教学讨论

对“通量法则诸反例的两个特点”一文的几点看法

中国科学院力学研究所　朱 如 曾

看了《大学物理》所载“通量法则诸反例的两个特点”[1]一文后，笔者认为其中存在几个问题，并且还涉及我的一篇文章[2]，我愿在此一併发表些意见.

一、文[1]认为，在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中运动的大块导体，其内部的自由电荷 q 在承受洛仑兹力 $q(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{B}$ 的同时，还受到一个来源于电子与晶格碰撞的约束力 $-q\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$，这里 $\boldsymbol{u}$ 是电荷相对于导体运动的速度，$\boldsymbol{v}$ 是运动导体提供的牵连速度. 我们认为，在细导线里，电子的定向运动必须平行于导线元 $d\boldsymbol{l}$，即 $\boldsymbol{u}\parallel d\boldsymbol{l}$，因而受到相应的约束力 $-q\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$，它与霍耳力 $q\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$ 相抵消. 但这种约束并不来源于电子与晶格的碰撞，而来源于导线侧面积累的电荷所提供的静电力. 这在文[3]中已有说明，这里不再赘述. 在大块金属的内部，电子的运动不受任何约束条件的限制，并不存在与霍耳力相抵消的约束力.

二、对于在磁场中运动的大块导体，笔者的文[2]认为，对任意指定的回路 l，“回路电动势” $\mathscr{E}$ 都存在并由(1.1)式给出

$$\mathscr{E}=-\int\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}+\oint_l\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}. \tag{1.1}$$

文[1]反对这一观点. 该文对于在磁场中运动的大块导体，无条件地引进“等效电动势”，即“实验观测到的电动势”(下文用 $\mathscr{E}_{eq}$ 表示)的概念；并且认为，仅当回路 l 在金属中的轨线与电流线重合时，(1.1)式给出的 $\mathscr{E}$ 才具有电动势的含义，即代表小电流管的电动势；如果条件(α)

$$\nabla\times(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})=0 \tag{α}$$

不成立，对任意轨线，$\mathscr{E}$ 将“未必具有电动势的含义”，更“未必等于观测到的电动势”，所以此时“(1.1)式已经失去意义”. 为了支持这一观点，文[1]还引证说：“在这里，还是 Feynman 说得谨慎：普遍适用的只有

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} \tag{γ}$$

和

$$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{σ}$$

这两个基本定律”.

我们认为，“回路电动势”的定义是非静电力沿瞬时回路的第二类路线积分. 这一定义已为现代文献所公认，例如可参看文[4]§17—3第一段. 当只考虑非静电力的动生和感生部分而不将霍耳和加速度效应包括进去时，回路电动势便由(1.1)式给出. 因此对任意回路，无论(α)成立与否以及回路与电流线重合与否，(1.1)式都有回路电动势的含义；并且只要微分形式的欧姆定律成立，$\mathscr{E}$ 与电流密度 $\boldsymbol{j}$ 之间就成立如下具有实际意义的等式

$$\mathscr{E}=\oint_l\boldsymbol{j}/\sigma\cdot d\boldsymbol{l}, \tag{ξ}$$

尽管当(α)不成立时 $\mathscr{E}$ 将与轨线取法有关，并且将不再是“实验观测到的电动势”. 当然不承认上述定义也没有什么不可以，只是那样会对某些问题的深入研究带来不便.

至于费曼(Feynman)的提法，其原文是[4]：“对材料保持不变的回路，通量法则一定适用；当回路的材料在改变时，我们必须回到基本定律. 正确的物理学总是由 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ 和 $\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ 这两条基本定律所给出.”显然，费曼在这里所要否定的是通量法则

$$\mathscr{E}=-\frac{d}{dt}\iint\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{1.2}$$

的普适性[费曼未引进“回路构成法则”而只立足于瞬时电阻率积分最小的通路，我们姑且称之为“自然构成法则”，故而(1.2)没有普适性]，丝毫也不是指当(α)不成立时，公式(1.1)无意

义．相反，就在同一节 Faraday 的圆盘反例中，外加的磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 只集中在盘的偏上方的一个极小的区域上，即使只考虑 $\boldsymbol{B}_0$ 对非静电力的贡献，条件(α)也显然不成立，但费曼仍对由“自然构成法则”所形成的回路来考虑非静电力，其实就是在用公式(1.1)，并把所得结果当作标准去否定(1.2)式．事实上，公式(1.1)和方程 $\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\iint\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$ 与公式(γ)和(σ)是互相等价的，费曼直接肯定了(γ)和(σ)的普适性，也就肯定了(1.1)的普适性．如果我们着眼的不是计算回路电流势 $\mathscr{E}$，而是计算金属块中的电流分布等，那末从微分-代数形式出发往往较为方便而已．

此外，“等效电动势”和“实验观察到的电动势 $\mathscr{E}_{eq}$”并不是无条件地存在的：(α)不仅不是(1.1)有意义的条件，相反倒是 $\mathscr{E}_{eq}$ 存在的先决条件．如果文[1]图1中 a 点的输入传导电流不等于 c 点的输出传导电流(非准稳情况)，即不存在总传导电流 I，此时文[1](4.5)式不复存在．如果 I 存在，但金属中总的电流密度和位移电流密度所激发的磁场及其时间导数对非静电力的附加贡献不可忽略，或虽然这些效应可以忽略但(α)不成立，则导体中的电流线分布将与 I 有关，于是由文[1](4.3)和(4.4)所定义的 r 和 $\mathscr{E}_{ac}$ 都与 I 有复杂的未知关系，即(4.5)式虽然存在，但已不是全电路欧姆定律．如果只要求维持(4.5)的形式而不要求等效电阻 r_{eq} 和等效电动势 $\mathscr{E}_{eq}$ 都与 I 无关，则 r_{eq} 和 $\mathscr{E}_{eq}$ 的定义就可以十分自由而不限于(4.3)和(4.4)，此时甚致可以任意指定内阻 r_{eq}，然后用(4.5)去定义等效电动势 $\mathscr{E}_{eq}$

$$\mathscr{E}_{eq}=Ir_{eq}+\Phi_c-\Phi_a$$

即 $\mathscr{E}_{eq}$ 和 r_{eq} 不能唯一确定，从而实际上没有意义．可以证明，如果上述使金属中电流线的分布与 I 有关的情况被排除，则(4.3)和(4.4)所定义的 r 和 $\mathscr{E}_{ac}$ 将与 I 无关，故可当作 r_{eq} 和 $\mathscr{E}_{eq}$．所以(α)是 $\mathscr{E}_{eq}$ 存在的先决条件．当(4.5)式中的 r 和 $\mathscr{E}_{ac}$ 与 I 无关时(此时(α)必定成立)，测定 $\Phi_a-\Phi_c$ 和 I 的两组值，由(4.5)式即可解出常数 r 和 $\mathscr{E}_{ac}$，所以文[1]称 $\mathscr{E}_{ac}$ 为“实验观测到的电动势” $\mathscr{E}_{eq}$ 是可以允许的．如果(α)不成立，则(4.3)和(4.4)中的 r 和 $\mathscr{E}_{ac}$ 将与 I 有复杂的未知关系，我们也就无法通过 $\Phi_a-\Phi_c$ 及 I 的值的测定用(4.5)式去推断 r 及 $\mathscr{E}_{ac}$ 了．所以(α)也是“实验观测到的电动势” $\mathscr{E}_{eq}$ 概念有意义的先决条件．事实上，上文提到的文[4]的 Faraday 圆盘反例，说明通量法则诸反例并不像文[1]所强调的那样都满足(α)，更不都具有 $\mathscr{E}_{eq}$．

三、在澄清电磁感应的“佯谬”问题上，文[1]说笔者的文[2]所提出的“回路构成法则”，作为(1.1)与通量法则(1.2)等价的(充分)条件虽然正确，但又说“问题的关键不在这里”．那末文[1]的作者认为“关键”在哪里呢？统观全文可以看出，作者指如下两点：一是关于公式(1.1)及(1.2)在数学上等价的条件，文[1]第(一)部分强调，为了解释佯谬，必须论证“为什么回路构成法则不成立时，(1.2)与(1.1)不等价？”这就是说，必须论证回路构成法则是(1.1)及(1.2)等价的必要条件；二是强调公式(1.1)及(1.2)与“实验观测到的电动势” $\mathscr{E}_{eq}$ 之间的联系，文[1]第(六)部分总结说，佯谬的根源不仅在于违反了回路构成法则，还在于对诸反例，条件(α)都成立(文[1]的题目“通量法则诸反例的两个特点”即指这两个特点)；前者使得(1.2)给出错误的 $\mathscr{E}_{eq}$，后者则保证(1.1)给出正确的 $\mathscr{E}_{eq}$，从而形成佯谬．

乍一看来，第二点似乎不无道理，因为既然反例都是实验装置，自然离不开“实验观测到的电动势”概念了．其实不然，上文已指出，通量法则诸反例并不都满足条件(α)，更不都存在 $\mathscr{E}_{eq}$ 可与(1.1)及(1.2)相联系．不仅如此，不管是否存在 $\mathscr{E}_{eq}$，诸反例中所有的实验装置都设计得使(1.2)在违反回路构成法则情况下对主要的轨线给出的 $\mathscr{E}$，与(1.1)的正确结果之间具有零(或近似为零)与大有限量的显著差别，因此借助于式(ξ)进行简单的定性分析，而不必引进 $\mathscr{E}_{eq}$ 的概念，即可把这一差别与电流计指针的偏转与否联系起来，从而显示出(1.2)

通量法则反例问题

北京大学　赵凯华

近几年，围绕电磁感应定律的两个数学表达式

$$\mathscr{E}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}\iint_{(S)}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}\text{(通量法则)}\quad \text{(I)}$$

和

$$\mathscr{E}=-\iint_{(S)}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}+\oint_{(L)}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l}\quad \text{(II)}$$

各自的适用范围和彼此间的等价性问题进行了激烈的争论．这场争论引起笔者一个感想：欲通过争论明辨是非，需对命题和概念术语有共同的理解或约定．当然，很可能双方的分歧正在于命题该如何提出，概念术语应怎样定义．这是另一个层次的问题，虽然其中也会有观点的高低之分，定义的优劣之别，但有些只是各人的偏好与口味问题，不一定能得到是非对错的绝对判别．

电磁感应现象是法拉第于 1831 年发现的，电磁感应定律以他来命名，为举世所公认．但众所周知，法拉第本人并未给出这一定律的数学表达式，故以他的姓氏来特指某个数学表达式，譬如通量形式(I)，则不一定合适．费曼称(I)式为“通量法则”，[1]本文沿用这一称呼．

电磁感应过程有“感生”与“动生”两种形式，通量法则集此两种现象于一式，简明扼要，通俗易懂，为广大教师与工程师所乐用．(II)式将感生与动生电动势分项写出，反映出它们

给出的 $\mathscr{E}$ 与实验的矛盾．所以不容置疑，通量法则诸反例所提出的(1.1)与(1.2)之间的不等价问题仅仅指它们给出的“回路电动势”之间不相等而言，它与回路构成法则有关，而与条件(α)，等效电动势以及实验观测到的电动势的概念并无关系．

至于第一点，文[1]的作者没有，也不可能给出回答，因为这个命题本身并不成立：实际上并不是回路构成法则不成立时(1.1)与(1.2)就一定不等价．举个极端的例子：在无磁场的空间，无论是否符合回路构成法则，(1.1)和(1.2)都给出 $\mathscr{E}$ 为零的等价结果．须知：对于诸反例，(1.2)与(1.1)的不等价性是被具体分析所证实了的已知事实，不能也不必由它们违反回路构成法则这一点去逻辑推断．因此，解释佯谬，无须求助于那个根本不成立的命题．其实，两式等价的真正的充分必要条件是

$$\oint_{l}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V})\times\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=0\qquad (\eta)$$

式中，$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 分别为回路上材料质点的速度(真空处 $\boldsymbol{v}$ 取零)和回路本身的移动速度．通常默认 $\boldsymbol{V}$ 必须独立于 $\boldsymbol{v}$，并由“自然构成法则“所规定，故会出现(η)不满足从而(1.2)不成立的情况．文[2]的贡献在于指出：$\boldsymbol{V}$ 可以根据 $\boldsymbol{v}$ 来确定；对任何例子，总可以取 $\boldsymbol{V}\equiv\boldsymbol{v}$(即采用“回路构成法则”)来使两式等价，从而清楚地解决了佯谬．顺便指出，如果附加地要求 $\boldsymbol{V}$ 与磁场分布无关，则为保证(η)成立，$\boldsymbol{V}$ 只有唯一的选法：$\boldsymbol{V}\equiv\boldsymbol{v}$．只在这种“附加要求”下，回路构成法则才是两式等价的充分必要条件．不过这一命题与佯谬的解决也无关系．

综上所叙，文二还是抓住了电磁感应佯谬的．上述问题笔者与北京大学赵凯华教授进行过多次讨论，获益颇深，谨致谢意．

参考文献

[1] 谭天荣、周春生，大学物理，1985 年第 1 期．
[2] 朱如曾，物理通报，1983 年第 5 期．
[3] E.M.珀塞尔，电磁学，科学出版社，1979 年，268 页．
[4] R.P,Feynman,*The Feynman Lectures on Physics*, § 17-2, § 17-3.