

# 含气泡液态金属的磁流体力学 和Hartmann流动

徐复荣升

(中国科学院力学研究所, 北京)

本文给出含气泡液态金属的磁流体力学基本方程, 以及Hartmann流动的解。

**关键词** 含气泡液态金属, 磁流体力学, Hartmann流动。

## 一、引言

在磁流体力学中, 一般导电流体都是单相的。例如等离子体、液态金属、海水等。但是, 二相或多相的问题在实际应用中却经常会遇到。在等离子体化工、等离子体冶金和喷涂等技术问题中, 我们遇到等离子体与粉末二相介质以及相应的磁流体力学问题。对于液态金属来说, 也经常会遇到液相与气相混合物的磁流体力学问题。本文只讨论后者, 即含气泡液态金属的磁流体力学。在未来的聚变反应堆中, 由于要利用液态金属作载热剂, 减速剂和增殖剂, 在泵送液态金属时, 会出现气相或蒸气。利用液态金属作为工质将反应堆的热能直接转化为电能, 这时工质必定是二相介质。在高速水流的汽蚀问题中, 也观察到磁场对汽蚀破坏的影响<sup>[1]</sup>, 有可能在液-汽交界面上有一个电离层, 那末二相或多相(液、汽、等离子体)磁流体力学的研究就更为重要。

## 二、基本方程

把含气泡液体流动的基本方程<sup>[2]</sup>推广到二相的磁流体力学中去。 $P$ ,  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{F}$  分别表示压强、密度、速度和力。 $b$ 是单位质量的外加体积力。下标 $f$ 和 $g$ 分别表示液体与气泡相应的各物理量。若二相介质单位体积中含有 $n$ 个气泡, 每个气泡的气体质量 $m$ 不变,  $\beta$ 为二相介质单位体积所含气体的体积,  $R$ 是气泡半径(假定气泡为球形), 采用电磁单位制。二相介质的运动方程为

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \mathbf{u}_g) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\beta \rho_g) + \nabla \cdot (\beta \rho_g \mathbf{u}_g) = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1-\beta)\rho_f] + \nabla \cdot [(1-\beta)\rho_f \mathbf{u}_f] = 0,$$

$$\rho_f \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} + (\mathbf{u}_f \cdot \nabla) \mathbf{u}_f \right] = -\nabla P_f + \rho_f \mathbf{b} + \mathbf{F}_f - \frac{\mathbf{F}_{fg}}{1-\beta} + \mu \mathbf{j} \times \mathbf{H},$$

$$\rho_g \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial t} + (\mathbf{u}_g \cdot \nabla) \mathbf{u}_g \right] = -\nabla P_g + \rho_g \mathbf{b} + \mathbf{F}_g + \frac{\mathbf{F}_{fg}}{\beta},$$

$$P_g - P_f = P\{R\},$$

$$\beta = \frac{4\pi}{3} R^3 n,$$

$$m = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_g.$$

当传热不重要时, 每相的状态方程

$$P_g R^{3r} = \text{const},$$

$$P_f = P_f(\rho_f).$$

式中  $\mathbf{F}_f$ ,  $\mathbf{F}_g$  是粘性力, 即

$$\mathbf{F}_f = \eta_f \left[ \nabla^2 \mathbf{u}_f + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_f) \right],$$

$$\mathbf{F}_g = \eta_g \left[ \nabla^2 \mathbf{u}_g + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_g) \right].$$

$\eta_f$  和  $\eta_g$  是粘性系数, 相互摩擦力

$$\mathbf{F}_{fg} = D(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_g),$$

其中

$$D = 2\pi\eta_f \frac{2\eta_f + 3\eta_g}{\eta_f + \eta_g} \cdot R \cdot n.$$

Rayleigh-Plesset 方程给出

$$P\{R\} = \rho_f R \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \frac{3}{2} \rho_f \left( \frac{\partial R}{\partial t} \right)^2 + \frac{4\eta_f}{R} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{2\sigma}{R}.$$

其中  $\sigma$  是表面张力。

电磁场  $E$ ,  $H$  服从 Maxwell 方程

$\mu$  为导磁率, 电流密度  $\mathbf{j}$  由 Ohm 定律给出。这里我们假设只有液相是导电介质, Lorentz 力只作用在液态金属上。

### 三、Hartmann 流动

设二相流发生在两块静止的平行平板之间。流动在  $x$  方向, 并且在垂直界面方向有一个均匀磁场  $H_0$ , 如图 1 所示。一般在  $y$  方向有均匀电场  $E$ , 由于液态金属运动, 会产生一个磁场分量  $H_x$ , 这就是 Hartmann 流动问题。

保留粘性力, 略去磁力以外的其他外力, 得

$$A_1 + A_2 u_f + A_3 u_g + \frac{d^2 u_f}{dz^2} = 0,$$

$$B_1 + B_2 u_f + B_3 u_g + \frac{d^2 u_g}{dz^2} = 0.$$

其中

$$A_1 = \frac{1}{\eta_f} \left[ -\frac{\partial P_f}{\partial x} + \mu \sigma H_0 E \right],$$

$$A_2 = \frac{1}{\eta_f} \left[ -\sigma (\mu H_0)^2 - \frac{D}{1-\beta} \right],$$

$$A_3 = \frac{1}{\eta_f} \frac{D}{1-\beta}, \quad B_1 = -\frac{1}{\eta_g} \frac{\partial P_g}{\partial x}, \quad B_2 = -B_3 = \frac{1}{\eta_g} \frac{D}{\beta}.$$

这里  $A_i, B_i (i=1, 2, 3)$  可以是  $x$  的函数。此外

$$P_g - P_f = \frac{2\sigma}{R},$$

$$P_g R^{3r} = \text{const},$$

$$\rho_f = \text{const},$$

$$j_y = \sigma (E - \mu H_0 u_f),$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = 4\pi j_y.$$

并且电场  $E$  满足总电流为零条件

$$\int_{-L}^L j_y \cdot dz = 0.$$

边界条件

$$z = \pm L, \quad u_f = u_g = 0.$$

上述边值问题的解为

$$u_f = a_{11} \text{ch} b_1 z + a_{12} \text{ch} b_2 z + a_{13},$$

$$u_g = a_{21} \text{ch} b_1 z + a_{22} \text{ch} b_2 z + a_{23}.$$

其中

$$b_1^2 = \frac{1}{2} \left[ -(A_2 + B_3) + \sqrt{(A_2 - B_3)^2 + 4A_3 B_2} \right],$$

$$b_2^2 = \frac{1}{2} \left[ -(A_2 + B_3) - \sqrt{(A_2 - B_3)^2 + 4A_3 B_2} \right],$$

$$a_{13} = \frac{-A_1 B_3 + A_3 B_1}{A_2 B_3 - A_3 B_2}, \quad a_{23} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_2 B_3 - A_3 B_2},$$

$$a_{21} = \frac{-(A_2 + b_1^2)}{A_3} a_{11}, \quad a_{12} = \frac{-(B_3 + b_1^2)}{B_2} a_{12},$$

$$a_{11} = \left( \frac{A_2 + b_1^2}{A_3} \times \frac{B_3 + b_1^2}{B_2} - 1 \right) \text{ch} b_1 L,$$

$$a_{22} = \left( \frac{A_2 + b_1^2}{A_3} \times \frac{B_3 + b_1^2}{B_2} - 1 \right) \text{ch} b_2 L.$$

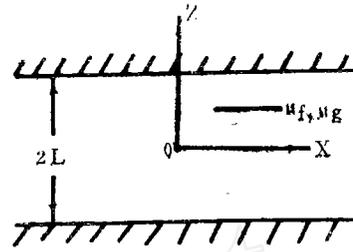


图1 Hartmann流动

平均流速

$$V = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u_f \cdot dz = \frac{a_{11}}{b_1 L} \text{sh} b_1 L + \frac{a_{12}}{b_2 L} \text{sh} b_2 L + a_{13}$$

总电流为零的条件给出

$$E = \mu H_0 V,$$

$E$ 取定之后, 得

$$j_y = \sigma(E - \mu H_0 u_f),$$

$$H_x = 4\pi\sigma(E - \mu H_0 a_{13})z - 4\pi\sigma\mu H_0 \left[ \frac{a_{11}}{b_1} \text{sh} b_1 z + \frac{a_{12}}{b_2} \text{sh} b_2 z \right].$$

考虑恒压力梯度  $\frac{dP_f}{dx} = -\Gamma = \text{const}$ . 取特征速度  $V_0 = \Gamma L^2 / \eta_f$ , Hartmann 数  $M = \mu H_0 L \sqrt{\sigma / \eta_f}$ , 磁雷诺数  $R_M = 4\pi\mu\sigma L V_0$ . 选取  $\beta = 0, 0.1, 0.3$ ,  $r = 1.4$ ,  $K = \eta_g / \eta_f = 0.011538$ ,  $M = 2, 4, 6, 8$ ,  $R_M = 1, 2, 5$ ,  $\Gamma = 10^5 \text{N/m}^3$ ,  $N = nL^3 = 10^5, 10^4$ . 图 2—6 给出液态金属流速  $u_f/V_0$ , 气泡流速  $u_g/V_0$  和液态金属平均流速  $V/V_0$  的计算结果.

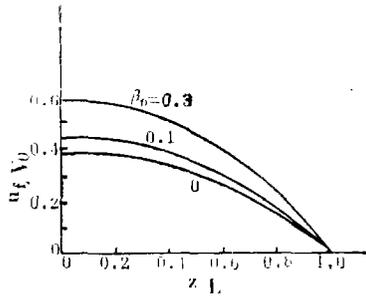


图2 液态金属流速分布 ( $M=2$ )

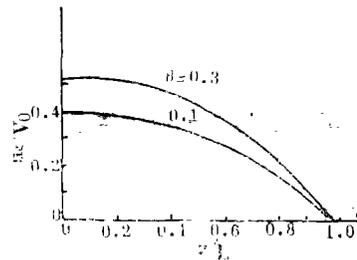


图3 气泡流速分布 ( $M=2$ )

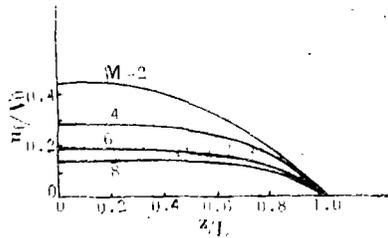


图4 液态金属流速分布 ( $\beta=0.1$ )

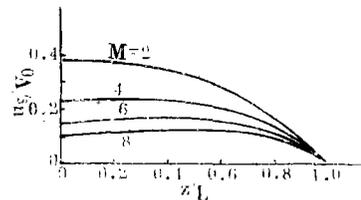


图5 气泡流速分布 ( $\beta=0.1$ )

结果表明:

(1) 液态金属流速  $u_f/V_0$ , 气泡流速  $u_g/V_0$ , 以及液态金属平均流速  $V/V_0$  等物理量主要取决于二相介质单位体积中含气泡的体积  $\beta$  和哈特曼数  $M$ . 在  $\beta$  一定条件下, 气泡个数  $N$  的变化对含气泡液态金属的 Hartmann 流动影响不大.

(2) 液态金属及气泡的流速随着  $\beta$  的增大而增大, 见图 2, 3. 图中  $\beta=0$  相当于单相液态金属的 Hartmann 流动. 从图中看到, 含气泡液态金属 ( $\beta>0$ ) 比单相液态金属 ( $\beta=0$ ) 流速高. 这是由于气泡的存在, 单位体积内液态金属质量减少了, 在同样压力梯度下液态金属及气泡的流速都会增大.  $\beta$  越大, 流速越高.

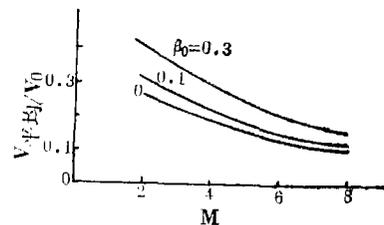


图6 液态金属平均流速

(3) 随着哈特曼数 $M$ 的增大, 液态金属和气泡的流速减小。图4, 5是液态金属和气泡沿 $z$ 向分布曲线。当 $M$ 很大时, 即强磁场时, 在远离壁面处液态金属和气泡的流速都趋于常数。含气泡液态金属流速随 $M$ 数变化的趋势与单相液态金属Hartmann流动相似, 磁场均起阻力作用。

(4) 由含气泡液态金属流动所引起的磁场分量 $H_x$ , 其大小与磁雷诺数成正比。这与单相液态金属的Hartmann流动相同。在一般实验室中用水银作实验,  $R_M$ 较小,  $H_x$ 相对于 $H_0$ 小, 磁力线弯曲不严重。在 $\beta \neq 0$ 时, 液态金属流速增大, 平均速度亦增大。输运过程引起的磁场变化加大, 因此 $H_x$ 增大, 磁力线弯曲加重。同样,  $y$ 方向电流也增大。

#### 参 考 文 献

- [1] Hammiff, F. G., Cavitation and Multiphase Flow Phenomena, McGraw Hill Inc., 1980, Chap. 3.
- [2] Hsieh, D. Y., in Mechanics and Physics of Bubbles in Liquids, Martimes Nijhoff, 1982, p.305.

(编辑部1986年2月15日收稿)

## MAGNETOHYDRODYNAMICS OF BUBBLE-CONTAINING LIQUID METALS AND HARTMANN FLOWS

XU Fu RONG Sheng

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

#### ABSTRACT

The basic equations of MHD for bubble-containing liquid metals and their Hartmann flows are discussed in the present paper.

**Key words** Bubble-containing liquid metal, Magnetohydrodynamics, Hartmann flow.