

金属液滴冷凝时间的估算

陈 乐 山

(中国科学院力学研究所)

摘要

本文对熔融金属雾化制取球形金属粉末所需的冷凝时间作了解析分析，纠正了文献(1)的错误，就相当一类工况得出了简捷的估算公式。对使用该公式时所需的换热系数 \bar{H} 的值，文中给出了理论估算方法（吸取了近年来对存在大温差时传热现象的研究结果）；最后，对本文所荐算法的局限性及可能的应用场合作了讨论。

一、前 言

从熔融合金雾化制取合金粉末的过程也是对液态合金进行淬火处理的过程，它可以得到传统热处理工艺（只处理固态合金）所达不到的组织结构和性能，为制备具有优异特性的新材料开辟了一条重要途径^[1,2]。上述过程中的一项关键措施是快速凝固（冷却），因此，如何估算金属液滴的冷凝时间是很有意义的。

在等离子体（主要是喷涂）领域工作的人们，已经提出了大致合适的数学模型并发展出一套日趋成熟的数值计算技术，以估算单个球形颗粒在等离子体中的换热率（其特点是由于存在大温差，物性参数变化剧烈，简单地取算术平均值的常规方法已不再适用）及飞行轨迹，颗粒可以经历从熔化直到蒸发的相变^[3,4]，因此估算冷凝时间的方法可以说原则上已初步解决。但数值计算总免不了要化计算费；更主要的是单个的、具体的数值计算结果若不辅以适当的解析分析，往往难以推广到不同工况，这对从事研究与发展工作的设计人员是不方便的，因而解析分析是与数值计算相互补充的。文献1的工作反映了这方面的努力，但该文误把直角坐标下的传热方程用到了球形液滴的情况，致使对冷凝时间的估算偏大了两倍；本文改正了这一失误，并补充了对换热系数 \bar{H} 的理论估算方法，得出了简捷的估算冷凝时间的公式，并对公式的应用场合与局限性作了讨论。

二、数学模型、方程及定解条件^[3,4]

模型与方程：

假设熔融金属雾化粉碎后产生的液滴为球形，它处于均一的熔点温度 T_m 、并浸没在与

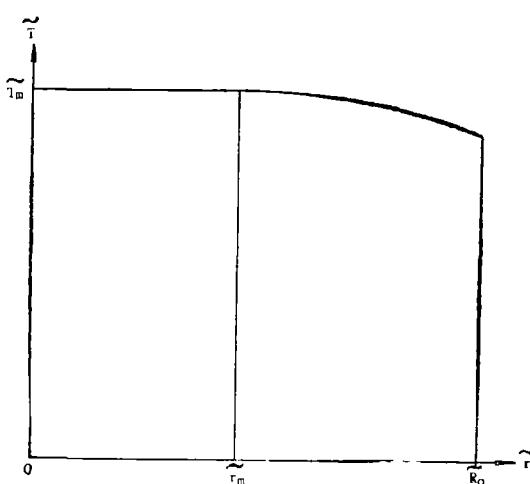


图 1

定解条件：

$$\text{初始条件} \quad \text{当 } t̂ = 0 \text{ 时, } T̂(r̂, 0) = T̂_m \quad (2)$$

$$\text{边界条件} \quad \text{在 } r̂ = R̂_o \text{ 处, } -K̂_s \cdot \frac{\partial T̂_s}{\partial r̂} = H(T̂_s - T̂_{\infty}) \quad (3)$$

$$\text{在 } r̂ = r̂_m \text{ 处, } T̂_s = T̂_m \quad (4)$$

$$\text{在 } r̂ \rightarrow 0 \text{ 时, } T̂_s \text{ 应为有限值} \quad (5)$$

在液—固分界面上的衔接条件（用以确定界面的推进速度）

$$\frac{dr̂_m}{dt̂} = \frac{1}{\rho \cdot \lambda} \left[K̂_s \cdot \frac{\partial T̂_s}{\partial r̂} - K̂_l \cdot \frac{\partial T̂_l}{\partial r̂} \right] \quad (6)$$

事实上，热传导系数 K_s 、热扩散系数 α_s 都随温度而变，在某些温度范围内，变化还很剧烈。热传导方程能写成 (1) 的形式就已经暗中假定了 K_s 不随 T_s 而变化；纵使这样，方程 (1) 仍是非线性的，通常无法得到解析解。但由于本节只限于求金属液滴从均一的熔点温度（即过热温度假设为零）演变到完全凝固 ($r_m = 0$) 所需的时间，又由于金属的热传导系数通常远大于气体的，而考虑的液滴直径又暂限在 100 微米左右或更小，因而液滴上不同半径处温度的实际差别通常不大，把 K_s, α_s 视作常数（以上及以后的做法均隐含着这一假定）所引起的误差当不会大。

三、求解

为使解案有通用性，先把有关物理量无因次化。为此，选 \tilde{T}_m 作为温度的特征尺度， \tilde{R}_o 选为距离的特征尺度， \tilde{R}_o^2 / α_s 选为时间的特征尺度。于是 $\tilde{T}_s = \tilde{T}_m \cdot T_s$ ， $\tilde{r} = \tilde{R}_o \cdot r$ ， $\tilde{t} = (\tilde{R}_o^2 / \alpha_s) \cdot t$ ，其中 T_s, r, t 分别代表无因次化后的温度、半径与时间，这样 (1)–(6) 式

之相对静止的气体中（即略去对流传热），若再略去辐射损失，于是球形金属液滴的温度分布可分为两个区（见图 1），在 $r = 0$ 到 $r = r_m$ 的区域，温度 $\tilde{T} = \tilde{T}_m$ = 已知值；而在区间 $[r_m, \tilde{R}_o]$ 内， $\tilde{T} = \tilde{T}_s(r, t)$ 。
 \tilde{T}_s 应满足下列球坐标中的热传导方程：

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \alpha_s \cdot \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) \right] \quad (1)$$

r_m 代表作为液相与固相分界球面的半径，当 $t = 0$ 时， $r_m = \tilde{R}_o$ ；而当 $r_m = 0$ 时，液滴完全凝固。

就分别化为下列相应的无因次形式:

$$\text{当 } r_m \leq r \leq 1 \text{ 时, } \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \cdot \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) \right] \quad (1')$$

$$\text{当 } t = 0 \text{ 时, } T_s = 1 \quad (2')$$

$$\text{在 } r = 1 \text{ 处, } T_s + \frac{\tilde{K}_s}{H \cdot R_0} \cdot \frac{\partial T_s}{\partial r} = T_\infty \quad (3')$$

$$\text{在 } r = r_m \text{ 处, } T_s = 1 \quad (4')$$

$$\text{在 } r \rightarrow 0 \text{ 时, } T_s \text{ 应为有限值} \quad (5')$$

$$\text{在 } r = r_m \text{ 处, } \frac{dr_m}{dt} = A \frac{\partial T_s}{\partial r} \quad (6')$$

其中 $A = \tilde{K}_s \tilde{T}_m / (\tilde{\rho}_s \cdot \lambda \cdot \alpha_s) = \tilde{C}_s \cdot \tilde{T}_m / \tilde{\lambda}$, 是由金属物性决定的无因次数。

现用文献[5]第十章的分离变数法解方程, (1')—(5'), 为此:

1. 必须先将边界条件 (3') 及 (4') 化为齐次的。

$$\text{若让 } T_s(r, t) = V_s(r, t) + W_s(r, t) \quad (7)$$

$$\text{并令其中的 } V_s = 1 - \frac{(1 - T_\infty)(1 - r_m/r)}{1 + r_m \left(\frac{\tilde{K}_s}{H \cdot R_0} - 1 \right)} \quad (8)$$

则不难用直接代入法证明

$$\text{当 } r = r_m \text{ 时, } V_s = 1,$$

$$\text{当 } r = 1 \text{ 时, } V_s + \frac{\tilde{K}_s}{H \cdot R_0} \cdot \frac{\partial V_s}{\partial r} = T_\infty.$$

于是 $W_s(r, t)$ 就不仅满足齐次边界条件, 而且它相应的泛定方程也仍是齐次的。即

$$\text{当 } r_m \leq r \leq 1 \text{ 时, } \frac{\partial W_s}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial W_s}{\partial r} \right) \right] \quad (1'')$$

$$\text{当 } t = 0 \text{ 时, } W_s(r, 0) = \frac{(1 - T_\infty)(1 - r_m/r)}{1 + r_m \left(\frac{\tilde{K}_s}{H \cdot R_0} - 1 \right)} \quad (2'')$$

$$\text{在 } r = 1 \text{ 处, } W_s + \frac{\tilde{K}_s}{H \cdot R_0} \cdot \frac{\partial W_s}{\partial r} = 0 \quad (3'')$$

$$\text{在 } r = r_m \text{ 处, } W_s = 0 \quad (4'')$$

$$\text{当 } r \rightarrow 0 \text{ 时, } W_s \text{ 应为有限值} \quad (5'')$$

$$\text{以及 } \frac{dr_m}{dt} = A \left[\frac{1 - T_\infty}{r_m \left(\frac{\tilde{K}_s}{H \cdot R_0} - 1 \right) + 1} - \left(\frac{1}{r_m} \right) + \frac{\partial W_s}{\partial r} \Big|_{r=r_m} \right] \quad (6'')$$

2. 由泛定方程(1'')找出本征函数族

$$\text{令 } W_s(r, t) = R_s(r) \cdot U_s(t) \quad (9)$$

将(9)代入(1''),得到两个常微分方程,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{U_s} \frac{dU_s}{dt} = -\beta^2 \\ \frac{d^2 R_s}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_s}{dr} + \beta^2 R_s = 0 \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_s = f \cdot e^{-\beta^2 t} \\ R_s = \frac{1}{r} \cdot \sin \beta (r - r_m) \end{array} \right. \quad (11)$$

其中 β 是实数,是由边界条件确定的本征值。方程(10)及(11)的解分别是

$$\left\{ \begin{array}{l} U_s = f \cdot e^{-\beta^2 t} \\ R_s = \frac{1}{r} \cdot \sin \beta (r - r_m) \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_s = f \cdot e^{-\beta^2 t} \\ R_s = \frac{1}{r} \cdot \sin \beta (r - r_m) \end{array} \right. \quad (13)$$

将(11)的解写成(13)的形式,是为了能同时满足(4'')及(5'')式的要求。

3. 由齐次边界条件(3'')定本征值 β 。

将(12)、(13)、(9)式代入(3'')式,得

$$\begin{aligned} \sin \beta (1 - r_m) \frac{\tilde{K}_s}{\tilde{H} \cdot \tilde{R}_o} & \left[\beta \cdot \cos \beta (1 - r_m) - \sin \beta (1 - r_m) \right] = 0, \\ \therefore \tan \beta (1 - r_m) &= \frac{\beta}{1 - \frac{\tilde{H} \cdot \tilde{R}_o}{\tilde{K}_s}}. \end{aligned} \quad (14)$$

其中, $(1 - r_m)$, \tilde{K}_s , $\tilde{H} \cdot \tilde{R}_o$ 都是已知数,只有 β 是待定的,而正切函数是周期为 π 的多值函数,于是从方程(14)中可求出无限多个根(本征值): $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \dots$,因而 $W_s(r, t)$ 可写为

$$W_s(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 t} \cdot \frac{f_n}{r} \sin \beta_n (r - r_m) \quad (15)$$

4. 由初始条件(2'')定广义傅氏级数的系数 f_n ,由(2'')式有:

$$\frac{(1 - T_\infty)(1 - r_m/r)}{r \left(\frac{\tilde{K}_s}{\tilde{H} \cdot \tilde{R}_o} - 1 \right) + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot \frac{f_n}{r} \sin \beta_n (r - r_m) \quad (16)$$

由文献[5]329页的(43,12)式可确定 f_n

$$f_n = \frac{1 - T_\infty}{r_m \left(\frac{\tilde{K}_s}{\tilde{H} \cdot \tilde{R}_o} - 1 \right) + 1} \cdot \frac{\int_{r_m}^1 \left(1 - \frac{r_m}{r} \right) \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \sin \beta_n (r - r_m) \right) \cdot r^2 dr}{\int_{r_m}^1 r^2 \cdot \left(\frac{1}{r^2} \cdot \sin^2 \beta_n (r - r_m) \right) dr} =$$

$$= \frac{1 - T_{\infty}}{r_m \left(\frac{\bar{K}_s}{\bar{H} \cdot \bar{R}_o} - 1 \right) + 1} \cdot \frac{4}{\beta_n} \cdot \frac{\sin \varepsilon \beta_n - \varepsilon \beta_n \cos \varepsilon \beta_n}{2\varepsilon \beta_n - \sin 2\varepsilon \beta_n} \quad (17)$$

其中 $\varepsilon = 1 - r_m$, 是无因次的凝固层厚度。

5. 由(6")式确定固一液相分界面向球心的推进速度:

将(15)式代入(6"), 对 r 求偏导数后得:

$$\begin{aligned} \frac{dr_m}{dt} &= A \cdot \frac{1 - T_{\infty}}{r_m \left(\frac{\bar{K}_s}{\bar{H} \cdot \bar{R}_o} - 1 \right) + 1} \cdot \left[-\frac{1}{r_m} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 t} \cdot \frac{4}{\beta_n} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{\sin \varepsilon \beta_n - \varepsilon \beta_n \cos \varepsilon \beta_n}{2\varepsilon \beta_n - \sin 2\varepsilon \beta_n} \cdot \left(\frac{\beta_n \cdot 1}{r_m} - \frac{0}{r_m^2} \right) \right] \\ &= \frac{A(1 - T_{\infty})}{r_m^2 \left(\frac{\bar{K}_s}{\bar{H} \cdot \bar{R}_o} - 1 \right) + r_m} \cdot \left[-1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 t} \cdot \frac{4(\sin \varepsilon \beta_n - \varepsilon \beta_n \cos \varepsilon \beta_n)}{2\varepsilon \beta_n - \sin 2\varepsilon \beta_n} \right] \quad (18) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dt}{dr_m} = \frac{r_m^2 \left(\frac{\bar{K}_s}{\bar{H} \cdot \bar{R}_o} - 1 \right) + r_m}{A(1 - T_{\infty})} \cdot \left[-1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 t} \cdot \frac{4(\sin \varepsilon \beta_n - \varepsilon \beta_n \cos \varepsilon \beta_n)}{2\varepsilon \beta_n - \sin 2\varepsilon \beta_n} \right]^{-1} \quad (19)$$

6. 由(19)式确定冷凝时间

原则上说, 上式右端的 β_n, ε, t 都是 r_m 的已知函数; 对 r_m 从 1 到 0 积分, 即可得到金属液滴(球形)凝固所需的无因次时间 t 。倘我们暂时限于考虑直径为 100 微米左右或更小的金属液滴在气体介质中冷却的情况, 则通常 \bar{K}_s 远大于 $\bar{H} \cdot \bar{R}_o$, 于是(14)、(19)式可进一步简化。首先是(14)式可简化为

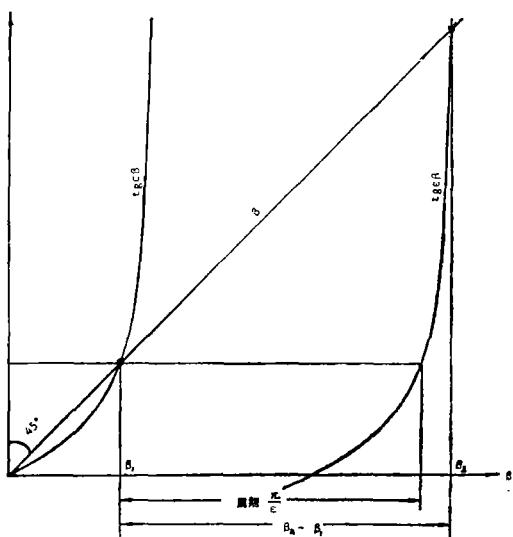


图 2

$$\operatorname{tg} \varepsilon \beta = \beta \quad (14'),$$

上式左端是 β 的周期函数, 周期为 $\frac{\pi}{\varepsilon}$ 。因而方程(14')两个相邻的根 β_n 与 β_{n+1} 之间的差不会小于 $\frac{\pi}{\varepsilon}$ (见图2), 所以(19)式右端级数

中后项与前项的比值不大于 $\exp(\beta_n^2 - \beta_{n+1}^2)$
 $\approx \exp \left[-\frac{\pi^2}{\varepsilon^2} - \frac{2\pi}{\varepsilon} \cdot \beta_n \right]$ 。纵使在 $n = 1$,

$\varepsilon = 1$ 时, 这个比值就已经很小了, 所以(19)式右方的级数在计算时只须取到第一项 $n = 1$ 就足够了。因而(19)式可简化为

$$\frac{dt}{dr_m} = - \frac{r_m^2 \left(\frac{\bar{K}_s}{\bar{H} \cdot \bar{R}_o} - 1 \right) + r_m}{A(1 - T_\infty)} \cdot \left[-1 + e^{-\beta_1^2 t} \cdot \frac{4(\sin \varepsilon \beta_1 - \varepsilon \beta_1 \cos \varepsilon \beta_1)}{2\varepsilon \beta_1 - \sin 2\varepsilon \beta_1} \right]^{-1} \quad (20)$$

$$\text{倘若再有 } \frac{\left(\frac{\bar{K}_s}{\bar{H} \cdot \bar{R}_o} - 1 \right)}{A(1 - T_\infty)} \gg 1 \quad (21)$$

成立则 $\beta_1^2 \cdot t$, 通常将是一个不小的数, 于是在实际数值计算中, $e^{-\beta_1^2 t} \cdot \frac{4(\sin \varepsilon \beta_1 - \varepsilon \beta_1 \cos \varepsilon \beta_1)}{2\varepsilon \beta_1 - \sin 2\varepsilon \beta_1} \approx 0$, (20) 式还可进一步简化为

$$\frac{dt}{dr_m} = - \frac{\left(\frac{\bar{K}_s}{\bar{H} \cdot \bar{R}_o} - 1 \right)}{A(1 - T_\infty)} r_m^2 - \frac{r_m}{A(1 - T_\infty)} \quad (22)$$

由起始($t = 0$)时 $r_m = 1$ 的条件, 不难由(22)式定出当 $r_m = 0$ (液滴完全凝固) 时所需无因次时间 t 的解析表达式

$$t = \frac{\bar{K}_s}{3A(1 - T_\infty)} \frac{1}{\bar{H} \cdot \bar{R}_o} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{\bar{H} \cdot \bar{R}_o}{\bar{K}_s} \right) \quad (23)$$

进而可写出有因次的冷凝时间

$$t = \frac{\bar{R}_o^2}{\alpha_s} \cdot t = \frac{\rho_s \cdot \lambda \cdot \bar{R}_o}{3 \bar{H} \cdot (\bar{T}_m - \bar{T}_\infty)} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{\bar{H} \cdot \bar{R}_o}{\bar{K}_s} \right) \quad (\text{秒}) \quad (24)$$

不难发现, 文献[1] 确定的冷凝时间比(24)式确定的大了两倍, 这是误用了直角坐标所致。

现以直径为 100 微米的纯铁液滴在氩气中的冷凝时间为例, 来说明(24)式的用法。由文献[4]可知:

$\bar{T}_m = 1810^\circ K$, $\rho_s = 7305 \text{ 公斤}/\text{米}^3$, $\lambda = 2.72 \times 10^5 \text{ 焦}/\text{公斤}$, $\bar{K}_s = 34.19 \text{ 瓦}/\text{米}\cdot{}^\circ K$, $\bar{C}_s = 711.3 \text{ 焦}/\text{公斤}\cdot{}^\circ K$, $\bar{T}_\infty = 300^\circ K$ 。至于换热系数 \bar{H} 的数值则取决于气体介质的类别及冷却的方式; 倘若不计对流及辐射散热 (以下将讨论在什么条件下允许这么做) 而只考虑传导的影响 (即假设金属液滴在与之相对静止的气体中冷却), 则由文献[3]有

$$N_u = 2.0 \quad , \quad (25)$$

$$\bar{H} = \frac{N_u \cdot \bar{K}_\text{气}}{2 \bar{R}_o} = \frac{\bar{K}_\text{气}}{\bar{R}_o} \quad (26)$$

$$\text{其中 } \bar{K}_\text{气} = \frac{1}{\bar{T}_s - \bar{T}_\infty} \int_{\bar{T}_\infty}^{\bar{T}_s} \bar{K}_\text{气} \cdot d\bar{T} \quad (27)$$

是在温度区间 $[\bar{T}_\infty, \bar{T}_s]$ 内气体的平均热导率。

将文献[4] 2256 页上氩气热导率随温度变化的公式代入(27)式, 有 $\bar{K}_\text{气} = 0.0437$

瓦/米·°K。于是 $\bar{K}_s \text{ 铁 } / \bar{H}_{\text{氩}} \cdot \bar{R}_o = \frac{34.19}{0.0437} = 782 \gg 1$ ，因此按 (14') 式来求本征值 β 是允许的。

接着再校核 (21) 式是否成立？为此先求出 $A = \frac{C_s \cdot \bar{T}_m}{\lambda} = \frac{711.3 \times 1810}{27200} \approx 4.73$ ，代入 (21) 式，确有 $(\frac{\bar{K}_s}{\bar{H} \cdot \bar{R}_o} - 1) / A \cdot (1 - T_\infty) = \frac{781}{4.73 \times 0.834} \approx 198 \gg 1$ 成立，所以可用简化的 (24) 式来求冷凝时间。

现将上述各参数的具体值代入 (24) 式，得

$$t = \frac{7305 \times 27200 \times (5 \times 10^{-5})^2}{3 \times 0.0437 (1810 - 300)} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{0.0437}{34.19} \right) = 2.51 \times 10^{-2} \text{ (秒)} \quad (28)$$

这就是说，直径为 100 微米的纯铁液滴（起始时刻从球面到球心均为 1810 °K）在与之相对静止的、300 °K 的氩气中冷却时，倘不计辐射散热的影响，则当球心也最后冷却为 1810 °K 的固态铁时，所需的冷凝时间为 0.025 秒。

四、几 点 讨 论

1. 不妨再从一个直观而相对粗糙的模型出发来考察冷凝时间 t ：一个半径为 \bar{R}_o 的金属球从液态冷凝为固态（仍处在同一熔点温度 \bar{T}_m 下）将释放出的熔解潜热为 $\frac{4\pi \bar{R}_o^3}{3} \cdot \rho \cdot \lambda$ ；而释出的这些潜热只能通过球面散走，球面上每单位面积每秒散走的热量为 $\bar{H}(\bar{T}_s - \bar{T}_\infty)$ ，由于金属的导热系数远大于气体的，而金属球往往又小，不妨粗糙地认为 $\bar{T}_s \approx \bar{T}_m$ ，于是有下式成立

$$\frac{4\pi \bar{R}_o^3}{3} \cdot \rho \cdot \lambda = 4\pi \bar{R}_o^2 \cdot t \cdot \bar{H} \cdot (\bar{T}_m - \bar{T}_\infty) ,$$

$$\therefore t = \frac{\rho \cdot \lambda \cdot \bar{R}_o}{3 \bar{H} (\bar{T}_m - \bar{T}_\infty)} \text{ (秒)} \quad (29)$$

基于粗糙模型估算的由 (29) 式表示的冷凝时间与 (24) 式的相对误差只有 $\frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{H} \cdot \bar{R}_o}{\bar{K}_s}$ 。所

以只要 $\frac{\bar{H} \cdot \bar{R}_o}{\bar{K}_s} \ll 1$ （这在冷却介质为气体而金属液滴又不太大的情况下通常总能成立），即使只

用一个十分简单、粗糙的模型来估算冷凝时间也已可初步满足工程要求的准确度，看来对这种情况，不必用计算机求数值解。

2. 金属液滴离开雾化器时的温度 \bar{T}_s 当比熔点温度 \bar{T}_m 高，这时，实际冷凝时间为两个过程所需时间之和：①由 \bar{T}_s 降至 \bar{T}_m （设所需时间为 t_1 ）；②由液相转为固相（所需时间前面已讨论过）。对过热温度 $(\bar{T}_s - \bar{T}_m)$ 不太大的情况（这发生在 $\frac{C_s(\bar{T}_s - \bar{T}_m)}{\lambda} \ll 1$ 时），实际冷

凝时间主要由液相转为固相的过程所需的时间来定，即由(24)式确定；反之， t_1 就不允许忽略。这时，作为粗估，设议不妨仿照导出(29)式的思路来估算 t_1

$$t_1 = \frac{\rho \cdot C \cdot (T_e - T_m) \cdot R_o}{3 H \cdot (T_m - T_\infty)} \quad (\text{秒}) \quad (30)$$

于是，有过热时的实际冷凝时间 =

$$= \frac{\rho \cdot \lambda \cdot R_o}{3 H \cdot (T_m - T_\infty)} \cdot \left(1 + \frac{C(T_e - T_m)}{\lambda} \right)$$

3. 迄今只考虑了纯热传导的情况，那么对流和辐射散热是否任何时候都可以忽略呢？

辐射散热——

$$\text{绝对黑体的辐射遵循斯蒂芬—波尔兹曼定律} \quad E = \sigma_o \cdot T^4 \quad (31)$$

其中 $\sigma_o = 5.67 \times 10^{-8} \text{ 瓦/米}^2 \cdot \text{度}^4$ ，称为绝对黑体的辐射常数， T 为绝对温度。金属液滴的辐射损失通常比同温度下绝对黑体的为小，所以由(31)式估算出的辐射散热只代表辐射散热的上限；如果连这个上限都小于传导散走的热，就有理由在初步估算时，忽略辐射散热的影响。

由 $\sigma_o \cdot T_m < H(T_m - T_\infty)$ 的条件，可知当 $T_m < \sqrt{\frac{K \cdot (1 - T_\infty)}{R_o \cdot \sigma_o}}$ 时，大致可忽略辐射

散热，这通常发生在金属熔点较低、金属液滴直径较小或冷却气体导热系数较高的情况。在本文的具体数例中，有： $\sqrt{\frac{0.0437 \times 0.834}{5 \times 10^{-5} \times 5.67 \times 10^{-8}}} = 2343 > 1810$ ，故辐射散热在初步估算中可

先不考虑。

对流散热——

当金属液滴与作为冷却介质的气体间有相对速度时，就存在对流散热的机制。球体对流散热的公式可按下式估算^[6-8]：

$$N_u = 2.0 + 0.515 R_e^{0.5} \quad (32)$$

其中努谢尔数 N_u 是以热传导势定义的 $N_u = \frac{v \cdot 2 R_o}{S_s - S_\infty}$ ， v 为热流密度， $S_s - S_\infty =$

$\int_{T_\infty}^{T_s} K_g dT$ ；雷诺数 $R_o = \text{相对速度} \times 2 R_o \times \text{气体密度}/\text{气体粘度}$ ，式中气体密度与粘度都是温

度的函数，须取从 T_∞ 到 T_s 的积分平均值，相对速度是指金属液滴与作为冷却介质的气体间相对运动的速度。

由(32)式可见，当相对速度 $\rightarrow 0$ 时， $R_o \rightarrow 0$ ， $N_u \rightarrow 2$ ，即退化为单纯热传导的情况。倘金属液滴在离开雾化器的瞬间、与冷却气体之间存在不小的相对速度，气体的粘性会阻止这种相对运动，在经历一段时间的阻尼后，气体与液滴间的相对速度就大致可以忽略不计。动量弛豫时间 τ 可以用来作为度量这段时间究竟有多长的定性的标尺^[7]，

$$\tau = \frac{\rho_s \cdot (2 R_o)^2}{18 \mu} \quad (\text{秒}) \quad (33)$$

τ 的物理意义是：在经过 1 个 τ 的时间后，相对速度降为初始值的 $\frac{1}{e^1}$ ；2 个 τ 后降为 $\frac{1}{e^2}$ ，…。

所以在经过 3τ 的时间后，相对速度只有初始值的 $\frac{1}{e^3} = 5\%$ 了，即 (32) 式中的 R_∞ 将降为初始值的 5%。

如果按初始相对速度估算的 R_∞ 本身就不大（例如 $R_\infty < 10$ ），而按纯传导估算的冷凝时间 t 又远大于动量弛豫时间 τ ，就有理由在估算冷凝时间（或平均冷却速度）时忽略对流散热的影响，这一情况在液滴半径 R_∞ 较小时更易发生（因为 $R_\infty \sim R_\infty$ ，而 $t / \tau \sim \frac{1}{R_\infty}$ ）。当初始雷诺数很大（例如用超声速气流雾化的情况⁽²⁾）而冷凝时间 t 又小于或接近于动量弛豫时间 τ 时，就应该计及对流的影响。

事实上描述球体对流散热的公式(32)式有多种形式⁽⁸⁾，具体的形式及系数也各不相同；而且 (33) 式用到雷诺数稍大或气体物性参数又变化剧烈的情况时也需作修正。但上述讨论勾画出的定性范围还是有效的，至于定量的数值界限显然需要进一步研究。

4. 如何提高冷却速度？

将 (26) 式 $H = \frac{\bar{K}_\infty \cdot N_u}{2 R_\infty}$ 代入 (24) 式，就有冷凝时间

$$t = \frac{2 \rho_s \cdot \lambda \cdot R_\infty^2}{3 N_u \cdot \bar{K}_\infty (T_m - T_\infty)} \left(1 + \frac{N_u \cdot \bar{K}_\infty}{4 K_s} \right) \text{ (秒)} \quad (34)$$

由 (34) 式看，当球形金属液滴的成分及直径确定后（设仍有 $\frac{N_u \cdot \bar{K}_\infty}{K_s} \ll 1$ 成立），则 t 与 \bar{K}_∞ 及 N_u 的乘积成反比。由于当其它条件相同时，导热系数随气体分子量的减少而增加，故导热系数最大的是氢，其次为氦。倘本文算例中其它条件都不变，仅将氩改为氢，冷凝时间约能降为用氩时的 $\frac{1}{12}$ ($\bar{K}_\infty = 0.547 \text{ 瓦/米}\cdot\text{°K}$)；若改用氦，则冷凝时间只比用氢气时略增加一些，只是氦成本较贵。

另一途径是引入对流传热的机制（增加 N_u 数），冷凝时间当可进一步缩短，这就需要金属液滴气体间有巨大的相对速度存在。

符 号 说 明

T 温度 (°K)

$\alpha_s = \frac{K_s}{\rho_s \cdot C_s}$ 热扩散速度 (米²/秒)

T_m 熔点温度 (°K)

K_s 金属热传导系数 (瓦/米·°K)，

r 球坐标的半径 (米)

ρ_s 金属密度 (公斤/米³)，

R_∞ 金属液滴 (或粉末) 的半径 (米)

C_s 比热 (焦/公斤·°K)，

t 时间 (秒)

λ	熔解潜热(焦/公斤),	τ	动量弛豫时间(秒),
H	换热系数(瓦/米 ² ·°K),	ρ	气体密度(公斤/米 ³),
ϵ	无因次的凝固层厚度, $\epsilon = 1 - r_m$,	μ	气体粘度(公斤/秒·米或牛·秒/米 ²)。波纹号 “~”表示有因次(或曰“有量纲”的量, 以区别于无因次的量; 下标
$A = \frac{C_s \cdot T_m}{\lambda}$, 无因次的数,		m	表示熔点,
N_u	Nusselt(努谢尔)数, 无因次的数,	l	表示液态,
S	热传导势(瓦/米),	s	表示固态或液滴表面,
v	热流密度(焦/秒·米 ²),	∞	表示离液滴无限远处的未枕值。

参 考 文 献

- [1] 赖和怡、张树格, 钢铁冶金, 1985年第1期1—7页。
- [2] 梁宝修、王吉南, 喷制急冷金属粉末的超声速气体射流喷咀的设计原理及结构特点, 力学研究所八室内部工作报告, 1986年12月。
- [3] E. Bourdin, et al., Int.J. Heat Mass Transfer, V.26, N.4, 1983, 567—581.
- [4] Toyonobu Yoshida, et al., Journal of Appl. Phys., V.48, N.6, 1977, 2252—2260.
- [5] 华昆焱, 数学物理方法(第二版), 1979年2月第10次印刷, 人民教育出版社。
- [6] Boulos, M. I., Pure and Applied Chemistry, V.57, 1985, P.1321.
- [7] Rüdinger, G., Fundamentals of Gas—Particle Flow, 1980, P.9, Elsevier Scientific Publishing Company, P.O. Box 330, 100 AH Amsterdam, The Netherlands.
- [8] Chen Xi(陈熙), Proceedings of The International Conference on Plasma Science and Technology, 1986, Beijing, 107—114.

An Estimation of the Condensation time of a Molten Metal Droplet

Chen Leshan

(Institute of Mechanics ACADEMIA SINICA)

ABSTRACT

In this paper, a simple analytical expression has been obtained for estimating the condensation time of a spherical molten metal droplet from an atomizer for metal powder production. A method for evaluating heat transfer coefficient H is presented, and the limitation as well as the applicability of the expression are also discussed.