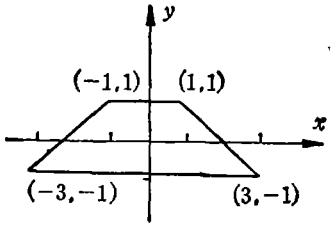
	四点高斯积分	九点高斯积分	级数解
θ	5.2617×10^{-7}	5.544×10^{-7}	5.556×10^{-7}
τ_{yzmax}	0.5685	0.5990	0.6009
τ_{xzmax}	0.1419	0.1496	0.1250

例 2　梯形截面直杆扭转



图

	四点高斯积分	九点高斯积分
θ	2.6308×10^{-7}	2.7720×10^{-7}
τ_{yzmax}	0.1592	0.1678
τ_{xzmax}	0.1592	0.1678

例 3　棱形截面直杆的扭转

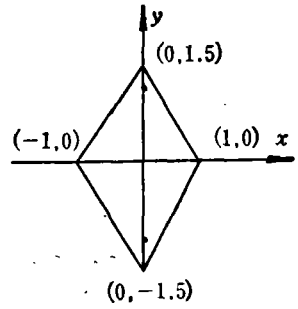


图 5

	四点高斯积分	九点高斯积分
θ	7.0155×10^{-7}	7.3920×10^{-7}
τ_{yzmax}	0.7586	0.7987
τ_{xzmax}	0.5053	0.5324

参 考 文 献

[1] 钱伟长、叶开沅，弹性力学，科学出版社(1956).
[2] 徐秉业，弹性与塑性力学，机械工业出版社.

（本文于 1984 年 10 月 22 日收到）

三维弹塑性模型在桩端土体性状分析中的应用

章 根 德

（中国科学院力学研究所）

摘要　用三维弹塑性模型分析桩端部土体的性状．首先，将半元限土体中的轴对称问题归结为求解双调和方程，运用 Hankel 变换可以给出圆型均布载荷作用下的解析解．而后，使用德鲁克—普拉格（Drucker-Prager）准则分析土介质塑性屈服的性状．本文在给出解析解的同时，用电子计算机计算了泊桑比 $\nu=\frac{1}{4}$ 土介质中的位移场．二者比较，结果十分接近．在上述分析的基础上建立了“刚性圆锥”的力学模型，并给出了形成“刚性圆锥”的临界载荷与圆锥顶角对土性参数依赖关系的计算公式．

关键词　三维弹塑性模型，桩分析

在处理基础问题时，人们往往都采用弹性解．但在某些实际问题中，例如桩基础在承受超强工作载荷时，桩端下的土体往往会出现塑性屈服的情况．此时，只有采用三维弹塑性模

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

型来描述，才能得到较为理想的近似结果。

一、圆形均布载荷作用的三维弹性解：

由轴对称的平衡方程，加上应力-应变关系及协调方程，可以将问题转化成解双调和方程

$$\nabla^4\Phi = 0 \tag{1}$$

并使Φ满足相应的边条件

$$z = 0,\ \tau_{rz} = 0$$

$$\sigma_z = \begin{cases} -\dfrac{P}{\pi a^2}, & 0 \leqslant r \leqslant a \\ 0, & r > a \end{cases} \tag{2}$$

运用 Hankel 积分变换及反演，可以得到应力场及位移场的表达式：

$$\sigma_r = \frac{P}{\pi a r}\int_0^\infty \left(\frac{1-2\nu}{x} - z\right) J_1(ax)J_1(rx)e^{-xz}dx - \frac{P}{\pi a}\int_0^\infty (1 - xz)J_1(ax)J_0(rx)e^{-xz}dx \tag{3}$$

$$\sigma_\theta = \frac{-P}{\pi a r}\int_0^\infty (1 - 2\nu - xz)J_1(ax)J_1(rx)e^{-xz}\frac{dx}{x} - \frac{2\nu P}{\pi a}\int_0^\infty J_1(ax)J_0(rx)e^{-xz}dx \tag{4}$$

$$\sigma_z = \frac{-Pz}{\pi a}\int_0^\infty J_1(ax)J_0(rx)e^{-xz}xdx - \frac{P}{\pi a}\int_0^\infty J_1(ax)J_0(rx)e^{-xz}dx \tag{5}$$

$$\tau_{rz} = \frac{-Pz}{\pi a}\int_0^\infty J_1(ax)J_0(rx)e^{-xz}xdx \tag{6}$$

$$u_r = \frac{Pz}{2\pi\mu a}\int_0^\infty J_1(ax)J_1(rx)e^{-xz}dx - \frac{(1-2\nu)P}{2\pi\mu a}\int_0^\infty J_1(ax)J_1(rx)e^{-xz}\frac{dx}{x} \tag{7}$$

$$u_z = \frac{2(1-\nu)P}{2\pi\mu a}\int_0^\infty J_1(ax)J_0(rx)e^{-xz}\frac{dx}{x} + \frac{Pz}{2\pi\mu a}\int_0^\infty J_1(ax)J_0(rx)e^{-xz}dx \tag{8}$$

运用超越函数中 Bessel 函数及伽玛函数的特性，最终可以将解析解表示成伽玛函数的级数。令 $a = 1$，对于泊桑比 $\nu = \frac{1}{4}$ 的土介质，应力与位移分量分别可以表示成：

$$\frac{\pi\sigma_r}{P} = \frac{1}{2z^2}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(2K+1)!}{K!K!}(2K+1)\cdot\left(-\frac{1}{4}\frac{r^2}{z^2}\right)^K\cdot {}_2F_1\left(-K,-K,2,\frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{8z^2}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(2K+1)!}{K!(K+1)!}\cdot(4K+3)\left(-\frac{1}{4}\frac{r^2}{z^2}\right)^K\cdot {}_2F_1\left(-K,-1-K,2,\frac{1}{r^2}\right) \tag{9}$$

$$\frac{\pi\sigma_\theta}{P} = \frac{1}{8z^2}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(2K+1)!}{K!(K+1)!}\cdot(4K+3)\left(-\frac{1}{4}\frac{r^2}{z^2}\right)^K\cdot {}_2F_1\left(-K,-1-K,2,\frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{4z^2}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(2K+1)!}{K!K!}\left(-\frac{1}{4}\frac{r^2}{z^2}\right)^K\cdot {}_2F_1\left(-K,-K,2,\frac{1}{r^2}\right) \tag{10}$$

$$\frac{\pi\sigma_z}{P} = \frac{-1}{2z^2}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(2K+1)!}{K!K!}(2K+3)\cdot\left(-\frac{1}{4}\frac{r^2}{z^2}\right)^K\cdot {}_2F_1\left(-K,-K,2,\frac{1}{r^2}\right) \tag{11}$$

$$\frac{\pi\tau_{rz}}{P} = \frac{-r}{4z^2}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(2K+3)!}{K!(K+1)!}\left(-\frac{1}{4}\frac{r^2}{z^2}\right)^K\cdot {}_2F_1\left(-K,-1-K,2,\frac{1}{r^2}\right) \tag{12}$$

$$\frac{2\pi\mu}{P}u_r = \frac{r}{8z^2}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(2K+1)!}{K!(K+1)!}\cdot(4K+3)\left(-\frac{1}{4}\frac{r^2}{z^2}\right)^K\cdot {}_2F_1\left(-K,-1-K,2,\frac{1}{r^2}\right) \tag{13}$$

$$\frac{2\pi\mu}{P}u_z = \frac{1}{4z}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(2K)!}{K!K!}(4K+5)\left(-\frac{1}{4}\frac{r^2}{z^2}\right)^K\cdot {}_2F_1\left(-K,-K,2,\frac{1}{r^2}\right) \tag{14}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

二、桩端下方土体中位移场的特性:

根据电子计算机数值计算的结果所画出的桩端下方土体中的位移曲线如图1、图2所示。图1是半径为单位长度的桩的无量纲纵向位移 $\bar{u}_z\left(=\frac{2\pi\mu}{P}u_z\right)$ 随 r 与 z 的变化图。从图中的曲线可看到，纵向位移随深度 z 的变化衰减很快。在桩中心的正下方，$z=0$ 处的纵向位移是 1.4758，而 $z=5$ 处的纵向位移只有 0.24564，衰减了约6倍。而纵向位移随 r 的变化与深度 z 密切相关。在 $z=0$ 的面上，纵向位移随 r 的增加衰减很快。r 从0变到5的范围内，$\bar{u}_z$ 从 1.4758 衰减到 0.15249，变化约27倍。而在 $z=5$ 的面上，r 从0变到5的范围内，$\bar{u}_z$ 从 0.24564 衰减到 0.14145，变化只1.7倍。随着深度的增加纵向位移随 r 的变化将变得越来越平坦。可见纵向位移变化较大的区域主要集中于5倍半径的范围内，在这之外，变化就相当平坦了。

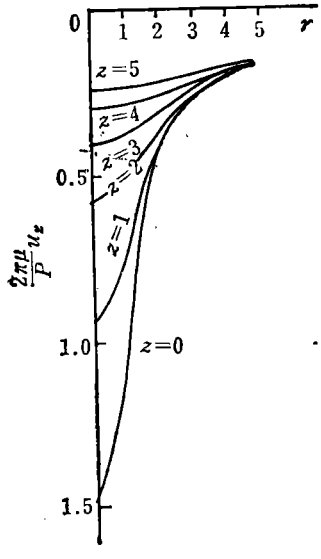


图1 $\frac{2\pi\mu}{P}u_z$ 随 r 与 z 的变化

图2是半径为单位长度的桩的无量纲径向位移 $\bar{u}_r\left(=\frac{2\pi\mu}{P}u_r\right)$ 随 r 与 z 的变化。

径向位移的特征：$z=0$ 的表层土，径向位移 $\bar{u}_r$ 都是负值。$r=1$ 处，是 -0.25，随着

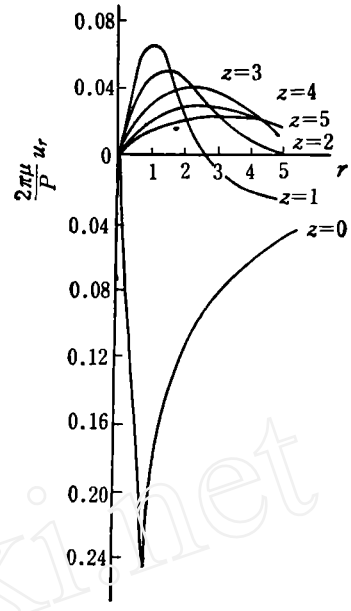


图2 $\frac{2\pi\mu}{P}u_r$ 随 r 与 y 的变化

r 的增加，开始衰减比较快，后来就越来越慢。$r=5$ 外，$\bar{u}_r=-0.05$；$r=10$，$\bar{u}_r=-0.025$；$r=100$，$\bar{u}_r=-0.0025$。在 $z=0$ 的表层，径向位移为负值这是很显然的。因为桩向下运动，由于土介质连续性的要求，必然要牵动四周的土向中心运动。在 $z>2$，即2倍半径的深度以上，土介质的径向位移都是正值，土介质都离桩身向外运动。这是由于桩向下运动，桩端附近的土除向下运动外，还有外推运动的结果。在 $z=0$ 到 $z=2$ 的深度范围内，土介质的径向位移由负变成正，即由向桩心收缩变为离桩心向外运动。在这层土内，存在一个"零径向位移曲面"，它在 rz 平面上的剖面投影如图3中的 AC，BD 曲线所示。在此"曲面"上，只有纵向位移 u_z 而无径向位移 u_r。在"曲面上方"，土的径向位移为负，土向桩心运动。在"曲面"的下方，土的径向位移为正，土离桩心向外运动。

由于在"零径向位移曲面"上方，$u_r<0$，土介质向桩心运动。并且在 $r>a$ 的表面是自由面，没有任何应力作用。所以土介质向桩心运动的结果，必然出现土在自由表面隆起的现象。这种现象在桩开始压入土介质时都可以看到。Tcheng 观察桩压入均匀砂的实验，在桩开

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

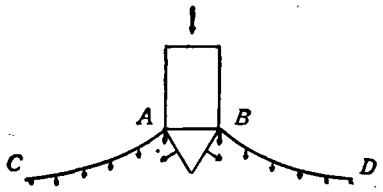


图 3 桩端下方土体中的零径向位移曲面与刚性圆锥的剖面图

始压入时就观察到砂在表面隆起的现象[3]。

"零径向位移曲面"将土体分成两部分。在土体变形过程中，这两部分土体具有完全不同的特性。"曲面"上部的土介质，土介质变形破坏时体积将出现松胀，是剪胀破坏；而"曲面"下部的土体，变形破坏过程却是剪缩破坏。

三、桩端下方土的屈服与"刚性圆锥"模型

随着桩所承载的负荷的增加，土体中的应力会不断地增加。当有效应力达到一定值时，就会引起土的塑性屈服。通常，关于土的屈服条件都采用 Mohr-Coulomb 准则。Mohr-Coulomb 条件所代表的屈服面是一个不等角的六边形锥体。在锥体的转角处会出现间断，这对处理连续体问题造成了很大的困难。为此，Drucker-Prager 建议采用下列较为方便的公式来代替[4]：

$$f^* = \beta I_1 + \sqrt{J_2} = k_f \tag{15}$$

上式中的

$$\beta = \frac{\sqrt{3}\sin\phi}{3\sqrt{3+\sin^2\phi}},\quad k_f = \frac{\sqrt{3}\,c\cos\phi}{\sqrt{3+\sin^2\phi}} \tag{16}$$

(16)式中的 c 与 ϕ 分别为 Mohr-Coulomb 准则中的凝聚力与内摩擦角。由土性试验得到了参数 c 与 ϕ，就能从公式(16)给出 β 与 k_f。

对于圆柱坐标中的轴对称问题，(15) 式中的 I_1 与 J_2 分别为：

$$I_1 = \sigma_{ij}\delta_{ij} = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$$

$$J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = \frac{1}{2}\left[\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_z^2 - \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)^2 + 2\tau_{rz}^2\right]$$

取桩的半径为单位半径，取土的泊桑比为 0.25，代入后可得：

$$I_1 = -\frac{5P}{2\pi}\int_0^\infty J_1(x)J_0(rx)e^{-xz}dx \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
J_2 = \frac{P^2}{2\pi^2}\Bigg\{&\frac{1}{6}\left[\int_0^\infty J_1(x)J_0(rx)e^{-xz}dx\right]^2 \\
&+ 2z^2\left[\int_0^\infty J_1(x)J_0(rx)e^{-xz}xdx\right]^2 \\
&+ 2z^2\left[\int_0^\infty J_1(x)J_1(rx)e^{-xz}xdx\right]^2 \\
&+ \frac{z}{r}\left[\int_0^\infty J_1(x)J_0(rx)e^{-xz}dx\right] \\
&\cdot\left[\int_0^\infty J_1(x)J_1(rx)e^{-xz}dx\right] \\
&- \frac{1}{2r}\left[\int_0^\infty J_1(x)J_0(rx)e^{-xz}dx\right] \\
&\cdot\left[\int_0^\infty J_1(x)J_1(rx)e^{-xz}\frac{dx}{x}\right] \\
&- \frac{2z^2}{r}\left[\int_0^\infty J_1(x)J_0(rx)e^{-xz}xdx\right] \\
&\cdot\left[\int_0^\infty J_1(x)J_1(rx)e^{-xz}dx\right] \\
&+ \frac{z}{r}\left[\int_0^\infty J_1(x)J_0(rx)e^{-xz}xdx\right] \\
&\cdot\left[\int_0^\infty J_1(x)J_1(rx)e^{-xz}\frac{dx}{x}\right] \\
&+ \frac{1}{2r^2}\left[\int_0^\infty J_1(x)J_1(rx)e^{-xz}\frac{dx}{x}\right] \\
&+ \frac{2z^2}{r^2}\left[\int_0^\infty J_1(x)J_1(rx)e^{-xz}dx\right]^2 \\
&- \frac{2z}{r^2}\left[\int_0^\infty J_1(x)J_1(rx)e^{-xz}\frac{dx}{x}\right] \\
&\cdot\left[\int_0^\infty J_1(x)J_1(rx)e^{-xz}dx\right]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{18}$$

在 $z=0$，$r=1$ 处，即与桩端面相接触的土层全部达到屈服时，由于

$$\int_0^\infty J_1(x)J_0(x)dx = 0,$$

故 $I_1 = 0$，将(18)式代入(15)式后可得：

$$\begin{aligned}
k_f^2 = \frac{P^2}{2\pi^2}\Bigg\{&\frac{1}{6}\left[\int_0^\infty J_1(x)J_0(x)dx\right]^2 \\
&+ \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty J_1(x)J_1(x)\frac{dx}{x}\right]^2 \\
&- \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty J_1(x)J_0(x)dx\right]
\end{aligned}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\cdot\left[\int_0^\infty J_1(x)J_1(x)\frac{dx}{x}\right]\Big\} \qquad (19)$$

由于$\int_0^\infty J_1(x)J_1(x)\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}$,运算后(19)式最终变成

$$k_f^2=\frac{P^2}{16\pi^2},\ 即\ P=4\pi k_f \qquad (20)$$

(20)式表示了与桩端面相接触的土层全部达到屈服所需的应力P为$4\pi k_f$. 对于不同的深度z,屈服面的轨迹是以$r(r<1)$为半径的圆. 屈服土所能达到的最深深度是$r=0$处土的深度z. 以$r=0$代入(18)式,并由于

$$\lim_{r\to 0}\frac{J_1(rx)}{r}=\frac{x}{2}$$

$$\int_0^\infty J_1(x)e^{-xz}dx=\frac{\sqrt{z^2+1}-z}{\sqrt{z^2+1}}$$

$$\int_0^\infty J_1(x)e^{-xz}xdx=\frac{1}{(z^2+1)^{3/2}}$$

可算出(18)式的I_2,再代入(15)式可得:

$$\left[1-10\beta\frac{\sqrt{z^2+1}-z}{\sqrt{z^2+1}}\right]^2$$

$$=\frac{[\sqrt{z^2+1}-z]^2}{z(z^2+1)}+12\frac{z^2}{(z^2+1)^3}$$

$$+4z\frac{\sqrt{z^2+1}-z}{(z^2+1)^2} \qquad (21)$$

对于给定的β值,解方程(21)就能给出与桩端面相接触的土层全部屈服时,此载荷下屈服土所能达到的深度.

屈服面轨迹在r,θ,z的柱坐标中是一个锥面,屈服面的轨迹在z为常数的平面上的投影是以r为半径的圆. 如果假设土在塑性屈服后为不可压,并且对锥体的母线作线性近似处理,则桩端面下的屈服土就可以看成一个"刚性圆锥".

"刚性圆锥"的顶角,对于摩擦角ϕ为30°的土,$\beta=0.160128$,代入方程(21)可解得$z=1.785$,可以计算出"刚性圆锥"的顶角$\Theta=58°30'$. 对于摩擦角ϕ为15°的土,$\beta=0.085326$,$z=1.654$,相应的$\Theta=62°20'$. 如果不考虑I_1的影响,Drucker-Prager 屈服条件就变成 Mises 屈服条件,此时相应的顶角$\Theta=68°.8'$. 以上的数据表明,土的摩擦角ϕ对于"刚性圆锥"的顶角Θ的影响是不敏感的. 对于一般的土介质,摩擦角ϕ在15°~30°的范围内变化. 相应"刚性圆锥"顶角Θ的变化仅4°左右. 所以,从工程观点来看,"刚性圆锥"的顶角可以近似地看成60°,它在r,z平面上的投影为一正三角形,如图(3)所示.

以往讨论二维基础的滑移线时,工程上常采用正三角形"刚性圆锥"的假设. 这种简化给工程应用带来了方便. 但是二维分析不可能给出这种近似描述的假设条件与估算近似的程度. 而根据上述的三维分析与计算,就可以在严格的力学分析的基础上提出"刚性圆锥"的力学模型.

假设:

1. 土体在屈服前是线弹性的.
2. 土的塑性屈服采用 Drucker-Prager 屈服准则.
3. 土在屈服后是不可压的.
4. 对"刚性圆锥"母线作线性化近似处理.

那末,根据桩端下方土体应力场与位移场的三维分析计算,当所加的载荷

$$P\geqslant 4\pi\frac{\sqrt{3}\,c\cos\phi}{\sqrt{3+\sin^2\phi}}$$

时,桩端正下方的土介质就会屈服形成"刚性圆锥". 圆锥顶角$\Theta=2\mathrm{tg}^{-1}z$,$z$为方程式(21)的解.

$P=4\pi\frac{\sqrt{3}\,c\cos\phi}{\sqrt{3+\sin^2\phi}}$称为桩端下方出现"刚性圆锥"的临界载荷. 它与土的内聚力c成正比. 内聚力c越小,土介质就越容易屈服而形成"刚性圆锥". 土的摩擦角ϕ对"刚性圆锥"的顶角Θ的影响是不敏感的. 在工程问题中常常可以近似地认为它等于60°. 即桩端下方的"刚性圆锥"可以近似地看成顶角为60°的正圆锥.

上述的三维弹塑性分析与计算比二维分析更接近实际情况. 虽然分析计算过程比较复

(下转第62页)

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

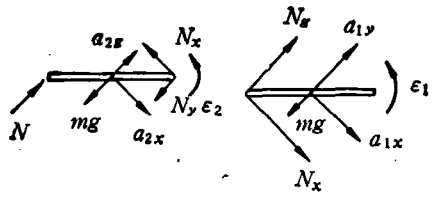


图 5

$$N - mg - N_y = ma_{2y},$$
$$-N_x = ma_{2x},$$

$$(N_x - N_y - N) \cdot \frac{l}{2}\cos 45^\circ = \frac{1}{12} ml^2\varepsilon_2$$

下杆的下端在铅直方向上的加速度为零，即满足

$$a_{2y} + \left(-\frac{1}{2} l\varepsilon_2 \cos 45^\circ\right) = 0$$

两杆在铰链处的加速度相等，即满足

$$a_{1x} + \frac{1}{2} l\varepsilon_1 \cos 45^\circ = a_{2x} - \frac{1}{2} l\varepsilon_2 \cos 45^\circ,$$

$$a_{1y} - \frac{1}{2} l\varepsilon_1 \cos 45^\circ = a_{2y} + \frac{1}{2} l\varepsilon_2 \cos 45^\circ,$$

由上面 9 式联立求解得

$$N = \frac{28}{29} mg,\ N_x = \frac{6}{29} mg,\quad N_y = \frac{8}{29} mg$$

答 135. 由元素 1, 2, 3, …, n^2 所构成的 n 阶方阵 A，若其每行、每列及两条对角线中诸数之和均相同，即为 $n(n^2+1)/2$，则称 A 为一个 n 阶幻方. 对于 $\geqslant 3$ 的整数 n，现在已经证明 n 阶幻方都存在，并且可以具体构造出来.

令 $H = (h_{ij})$ 为一个 n 阶幻方，对于 $1 \leqslant i, j \leqslant n$，在题 131 的图中位于第 i 行、第 j 列的点上放置一个质量为 h_{ij} 克的质点，这样就恰好得到由给定的 n^2 个质点所构成的质点系. 与在问题 131 的解答中完全相同地建立直角坐标系 Oxy，容易证明，上面所建立的质点系的质心恰在 O 点.

上面令 $H = (h_{ij})$ 为一个 n 阶幻方，要求过强了一点. 事实上，只要 H 的每行及每列中诸数之和均相同即可. 对于取定的整数 $n \geqslant 3$，满足这样条件的 n 阶方阵要比 n 阶幻方容易构造，并且其数量也比 n 阶幻方多.

答 136. 设除去 P 力后绳中张力为 P_1，若绳子不可伸长，在 P_1 作用下，两个悬臂梁的挠度和应与在 P 力作用下 A 梁的挠度相等. 故变形条件为

$$\frac{Pl_1^3}{3EJ_1} = \frac{P_1 l_1^3}{3EJ_1} + \frac{P_1 l_2^3}{3EJ_2}$$

解得

$$P_1 = \frac{J_2 l_1^3}{J_2 l_1^3 + J_1 l_2^3} \cdot P$$

若绳的拉伸刚度为 $E_c F_c$，则变形条件为

$$\frac{Pl_1^3}{3EJ_1} = \frac{P_1 l_1^3}{3EJ_1} + \frac{P_1 l_2^3}{3EJ_2} + \frac{(P_1 - P)L}{E_c F_c}$$

解得

$$P_1 = \frac{E_c F_c l_1^3 + 3EJ_1 L}{E_c F_c (l_1^3 J_2 + l_2^3 J_1) + 3ELJ_1 J_2}$$

（上接第 33 页）

杂，但给出的“刚性圆锥”的模型与计算公式却比较简单，可以在工程界广泛地应用.

参 考 文 献

[1] Poulos, H. G., Some Recent Developments in The Theoretical Analysis of Pile Behavior, Soil Mechanics, New Horizons, I. K. Lee, ed. (1974).

[2] Melachlam, N. W., Bessel Functions for Engin eers Second Edition, London (1954).

[3] Tcheng, Y., Mesures Expèrimentales on Milieu Pulvèrulent, Anneles I. T. B. T. P. No. 332, Oct. (1975).

[4] 黄文熙，土的弹塑性应力-应变模型理论，岩石力学，3 (1981).

（本文于 1984 年 5 月 21 日收到）

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net