可以直接解出临界应力的修正项

$$\frac{\sigma^{(1)}\varepsilon_Y}{\sigma_Y} = \frac{B}{A} \tag{26}$$

其中

$$B = \iint \{[(L^{(1)}_{1111}V^{(0)}_{1,1})_{,1} + (L^{(1)}_{1122}V^{(0)}_{2,2})_{,1} + (L^{(1)}_{1212}V^{(0)}_{1,2})_{,2} + (L^{(1)}_{1212}V^{(0)}_{2,1})_{,2}]V^{(0)}_1$$
$$+ [(L^{(1)}_{1212}V^{(0)}_{1,2})_{,1} + (L^{(1)}_{1212}V^{(0)}_{2,1})_{,1} + (L^{(1)}_{1122}V^{(0)}_{1,1})_{,2}$$
$$+ (L^{(1)}_{2222}V^{(0)}_{2,2})_{,2}]V^{(0)}_2\}dx_1dx_2$$

$$A = \iint\left\{\left[(V^{(0)}_{1,1})_{,1} + \frac{1}{2}(V^{(0)}_{1,2})_{,2} + \frac{1}{2}(V^{(0)}_{2,1})_{,2}\right]V^{(0)}_1\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}[(V^{(0)}_{1,1})_{,2} - (V^{(0)}_{2,1})_{,1}]V^{(0)}_2\right\}dx_1dx_2$$

以下将用 (26) 式来讨论两类材料不均匀性可能导致的影响.

(1) 全域性缺陷　可以假设在无穷大的全域内材料性能有削弱并可表示为

$$L^{(1)}_{1111} = -\alpha_1,\ L^{(1)}_{2222} = -\alpha_2,\ L^{(1)}_{1122} = -\alpha_3,\ L^{(1)}_{1212} = -\alpha_4 \tag{27}$$

令 $V^{(0)}_1 = rV(n)$，$V^{(0)}_2 = V(n)$，代入 (26) 式并利用 (17) 式求导数后可得

$$\frac{\sigma^{(1)}\varepsilon_Y}{\sigma_Y} = -\frac{[\alpha_1r^2n_1^2+\alpha_2n_2^2+\alpha_3n_1n_2(1+r)+\alpha_4(n_1^2+(1+r)n_1n_2+r^2n_2^2)]\iint VV''dx_1dx_2}{\left[\left(r^2-\frac{1}{2}\right)n_1^2 + rn_1n_2 + \frac{1}{2}r^2n_2^2\right]\iint VV''dx_1dx_2}$$
$$= -\frac{[\alpha_1r^2n_1^2 + \alpha_2n_2^2 + \alpha_3(1+r)n_1n_2 + \alpha_4(n_1^2 + (1+r)n_1n_2 + r^2n_2^2)]}{\left[\left(r^2-\frac{1}{2}\right)n_1^2 + rn_1n_2 + \frac{1}{2}r^2n_2^2\right]} \tag{28}$$

由 (28) 式可见，一般来说，各 α_i 值的变化将对 $\sigma^{(1)}$ 造成显著影响. 除非是特定的情况，如令 $L^{(1)}_{1122} = L^{(1)}_{1212} = 0$，如果 $\alpha_1/\alpha_2 = -n_2^2/r^2n_1^2$，则 $\sigma^{(1)} = 0$

(2) 带状缺陷　设沿剪切带方向有一缺陷并对称分布于带的中心线上，取 n 为正的半边上

$$L^{(1)}_{1111} = -\alpha_1e^{-\lambda n},\ L^{(1)}_{2222} = -\alpha_2e^{-\lambda n},\ L^{(1)}_{1122} = -\alpha_3e^{-\lambda n},\ L^{(1)}_{1212} = -\alpha_4e^{-\lambda n}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

相应地设，$V_1^{(0)}=re^{-\lambda n}$，$V_2^{(0)}=e^{-\lambda n}$，代入 (29) 式，当 $\lambda\to\infty$ 时可得

$$\frac{\sigma^{(1)}\varepsilon_Y}{\sigma_Y}=-\frac{4}{3}\frac{[\alpha_1r^2n_1^2+\alpha_2n_2^2+\alpha_3(1+r)n_1n_2+\alpha_4(n_1^2+(1+r)n_1n_2+r^2n_2^2)]}{\left[\left(r^2-\frac{1}{2}\right)n_1^2+rn_1n_2+\frac{1}{2}r^2n_2^2\right]} \tag{29}$$

比较 (28) 和 (29)，二者只差一个 4/3 系数

五、解析解和计算结果

在利用第三节中各有关公式求解剪切带分叉时，首先需要求得在平面应变条件下受单向均匀加载时材料内的应力情况．由于是比例加载，可以用形变理论得到应变与应力的关系式．分叉前材料性质符合幂硬化规律，其指数为 n．由文献 [13]，[14]，计及塑性可膨胀性，用流动理论，将有分叉时的刚度系数 L^*_{ijkl}．

以下将给出几方面的计算比较．材料的 Poisson 系数取为 $\nu=0.3$，屈服应变 $\varepsilon_Y=0.002$．

(1) 分叉时材料性质不变的剪切带状变形　此时，$L^*_{ijkl}=L_{ijkl}$ 且 $E_{tm}^{(\rho)}\to\infty$．表 1 中列出了产生剪切带分叉时的各项临界值．按 (21) 式所得结果是在分叉时约制了体积变形只保留分叉前的弹性体应变．而 (20) 式是放弃了分叉时的弹性体积变形的约制．Hill 和 Hutchinson 的计算式[3]属于前一种类型．从表 1 中可见，考虑了分叉时的弹性体应变可以使计算的临界值有明显的降低．以上各算例的分叉角均为 $\alpha=45°$．

(2) 分叉时伴随有塑性体积变化　假定分叉时材料性质遵循图 1 中的 d 路径．如给定 $E/E_{tm}^{(\rho)}=0.1$，0.3 并按 (20) 式求特征根，将得到表 2 中所列各项结果．

表 1　材料性质不变时剪切带分叉的各项临界值

公式	n	$(\varepsilon_e/\varepsilon_Y)_{cr}$	$(\varepsilon_{11})_{cr}$	$(\varepsilon_{22})_{cr}$	$(\sigma/\sigma_Y)_{cr}$
(21)	0	153.7	0.2669	−0.2655	1.1547
	0.05	12020	20.82	−20.82	1.8470
(20)	0	98.12	0.1706	−0.1692	1.1547
	0.05	8673	15.02	−15.02	1.8171

表 2　分叉时伴随有塑性体应变时各项临界值

$E/E_{tm}^{(\rho)}$	n	$(\varepsilon_e/\varepsilon_Y)_{cr}$	$(\varepsilon_{11})_{cr}$	$(\varepsilon_{22})_{cr}$	$(\sigma/\sigma_Y)_{cr}$
0.1	0	90.05	0.1567	−0.1553	1.1547
	0.05	8195	14.20	−14.19	1.8120
0.3	0	77.50	0.1347	−0.1333	1.1547
	0.05	7449	12.90	−12.90	1.8033

与表 1 中按 (20) 式计算的情况相比，考虑分叉时的塑性体应变作用将进一步降低临界应变值；但与实验观测值 (～0.03) 仍有很大差距．

(3) 分叉时伴随有应变软化的情况　为克服以上矛盾并联系到分叉时材料组织的变

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

化应该计及应变软化效应，如图 1 中的 s 路径所示．对分叉时的切线模量 $E_{tc}^{(p)}$ 取不同的负值所得临界应变都绘制在图 3 中．由此所得临界应变值（按 (20) 式计算）有了很大的降低，可以达到观测值的量级．由此看来，为解释原有理论与实验的差距必须要引入应变软化因素．

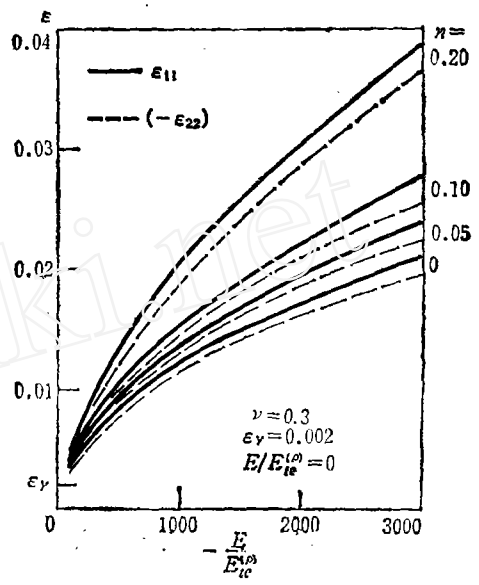

图 3　分叉时 ε_{11}，ε_{22} 与 $-E/E_{tc}^{(p)}$ 的关系图

然而 Anand 和 Spitzig 曾断言[8]在实验中没有发现软化效应．因为要使理论计算的临界值与实验的相符，只要取平面应变条件下的切线模量 $E_t(=4\mu^*)=75\text{MPa}$（或 $E_t/E=0.00036$）．E_t 值没有出现负的情况．但仔细推敲后可以发现

$$
\begin{aligned}
4\mu^* &= L_{1111}^* + L_{2222}^* - 2L_{1122}^* \\
&= \frac{1}{1+\nu}\left[2 - \frac{3}{2\sigma_e^2} \times \frac{(s_{11}-s_{22})^2}{\left(1+\frac{2}{3}(1+\nu)\frac{E_{tc}^{(p)}}{E}\right)}\right] \\
&= \frac{1}{1+\nu}\left[2 - \frac{3}{2(1-\varphi+\varphi^2)\left(1+\frac{2}{3}(1+\nu)\frac{E_{tc}^{(p)}}{E}\right)}\right]
\end{aligned}
\tag{30}
$$

对分叉前材料硬化指数 $n=0$—0.2 的计算表明，在以上所取的负切线模量值 $E_{tc}^{(p)}$ 范围内，E_t 可以是正值，而且数量级与 Anand 和 Spitzig 所推断的相当，详见表 3．因此 E_t 是正的情况下仍然可以有 $E_{tc}^{(p)}$ 为负值的软化情况．另外，要说明的是，Anand 和 Spitzig 所测定的分叉时的 E_t 值是材料的宏观参数，因此完全可以比以上推断的值（75MPa）要大许多．后者是剪切带内的局部参数．

表 3　分叉时 $E/E_{tc}^{(p)}$ 与 E_t/E 的关系（$\nu=0.3, \varepsilon_Y=0.002, E/E_{tm}^{(p)}=0$）

$E/E_{tc}^{(p)}$		−100	−300	−900	−2100	−3000
$\frac{E_t}{E}$	$n=0$	0.002265	0.000763	0.000274	0.000133	0.000098
	$n=0.2$	0.002296	0.000806	0.000375	0.000166	0.000132

在图 3 中还表明了一有趣的现象，随着 $E_{tc}^{(p)}$ 负值的变化，临界应变值可以接近屈服应变 ε_Y．由此可以解释，材料进入塑性后出现滑移带的现象．

参　考　文　献

[1] Hancock, J. W., Brown, D. K., *J. Mech. Phys. Solids*, 31(1983), 1.
[2] Mengi, Y. McNiven, H. D., Erdem, A. Ü., *Int. J. Solids Structures*, 11(1975), 813.
[3] Hill, R., Hutchinson J. W., *J. Mech. Phys. Solids*, 23(1975), 239.
[4] Hutchinson, J. W., Plastic Buckling, Advances in Appl. Mech. (ed. by Chia-Shun Yih), 14(1974), 67.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

[5] Needleman, A., *J. Mech. Phys. Solids*, 27(1979), 231.
[6] Yamamoto, H., *Int. J. Fracture*, 14(1978), 347.
[7] Hutchinson, J. W., Tvergaard, V., *Int. J. Solids Structures*, 17(1981), 451.
[8] Anand, L., Spitzig, W. A., *J. Mech. Phys. Solids*, 28(1980), 113.
[9] Hill, R., *J. Mech. Phys. Solids*, 15(1967), 371.
[10] McMeeking, R. M., Rice, J. R., *Int. J. Solids Structures*, 11(1975), 601.
[11] Trefftz, E., *Zeit. für Angew. Math. N. Mech.*, B13(1933), 160.
[12] Kappus, R., *Zeit. für Angew. Math. N. Mech.*, B19(1939), 344.
[13] 李国琛，力学学报，16，6(1984)，580.
[14] Li, G. C., Howard, I. C., ICF-6, Dec. (1984), New Delhi, India.

SHEAR BAND BIFURCATION IN DUCTILE MATERIALS

Li Guochen
(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract: Shear band bifurcation analysis under plane strain condition is handled by two displacement variables, instead of assuming the volumetric in-variance condition at the moment of bifurcation. It is argued that local change of volume, strain softening effect can form the associated behaviour of material at bifurcation. In other words, the material behaviour itself must be bifurcated. The influence of material defects is approximately evaluated by using perturbation method.

Key words: ductile, shear band, bifurcation.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net