

复合材料应力分析的非均匀等参单元

张 双 寅

(中国科学院力学研究所, 北京)

C. M. Leech

(英国 Manchester 大学理工学院机械工程系)

摘 要

本文提出了非均匀有限元概念, 推导了非均匀等参单元刚度矩阵公式。作为应用实例, 用轴对称非均匀元素计算了复合材料绳索端头的应力分布。

一、引 言

复合材料是由两种或两种以上性质完全不同的组份材料复合而成, 具有各向异性与非均匀性两大特点。目前, 用于复合材料的有限元都是均匀有限元。即假定在整个单元内部材料是均质各向异性体, 忽略材料非均匀性的影响。用这样的有限元计算复合材料应力时, 所得的结果为基体应力与增强材料应力的平均值。当增强材料分布比较稀疏, 而且两种材料的模量差别很大时(如钢筋混凝土), 用均匀元素法计算的应力值很不精确。用此结果预测材料强度将造成很大的误差。

为了克服均匀元素法这一缺点, 本文提出非均匀有限元的概念, 就是在一个单元内材料性质是不同的。在某些区域内(如增强材料所占的区域)材料具有增强材料的性质; 而在其他区域, 材料具有基体的性质。基于虚功原理, 从等参有限元基本公式出发, 运用 Gauss 积分技术, 构造了非均匀等参单元, 导出了非均匀有限元刚度矩阵。作为应用实例, 计算了截锥状复合材料绳索端头的应力分布。结果表明, 这种非均匀有限元对计算稀疏纤维(或钢筋)增强复合材料的应力分布是十分有效的。

二、非均匀等参元的构造

1. 等参元的基本公式

非均匀元素刚度矩阵所基于的虚功原理为:

$$\int_{\Omega} [\delta \varepsilon]^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} [\delta \tilde{u}]^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} [\delta \tilde{u}]^T \bar{i} d\Gamma = 0, \quad (1)$$

其中 b 是体积力向量, \bar{i} 为面力向量, $\delta \tilde{u}$ 为虚位移向量, $\delta \varepsilon$ 为虚应变向量, σ 为应力向量, Γ_t 为有边界力作用的边界, Ω 为弹性体体积, 右上角 T 表示对矩阵进行转置。

公式(1)中第一项是弹性体应变能。单元刚度矩阵由这一项产生。下边给出推导非均匀

本文 1985 年 12 月 28 日收到, 1986 年 10 月 14 日收到修改稿。

单元刚度矩阵所用的基本公式.

单元位移向量为:

$$\tilde{u}^{(e)} = \sum_{i=1}^k N_i^{(e)} d_i^{(e)}, \quad (2a)$$

单元虚位移向量为:

$$\delta \tilde{u}^{(e)} = \sum_{i=1}^k N_i^{(e)} \delta d_i^{(e)}, \quad (2b)$$

其中 $d_i^{(e)}$ 与 $\delta d_i^{(e)}$ 为单元节点位移向量与单元节点虚位移向量, $N_i^{(e)}$ 为形状函数, 其表达式可由文献[1,2]中查到, k 为单元节点数, 左上角的 (e) 表示单元.

单元应变向量为:

$$\varepsilon^{(e)} = \sum_{i=1}^k B_i^{(e)} d_i^{(e)}, \quad (3a)$$

单元虚应变向量为:

$$\delta \varepsilon^{(e)} = \sum_{i=1}^k B_i^{(e)} \delta d_i^{(e)}, \quad (3b)$$

其中 $B_i^{(e)}$ 为单元应变矩阵.

单元应力向量为:

$$\sigma^{(e)} = D^{(e)} \varepsilon^{(e)}, \quad (4)$$

式中 $D^{(e)}$ 为单元弹性矩阵, 或称为单元本构矩阵.

将 (3) 与 (4) 式代入(1)式的第一项, 得到:

$$\sum_i^k K_{ii}^{(e)} d_i^{(e)} = \int_{Q^{(e)}} [B_i^{(e)}]^T D^{(e)} \left(\sum_{i=1}^k B_i^{(e)} d_i^{(e)} \right) dQ, \quad (5)$$

其中 $Q^{(e)}$ 为单元体积. 单元节点位移向量 $d_i^{(e)}$, 对于不同类型问题, 有不同的表达式.

对于平面问题:

$$d_i^{(e)} = [u_i^{(e)}, v_i^{(e)}]^T. \quad (6a)$$

对于轴对称问题:

$$d_i^{(e)} = [u_i^{(e)}, w_i^{(e)}]^T. \quad (6b)$$

对于三维问题:

$$d_i^{(e)} = [u_i^{(e)}, v_i^{(e)}, w_i^{(e)}]^T. \quad (6c)$$

单元应变矩阵 $B_i^{(e)}$ 的表达式为:

对于平面应变或平面应力问题:

$$B_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \right)^{(e)}, & 0 \\ 0, & \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \right)^{(e)} \\ \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \right)^{(e)}, & \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \right)^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (7a)$$

对于轴对称问题:

$$B_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_i}{\partial r}\right)^{(e)}, & 0 \\ \left(\frac{N_i}{r}\right)^{(e)}, & 0 \\ 0, & \left(\frac{\partial N_i}{\partial z}\right)^{(e)} \\ \left(\frac{\partial N_i}{\partial z}\right)^{(e)}, & \left(\frac{\partial N_i}{\partial r}\right)^{(e)} \end{bmatrix} \quad (7b)$$

对于三维问题:

$$B_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^{(e)}, & 0, & 0 \\ 0, & \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^{(e)}, & 0 \\ 0, & 0, & \left(\frac{\partial N_i}{\partial z}\right)^{(e)} \\ 0, & \left(\frac{\partial N_i}{\partial z}\right)^{(e)}, & \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^{(e)} \\ \left(\frac{\partial N_i}{\partial z}\right)^{(e)}, & 0, & \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^{(e)} \\ \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^{(e)}, & \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^{(e)}, & 0 \end{bmatrix} \quad (7c)$$

单元体积的微分 $dQ^{(e)}$ 的表达式为:

对于平面应力问题:

$$dQ^{(e)} = t \det J d\xi d\eta, \quad (8a)$$

其中 t 为厚度。对于平面应变问题:

$$dQ^{(e)} = \det J d\xi d\eta. \quad (8b)$$

对于轴对称问题:

$$dQ^{(e)} = 2\pi r \det J d\xi d\eta, \quad (8c)$$

其中 r 为半径。对于三维问题:

$$dQ^{(e)} = \det J d\xi d\eta d\zeta, \quad (8d)$$

其中 ξ, η 与 ζ 为等参坐标变换的局部坐标。 $\det J$ 为雅谷比行列式, 雅谷比矩阵的表达式为:

对于平面问题:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}, \quad (9a)$$

对于轴对称问题:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{vmatrix}, \quad (9b)$$

对于三维问题:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}. \quad (9c)$$

等参元的坐标变换式与(2)式中的位移插值公式具有相同的形式函数 $N_i^{(e)}$.

对于平面问题:

$$\begin{bmatrix} x^{(e)} \\ y^{(e)} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & N_i^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^{(e)} \\ y_i^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (10a)$$

对于轴对称问题:

$$\begin{bmatrix} r^{(e)} \\ z^{(e)} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & N_i^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i^{(e)} \\ z_i^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (10b)$$

对于三维问题:

$$\begin{bmatrix} x^{(e)} \\ y^{(e)} \\ z^{(e)} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & N_i^{(e)} \end{bmatrix}. \quad (10c)$$

2. 非均匀元素矩阵

构造非均匀元素刚度矩阵与应力矩阵的理论基础是能量等效原则与复合材料混合律。形成非均匀元素的方法是,在对研究对象进行有限元分割时,将增强材料安置在通过一系列 Gauss 点的线上。于是,这些 Gauss 点上的材料就具有增强材料的性质,而其他点的材料则具有基体的材料性质。在总体上,这个元素的材料性质必须满足复合材料混合律。

$$D_e = D_f V_f + D_m (1 - V_f), \quad (11)$$

其中 D_e 为常规均匀元素的等效本构矩阵, D_f 与 D_m 分别为增强材料与基体材料的本构矩阵, V_f 为增强材料的体积百分数。

下边据能量等效原则与均匀应变假设推导非均匀元素的本构矩阵 $D_H^{(e)}$ 。

将公式(5)右端的 $D^{(e)}$ 矩阵分别用均匀元素本构矩阵 D_e 与非均匀元素本构矩阵 $D_H^{(e)}$ ($= \alpha_{pq} D(p, q)$) 代替,进行 Gauss 积分,并令二者相等,于是得到。

对于平面应力问题:

$$\begin{aligned} & \sum_p^n \sum_q^n \alpha_{pq} D(p, q) t(p, q) \det J(p, q) W(p) W(q) \\ &= \sum_p^n \sum_q^n D_e t(p, q) \det J(p, q) W(p) W(q), \end{aligned} \quad (12a)$$

其中 p, q 为 Gauss 点号码, n 为 Gauss 点数, $W(p)$ 与 $W(q)$ 为 Gauss 积分权函数, $t(p, q)$ 为 Gauss 点 (p, q) 处的厚度. 对于平面应变问题:

$$\begin{aligned} & \sum_p^n \sum_q^n \alpha_{p,q} D(p, q) \det J(p, q) W(p) W(q) \\ &= \sum_p^n \sum_q^n D_c \det J(p, q) W(p) W(q). \end{aligned} \quad (12b)$$

对于轴对称问题:

$$\begin{aligned} & \sum_p^n \sum_q^n \alpha_{p,q} D(p, q) r(p, q) \det J(p, q) W(p) W(q) \\ &= \sum_p^n \sum_q^n D_c r(p, q) \det J(p, q) W(p) W(q), \end{aligned} \quad (12c)$$

其中 $r(p, q)$ 为 Gauss 点 (p, q) 的径向坐标. 对于三维问题:

$$\begin{aligned} & \sum_p^n \sum_q^n \sum_s^n \alpha_{p,q,s} D(p, q, s) \det J(p, q, s) W(p) W(q) W(s) \\ &= \sum_p^n \sum_q^n \sum_s^n D_c \det J(p, q, s) W(p) W(q) W(s). \end{aligned} \quad (12d)$$

公式(12)中的 $D(p, q)$ 与 $D(p, q, s)$ 是 Gauss 点的函数, 不同 Gauss 点有不同的值. 这样就使元素非均匀化了. 为了使这个非均匀元素的材料性质满足混合律(11)式, 必须对各 Gauss 点的权函数进行修改. 这就是附加本构因子 $\alpha_{p,q}$ 与 $\alpha_{p,q,s}$ 起的作用.

将(11)式代入(12)式, 可以得到上述四类问题的各 Gauss 点上的附加本构因子 $\alpha_{p,q}$ 与 $\alpha_{p,q,s}$. 对于平面应变问题与三维问题, $\alpha_{p,q}$ 与 $\alpha_{p,q,s}$ 仅依赖于 Gauss 点的位置与 V_j ; 对平面应力问题, $\alpha_{p,q}$ 还依赖于不同 Gauss 点的厚度 $t(p, q)$; 对轴对称问题, $\alpha_{p,q}$ 除依赖于 V_j 与 Gauss 点位置外, 还依赖于 Gauss 点的径向坐标 $r(p, q)$.

于是, 我们得到了满足复合材料混合律的非均匀元素的本构矩阵. 对于平面问题与轴对称问题:

$$D_{ii}^{(e)} = \alpha_{p,q} D(p, q), \quad (13a)$$

对于三维问题:

$$D_{ii}^{(e)} = \alpha_{p,q,s} D(p, q, s). \quad (13b)$$

由公式(5), 非均匀元素刚度矩阵 K_{ii} 的计算公式为:

$$K_{ii}^{(e)} = \int_{\rho^{(e)}} [B_i^{(e)}]^T D_{ii}^{(e)} [B_i^{(e)}] d\Omega, \quad (14)$$

非均匀元素应力向量的计算公式为:

$$\sigma^{(e)} = D_{ii}^{(e)} \left(\sum_{j=1}^k B_j^{(e)} d_j^{(e)} \right). \quad (15)$$

三、截锥状复合材料合成纤维绳索端头的应力分析

合成纤维绳索接头与固定端往往是最薄弱的环节. 为了充分发挥绳索的承载能力, 必须

解决绳索的固定问题^[3,4]。为此,我们在实验室研制了用树脂加固的锥状绳索端头^[5],即把绳索的纤维束打散成刷子状,然后浸入树脂,固化成截锥状头部。作为非均匀元素的应用例子,用上节推导的轴对称非均匀元素计算了应力分布,比较了均匀模型与非均匀模型的计算结果。

1. 材料模型

1) **基体材料** 基体材料是聚酯树脂。为增加其刚性,在里边掺入少量短玻璃纤维。它具有各向同性材料性质。其本构矩阵为:

$$[D_0] = d_0 \begin{bmatrix} d_{11}, & d_{12}, & d_{13}, & 0 \\ & d_{22}, & d_{23}, & 0 \\ & & d_{33}, & 0 \\ \text{对称} & & & d_{44} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} d_0 &= E/[(1+\nu)(1-2\nu)] \\ d_{11} &= d_{22} = d_{33} = 1 - \nu \\ d_{12} &= d_{13} = d_{23} = \nu \\ d_{44} &= (1 - 2\nu)/2. \end{aligned} \quad (17)$$

根据实验结果,取 $E = 7.0\text{GPa}$, $\nu = 0.34$ 。

2) **绳索纤维束材料模型** 绳索纤维束是横观各向同性材料,其轴向模量比横向模量大得多,并且比基体材料模量大得多。其本构矩阵为:

$$[Q] = Q_0 \begin{bmatrix} Q_{11}, & Q_{12}, & Q_{13}, & 0 \\ & Q_{22}, & Q_{23}, & 0 \\ & & Q_{33}, & 0 \\ \text{对称} & & & Q_{44} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} Q_0 &= E_r/\{(1+\nu_{r\theta})[1-\nu_{r\theta}-2\nu_{zr}^2(E_r/E_z)]\}, \\ Q_{11} &= 1-\nu_{zr}^2(E_r/E_z), \\ Q_{12} &= \nu_{r\theta}+\nu_{zr}^2(E_r/E_z), \\ Q_{13} &= \nu_{zr}(1+\nu_{r\theta}), \\ Q_{22} &= Q_{11}, \\ Q_{23} &= Q_{13}, \\ Q_{33} &= (1-\nu_{r\theta}^2)(E_z/E_r), \\ Q_{44} &= (G_{rz}/E_r)(1+\nu_{r\theta})[1-\nu_{r\theta}-2\nu_{zr}^2(E_r/E_z)], \end{aligned} \quad (19)$$

其材料常数为: $E_r = 7.0\text{GPa}$, $E_z = 70.0\text{GPa}$, $\nu_{rz} = 0.034$, $G_{rz} = 2.61\text{GPa}$, $\nu_{zr} = \nu_{r\theta} = 0.34$ 。整个复合材料截锥体的纤维束的体积百分数的平均值约为 $V_f = 15\%$ 。

纤维束方向与圆锥轴线方向不一致。二者之间夹角由圆锥角 α 与螺旋角 θ 组成。通过如下两个坐标变换可以将局部坐标下的本构矩阵式(18)转换到整体坐标上。

$$[Q_1] = [T_\theta]^T [Q] [T_\theta], \quad (20)$$

$$[Q_2] = [T_\alpha]^T [Q_1] [T_\alpha], \quad (21)$$

其中

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \cos^2\theta, & \sin^2\theta, & -\sin\theta\cos\theta \\ 0, & \sin^2\theta, & \cos^2\theta, & \sin\theta\cos\theta \\ 0, & 2\sin\theta\cos\theta, & -2\sin\theta\cos\theta, & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$[T_\alpha] = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha, & 0, & \sin^2\alpha, & -\sin\alpha\cos\alpha \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ \sin^2\alpha, & 0, & \cos^2\alpha, & \sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha, & 0, & -2\sin\alpha\cos\alpha, & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{bmatrix}. \quad (23)$$

在本文的计算中,取螺旋角 $\theta = 0$.

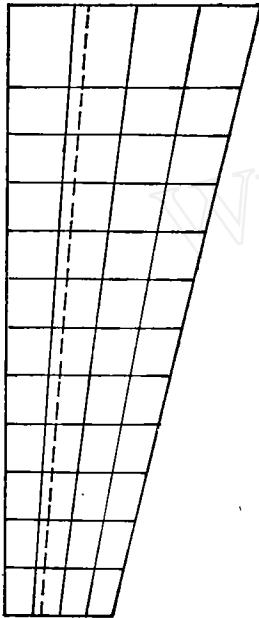


图1 有限元网格

2. 有限元网格

采用八节点四边形等参元素. 图1是复合材料截锥体的有限元网格,小头直径为38mm,大头直径为90mm,长度为127mm. 假定纤维束位于靠近轴线的第二列元素之中,通过自然坐标为 $\xi = -0.7746$ 的 Gauss 点,采用 3×3 Gauss 积分.

边界条件分为位移边界条件与载荷边界条件两部分. 位移边界条件是对如下三种固定情况进行了计算:

- a. 截锥体的大头侧边缘固定,
- b. 截锥体的小头侧边缘固定,
- c. 截锥体的整个锥面固定.

加载条件是,为模拟绳索加载,假定均匀分布的拉应力作用在小头靠中心的两圈元素上,总载荷为 1.455kN.

3. 计算结果与讨论

a. 对有纤维束与无纤维束两种情况的应力进行了计算. 图2,3与4分别为三种固定条件下,无纤维束存在的截锥体内的应力分布曲线. 应力值是靠轴线第二列元素的元素平均应力. 图5,6与7为三种固定条件下有纤维束存在时的应力分布曲线. 纤维束位于靠轴线第二列元素中. 对纤维束上应力与单元平均应力作了对比. 应该指出,纤维束上的应力为 Gauss 点B(请看图8)的应力值. 图2到图7中的横坐标是从锥体小头端起的轴向距离;纵坐标为应力值.

可以看出,对于所有情况,小头的应力值均比大头的应力值大得多. 对比三种固定情况的曲线,大头固定时,轴向应力 σ_z 的变化梯度比其他两种固定条件下的 σ_z 梯度小得多. 关于纤维束上的应力与单元平均应力的对比,从图5到图7可以看出,纤维束上的应力 σ_z 比单元平均应力值大很多,这是因为我们假定纤维束的纵向模量 E_z 为基体模量的10倍. 而比较它们的剪应力 τ_{rz} 时,发现二者差别很小. 这是由于两种组份材料的剪切模量 G_{rz} 有相同的值的缘故.

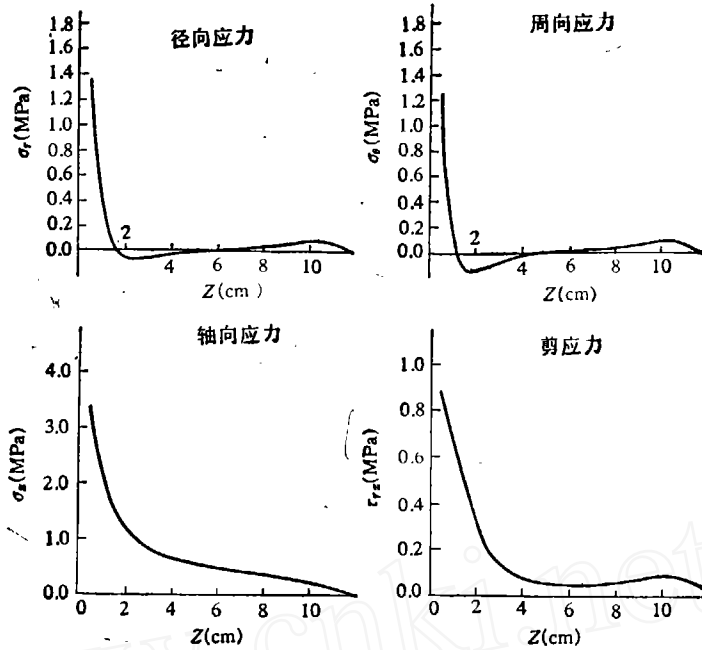


图 2 无纤维束端头应力分布(大头固定)

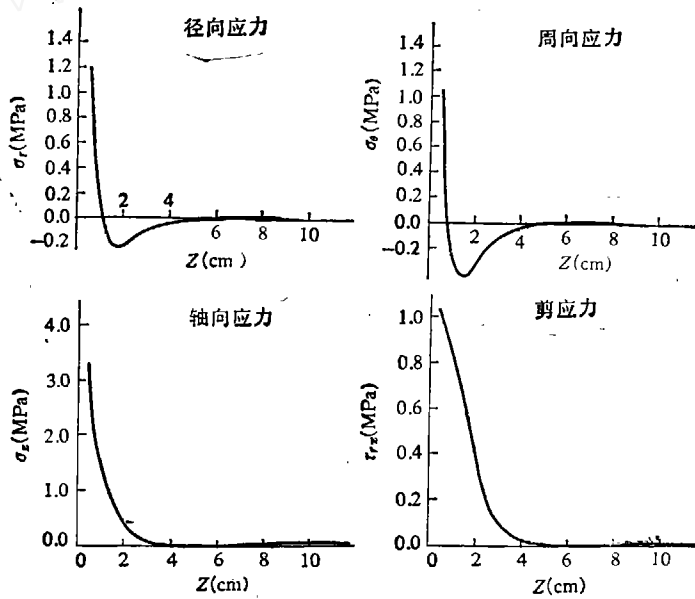


图 3 无纤维束端头应力分布(小头固定)

b. 为研究纤维束所处的位置 $r(p, q)$ 对应力分布的影响, 也计算了纤维束处于靠轴线的第 1 列与第 3 列元素中, 自然坐标为 $\xi = -0.7746$ 时的应力值。将结果列于表 1。应该说明, 在这三种情况下, 各元素内的纤维体积百分数 V_f 均为 $V_f = 15\%$ 。

由表 1 可见, 当纤维束非常靠近轴线时, 即它处于第 1 列元素中时, σ_z 的计算值比它远离

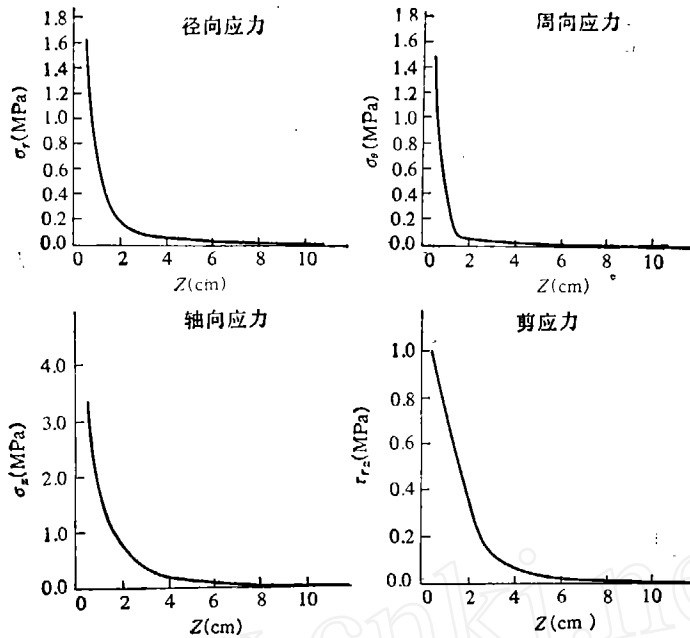


图4 无纤维束端头应力分布(锥面固定)

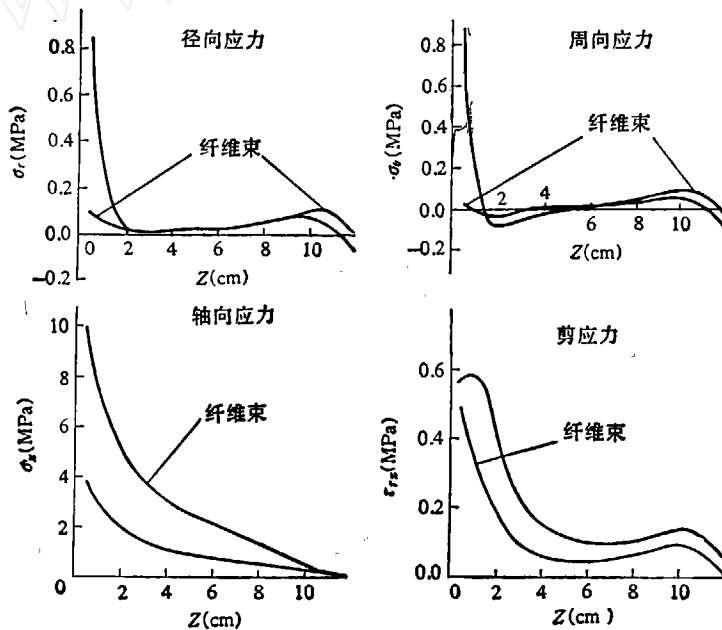


图5 有纤维束端头应力分布(大头固定)

轴线时的结果大很多。其原因有：(1) 因为均布外力分布在小头端面靠轴线的两圈元素上；(2) 根据轴对称有限元的特点，当 V_i 一定时，为满足混合律(11)，纤维束愈靠近轴线，它的附加加权因子 α_{pq} 值愈大，它对非均匀本构矩阵 $D_H^{(p)}$ 的贡献愈大；反之亦然。

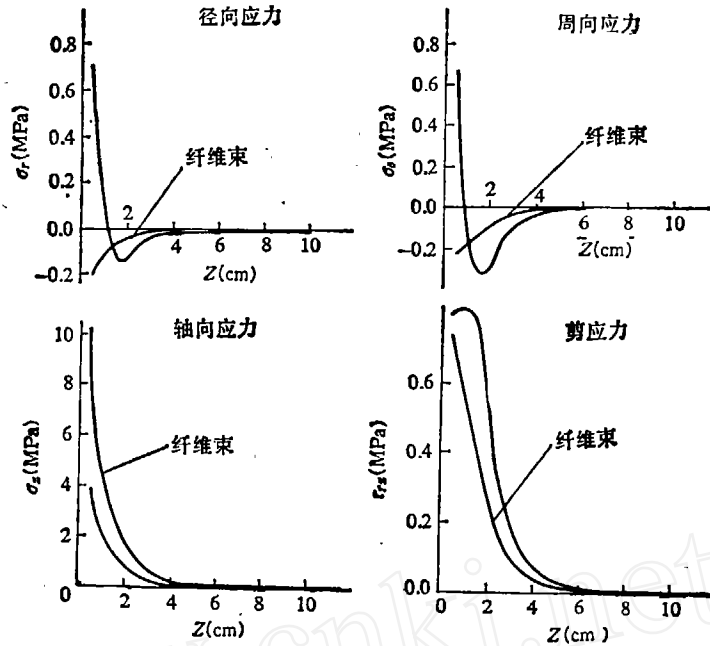


图 6 有纤维束端头应力分布(小头固定)

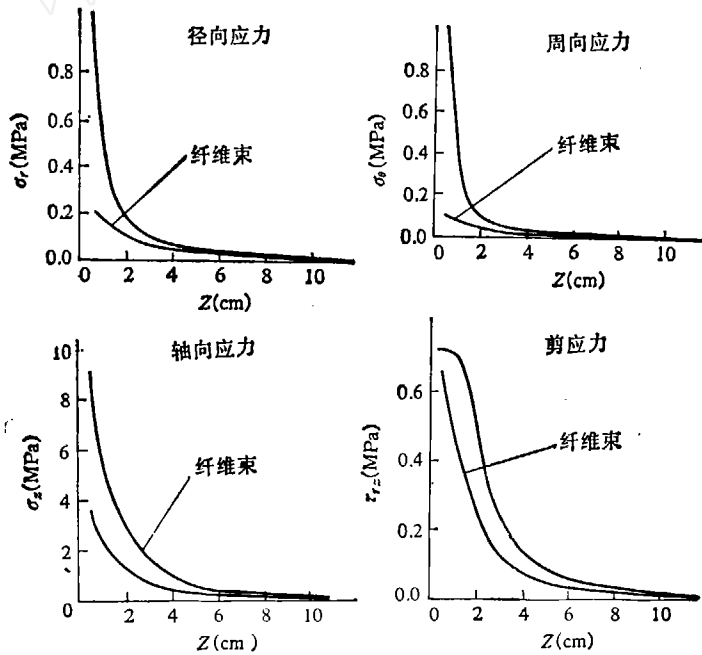


图 7 有纤维束端头应力分布(锥面固定)

c. 为研究复合材料端头形状对应力分布的影响, 计算了长端头情况, 即把截锥状体的长度加大一倍, 其他尺寸不变. 由于长短两种情况的 Gauss 点的相对位置发生改变, 对应力最大单元五个应力点的应力值列表进行了对比. 表 2 中的应力值为非均匀模型, 纤维束处于

表 1 复合材料端头中应力计算值

材料模型 与 纤维束位置	边界固定条件		大头固定	小头固定	整个锥面固定
	应力值 MPa				
无纤维束 第 2 列单元应力	σ_z	单元平均应力	3.32	3.19	3.61
	τ_{rz}	单元平均应力	0.88	1.03	0.71
非均匀模型 纤维束位于 第 1 列单元 中的应力	σ_z	纤维束应力	37.44	34.12	32.87
		单元平均应力	8.21	7.84	7.60
	τ_{rz}	纤维束应力	-1.62	-0.93	-0.59
		单元平均应力	-1.28	-1.05	-0.99
非均匀模型 纤维束位于 第 2 列单元 中的应力	σ_z	纤维束应力	9.81	8.94	8.53
		单元平均应力	3.79	3.59	3.61
	τ_{rz}	纤维束应力	0.49	0.73	0.65
		单元平均应力	0.55	0.76	0.71
非均匀模型 纤维束位于 第 3 列单元 中的应力	σ_z	纤维束应力	3.06	1.83	1.65
		单元平均应力	1.08	0.57	0.81
	τ_{rz}	纤维束应力	0.70	1.02	0.87
		单元平均应力	0.69	1.03	0.91

表 2 长短两种端头纤维束应力的比较

应力点	应力值 MPa	大头固定		小头固定		整个锥面固定	
		短	长	短	长	短	长
A	σ_z	9.91	7.98	8.89	4.40	8.54	4.75
	τ_{rz}	0.58	0.28	0.86	0.53	0.75	0.43
B	σ_z	9.81	8.24	8.94	4.96	8.53	5.29
	τ_{rz}	0.49	0.23	0.74	0.50	0.65	0.39
C	σ_z	9.87	9.48	9.40	7.54	9.00	7.54
	τ_{rz}	0.06	0.02	0.20	0.27	0.20	0.20
D	σ_z	10.55	11.31	10.70	11.15	10.23	10.43
	τ_{rz}	-0.52	-0.24	-0.50	-0.08	-0.42	-0.04
E	σ_z	10.86	11.95	11.24	12.40	10.73	11.39
	τ_{rz}	-0.72	-0.32	-0.73	-0.21	-0.64	-0.12

第 2 列元素内, 纤维束上的应力值. 图 8 表示了这些点的位置. 表 1 与图 5 到图 7 中的纤维束应力均为 Gauss 点 B 的应力值.

由表 2 看出, 三种固定条件下, 长端头中的 A, B 与 C 三点的 σ_z 应力值都小于短端头的结果, 而 D 与 E 两点的 σ_z 值却情况相反. 另外, 加长端头后 σ_z 的最大值反而提高, 对强度不利.

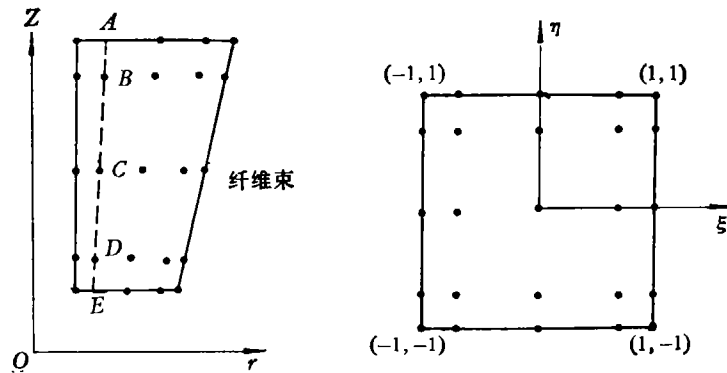


图8 纤维束与 Gauss 点位置

四、结 论

1. 本文提出了非均匀有限元的概念。从虚功原理出发, 采用均匀应变假设, 推导了四种情况的非均匀元素刚度矩阵与应力矩阵计算公式。这个元素不仅符合能量等效原则, 也满足复合材料混合律。对计算稀疏增强复合材料的应力分布十分有效。比传统均匀元素的计算结果精确得多。对平面应力问题, 此种元素还可以计算厚度不均匀性问题。例如稀加筋板属于这类情况。

2. 作为非均匀元素的应用特例, 计算了截锥形复合材料绳索端头的应力分布。计算曲线充分显示这种非均匀元素的优越性。

参 考 文 献

- [1] Owen, D. R. J. and Hinton, E., *Finite Elements in Plasticity, Theory and Practice*, Pineridge Press Limited, Swansea, U. K., 1980, 180.
- [2] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, 3rd ed. McGraw-Hill Book Company Limited, U. K., 1977, 156—157.
- [3] Halsey, N., *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 100(1974), No. EM4, Proc. Paper 10715, 673—685.
- [4] Mitchell, R. A., Wooley, R. M. and Halsey, N., *ibid.*, 100(1974), No. EM4, Proc. Paper 10716, 687—706.
- [5] Zang, S. and Leech, C. M., *Engineering Computations, U. K.*, 2(1985), 1: 55—62.