参量调制驱动环形等离子体稳态电流的简化分析

薛 明 伦

(中国科学院力学研究所，北京)

本文用简化模型分析托卡马克装置，建议用等离子体柱径向速度振荡和角向磁场振荡的相互作用产生一个定常环向电动势以驱动稳态电流。这可由按一定相位差调制两个外加参量来达到。按反应堆参数估计，这种调制频率可以是工业频率。

关键词 电流驱动，稳态托卡马克。

受控热核聚变的研究正在稳步取得进展，其中磁约束托卡马克型实验达到得失相当的目标已指日可待，但要建成符合商用目标的反应堆还要解决一系列复杂的科学和技术问题，其中关键的一项是驱动稳态环形电流，这一电流是经济上合理的未来稳态托卡马克型反应堆所必需。

多途径地探求驱动稳态电流的方法正在进行。本文建议用等离子体柱径向速度振荡和角向磁场振荡的相互作用产生一个定常环向电动势以驱动稳态电流。这两个量的振荡，可以通过两个外加参量按一定相位差的调制来做到。与目前正在进行研究的方法比较，它显然具有技术和设备简单，经济而又可靠性高的潜在优点。

设想有一环形轴对称等离子体，它的参数是由稳态分布量叠加振荡量构成。振荡源系人为调制，它们可以是：(1)由交流变压器感生环向电流振荡而产生的角向磁场振荡；(2)外加纵场的振荡；(3)外加加热量（中性注入或波加热等）引起的温度及相应参数的振荡等。

由Ohm定律可知，对于热等离子体电流驱动

$$\frac{\mathbf{j}}{\sigma}=\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B}-\frac{1}{ne}(\mathbf{j}\times\mathbf{B}), \tag{1}$$

对于轴对称位形而言，由于 $\mathbf{j}\times\mathbf{B}$（包括它的轴对称振荡）总是在小环径向，而没有环向分量，因而 $-\frac{1}{ne}(\mathbf{j}\times\mathbf{B})$ 在这里不可能成为环向电动势。而“稳态”的 $\mathbf{E}$ 只能由不断变化的磁通来做到，因而它也不能持续维持。这样，环向电动势只能来源于径向速度振荡和角向磁场振荡的相互作用，因为

$$(\delta\mathbf{V}\times\delta\mathbf{B})_{\phi}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\tilde{V}_r\times\tilde{B}_\theta^*)+\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\tilde{V}_r\times\tilde{B}_\theta\cdot\exp(i2\omega t)], \tag{2}$$

这里

$$\delta V_r=\tilde{V}_r\exp(i\omega t),\quad \delta B_\theta=\tilde{B}_\theta\exp(i\omega t).$$

$\tilde{B}_\theta^*$是$\tilde{B}_\theta$的共轭量，下标r，θ，ϕ分别表示小环径向、角向和环向。从(2)式可以看出，当$\tilde{V}_r$和$\tilde{B}_\theta$相位匹配适当时，就会产生一个环向稳态电动势和一个频率为2ω的环向交变电动势，显然其最大值产生在二者相位相同时，这一稳态电动势就可用以驱动环向稳态电流。

为了突出问题的物理本质，且对各个物理量能有一个简便而可靠的数量级估算，下面将用面电流直柱模型来分析，这时下标r，θ，t分别表示径向、角向和轴向。

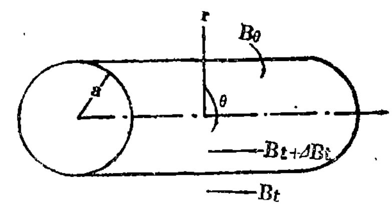

图1 直柱模型的坐标系

其定常状态是，外加纵场B_t，等离子体集中在$r=a$的柱内，电流集中在$r=a$的表面上，既有轴向电流也有角向电流，因而角向磁场在表面上从零突跳到B_θ，其平均值是$B_\theta/2$，纵场从B_t突跳到$B_t+\triangle B_t$，$\triangle B_t>0$相当于等离子体存在顺磁角向电流，这时角向比压$\beta_p=p/(B_\theta^2/2\mu_0)_{r=a}<1$，而$\triangle B_t<0$相当于等离子体存在逆磁电流，这时$\beta_p>1$。和电磁力比较，惯性力可以忽略，等离子体状态的变化可以看作是一系列准平衡态的演化。而由于电导率足够高，在振荡过程中假定磁通守恒是合理的。这样，可以写出考虑小振幅振荡的线性方程组

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho}{dt}+\frac{2}{a_0}\frac{da}{dt}=0, \tag{3}$$

$$\frac{dp}{dt}=\frac{B\theta_0}{\mu_0}\frac{dB_\theta}{dt}-\frac{Bt_0}{\mu_0}\frac{d(\triangle Bt)}{dt}+\frac{\triangle Bt_0}{\mu_0}\frac{dBt}{dt}, \tag{4}$$

$$\frac{dQ}{dt}=C_p\frac{dT}{dt}-\frac{1}{\rho_0}\frac{dp}{dt}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{p_0}\frac{dp}{dt}=\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dt}+\frac{1}{T_0}\frac{dT}{dt}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{Bt_0}\left(\frac{dBt}{dt}+\frac{d\triangle Bt}{dt}\right)+\frac{2}{a_0}\frac{da}{dt}=0. \tag{7}$$

(3)—(7)式分别为连续方程、动量方程、能量方程、状态方程和磁通守恒方程。p，ρ，T分别表示压力、密度和温度，B为磁场强度，Q为单位质量的加热量，C_p为比热，下标“0”表示定常态参数。任意物理量的振荡部分都可表示为

$$q=\tilde{q}\exp(i\omega t). \tag{8}$$

将(8)式代入(3)—(7)式，并由于径向速度

$$V_r=\frac{da}{dt}，即\tilde{V}_r=i\omega\tilde{a},$$

可得径向速度振荡为

$$\tilde{V}_r=-\frac{i\omega a_0}{2}\left[\frac{2}{\gamma\beta_{p0}}\left(\frac{\tilde{B}_\theta}{B_{\theta_0}}+\frac{B^2_{t0}}{B^2_{\theta0}}\frac{\tilde{B}_t}{B_{t_0}}\right)-\frac{Q^2}{C_pT_0}\right]\Big/\left(1+\frac{B^2_{t0}}{B^2_{\theta0}}\frac{1}{\gamma\beta_{p0}}\right), \tag{9}$$

其中$\gamma=5/3$为比热化，$\beta_{p0}=p_0/\frac{B^2_{\theta0}}{2\mu_0}$。

分析(9)式可以看出，仅调制$\tilde{B}_\theta$，而不同时调制$\tilde{B}_t$或$\tilde{Q}$，虽然也能产生径向速度振荡$\tilde{V}_r$，

但$\tilde{V}_r$和$\tilde{B}_\theta$的相位差正好是$\pi/2$，即

$$\tilde{V}_r = -\frac{i\omega a_0}{\gamma\beta_{p0}}\frac{\tilde{B}_\theta}{B_{\theta0}},$$

这不能产生稳态轴向电动势。

如同时按一定相位差调制$\tilde{B}_\theta$和$\tilde{B}_t$，但不调制Q，即$\tilde{Q}=0$，则完全有可能做到$\tilde{V}_r$和$\tilde{B}_\theta$同相位以产生稳态轴向电动势。如把$\tilde{B}_\theta$放在实轴上(这并不失去普遍性)，则

$$\tilde{B}_\theta = \tilde{B}_{\theta R}, \quad \tilde{B}_{\theta i} = 0,$$

$$\tilde{B}_t = \tilde{B}_{tR} + i\tilde{B}_{ti}.$$

下标R，i分别表示在实轴和虚轴上的分量。代入(9)式，得

$$\tilde{V}_r = \frac{i\omega a_0}{\gamma\beta_{p0}\left[1+\frac{1}{\gamma\beta_{p0}}\left(\frac{B_{t0}}{B_{\theta0}}\right)^2\right]}\left[\frac{\tilde{B}_{\theta R}}{B_{\theta0}} + \left(\frac{B_{t0}}{B_{\theta0}}\right)^2\frac{1}{B_{t0}}\left(\tilde{B}_{tR}+i\tilde{B}_{ti}\right)\right], \tag{10}$$

要想做到$\tilde{V}_r$和$\tilde{B}_\theta$同相位，只要令

$$\frac{\tilde{B}_{\theta R}}{B_{\theta0}} = -\left(\frac{B_{t0}}{B_{\theta0}}\right)^2\frac{1}{B_{t0}}\tilde{B}_{tR}, \tag{11}$$

这时

$$\tilde{V}_r = \frac{\omega a_0}{\gamma\beta_{p0}\left[1+\frac{1}{\gamma\beta_{p0}}\left(\frac{B_{t0}}{B_{\theta0}}\right)^2\right]}\left(\frac{B_{t0}}{B_{\theta0}}\right)^2\frac{\tilde{B}_{ti}}{B_{t0}} = \omega a_0\frac{\tilde{B}_{ti}}{B_{t0}}, \tag{12}$$

$\tilde{B}_t$超前$\tilde{B}_\theta$的相位角

$$\alpha = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\tilde{B}_{ti}}{\tilde{B}_{tR}} = \mathrm{tg}^{-1}\left[-\frac{\tilde{V}_r}{\omega a_0\left(\frac{B_{\theta0}}{B_{t0}}\right)^2\frac{\tilde{B}_\theta}{B_{\theta0}}}\right]. \tag{13}$$

各个物理量的关系如图 2 所示。

举一个典型的例子来说明。如$B_{t0}=3\mathrm{T}$，$B_{\theta0}=0.3\mathrm{T}$，$a=1\mathrm{m}$，频率$f=200\mathrm{Hz}$。若要求$\tilde{V}_r=2\mathrm{m/s}$，$\tilde{B}_{\theta R}=0.03\mathrm{T}$。则

$$\frac{\tilde{B}_{tR}}{B_{t0}} = -\frac{\tilde{B}_{\theta R}}{B_{\theta0}}\left(\frac{B_{\theta0}}{B_{t0}}\right)^2 = -10^{-3},$$

$$\frac{\tilde{B}_{ti}}{B_{t0}} = \frac{\tilde{V}_r}{\omega a} = 1.6\times10^{-3},$$

$$\alpha = \mathrm{tg}^{-1}\left[-\frac{1.6\times10^{-3}}{10^{-3}}\right] = 122°.$$

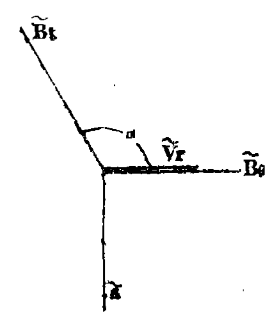

图 2　角向和纵向磁场调制时各物理量之间关系

即纵场调制超前角向磁场调制122°。这时平均定常电动势

$$E_{平均} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\tilde{V}_r\tilde{B}_\theta\right] = 1.5\times10^{-2}\mathrm{V/m}.$$

这对于温度为1.1keV的等离子体可以产生稳态电流密度约为$10^6\mathrm{A/m^2}$，对于5keV的等离子体可以产生稳态电流密度约$10^7\mathrm{A/m^2}$。

磁场调制产生稳态电流曾在反场收缩系统中被建议过[1—3]，这里针对托卡马克给出一个简便的物理分析和估算方法。

纵场调制由于能量大，实用上可能是不方便的，下面将分析同时调制$\tilde{B}_\theta$和$\tilde{Q}$而不调制$\tilde{B}_t$的情况。同时按一定相位差调制$\tilde{B}_\theta$和$\tilde{Q}$，Q是外加热量，如中性注入或波加热。这时不调制纵

场，故$\tilde{B}_t=0$。

仿照上面的做法，令

$$\tilde{B}_\theta=\tilde{B}_{\theta R},$$
$$\tilde{Q}=\tilde{Q}_R+i\tilde{Q}_i.$$

代入(9)式，得

$$\tilde{V}_r=\frac{-i\omega a_0}{\left[1+\frac{1}{\gamma\beta_{p0}}\left(\frac{B_{t0}}{B_{\theta 0}}\right)^2\right]}\left[\frac{1}{\gamma\beta_{p0}}\frac{\tilde{B}_{\theta R}}{B_{\theta 0}}-\frac{1}{2C_pT_0}(\tilde{Q}_R+i\tilde{Q}_i)\right].$$

为了做到$\tilde{V}_r$和$\tilde{B}_\theta$同相位，只要做到

$$\frac{\tilde{B}_{\theta R}}{B_{\theta 0}}=\gamma\beta_{p0}\frac{\tilde{Q}_R}{2C_pT_0},$$

这时

$$\tilde{V}_r=\frac{-\omega a_0}{\left[1+(\gamma\beta_{p0})^{-1}\left(\frac{B_{t0}}{B_{\theta 0}}\right)^2\right]}\frac{\tilde{Q}_i}{2C_pT_0},$$

$\tilde{Q}$落后于$\tilde{B}_\theta$，其落后角

$$\alpha=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\frac{\tilde{V}_r}{\omega a_0}\left[1+(\gamma\beta_{p0})^{-1}\left(\frac{B_{t0}}{B_{\theta 0}}\right)^2\right]}{\frac{1}{\gamma\beta_{p0}}\frac{\tilde{B}_{\theta R}}{B_{\theta 0}}}$$

$$\approx\mathrm{tg}^{-1}\frac{\tilde{V}_r}{\omega a_0}\left(\frac{B_{t0}}{B_{\theta 0}}\right)^2\left(\frac{\tilde{B}_{\theta R}}{B_{\theta 0}}\right)^{-1}.$$

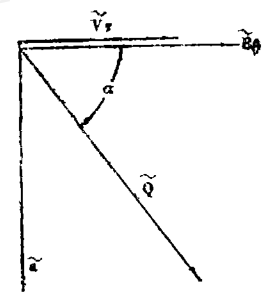

图 3　角向磁场和外加加热量调制时各物理量之间的关系

作为例子，如仍以上例的参数为基础来估算，令$\gamma=5/3$，$\beta_{p0}=0.5$，则

$$\frac{\tilde{Q}_R}{C_pT_0}=2\frac{B_{\theta R}}{B_{\theta 0}}\frac{1}{\gamma\beta_{p0}}=0.24,$$

$$\frac{\tilde{Q}_i}{C_pT_0}=-2\frac{\tilde{V}_r}{\omega a_0}\left(\frac{B_{t0}}{B_{\theta 0}}\right)^2\frac{1}{\gamma\beta_{p0}}=-0.382,$$

$$\alpha=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\tilde{Q}_i}{Q_R}=-57.8^\circ.$$

即加热量调制落后于角向磁场调制57.8°，径向振荡的振幅$|\tilde{a}|=\frac{\tilde{V}_r}{\omega a_0}=1.6\times10^{-3}$m。这时也可得到平均定常电动势$E_{平均}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\tilde{V}_r\tilde{B}_\theta\right]=1.5\times10^{-2}$A/m。

$\tilde{B}_\theta$和$\tilde{Q}$调制时各物理量的关系如图 3 所示。径向速度振荡和角向磁场振荡在合适的相位情况下可以产生一个稳态电动势用以驱动稳态电流，要做到这一点必须同时按一定相位差调制两个外加参量，可以是角向磁场和纵向磁场，也可以是角向磁场和外加加热量。这是一种低频调制，按反应堆参数估计，甚至可以是工业频率。

参　考　文　献

[1] Schoenberg, K. F. et al., *Physics of Fluids*, 27(3), 548 (1984).

[2] Schoenberg, K. F. et al., *Journal of Applied Physics*, 56(9), 2519 (1984).

[3] Janos. A. C. et al., *Fusion Technology*, 9(1), 58(1986).

(编辑部1986年9月9日收稿)

A SIMPLIFIED ANALYSIS OF THE STEADY STATE TOROIDAL CURRENT DRIVEN BY PARAMETER-MODULATION IN TOKAMAKS

XUE Minglun

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

ABSTRACT

It is shown by a simple model that the modulation of either · poloidal and toroidal magnetic fields or poloidal magnetic field and heat input can drive a steady state current in tokamaks. Estimation under reactor conditions shows that even commercial power frequency can be adequate for modulation.

Key words Current drive, Steady-state tokamak.