

边界层方程的一种新解法

魏叔如 王福汉 冯国环

(中国科学院力学研究所) (航天工业部)

摘要 本文给出了边界层方程的一种新解法。这个方法在对边界层方程的处置上与积分矩阵法相同,但是,在解最后得到的代数方程组时,不用矩阵解法而用打靶法。本方法特别适合于多组元化学反应边界层。用本方法得出的结果与相应精确解和经典热流公式进行了比较,比较表明,本方法是足够精确的。

关键词 多组元; 化学反应; 边界层方程; 积分矩阵法; 打靶法。

一、前言

在多组元化学反应边界层的计算中,很大一部分计算时间消耗在气体热力学状态参数的计算上,因此,要想大幅度地减少计算机时,除了改进气体热力学状态参数的计算方法外,减少所需的边界层节点数,是一条更有效的途径。积分矩阵法⁽¹⁾,由于与其它方法(例如有限差分法)相比,在达到相同计算精度的情况下,所需的节点数最少(一般层流边界层7个节点,湍流边界层13至15个节点已足够),特别引起人们的兴趣。但是,由于原方法用矩阵法解最后的线性与非线性代数方程组,数学过程比较复杂,对计算机内存要求过高,一般中小型计算机不能胜任⁽²⁾,妨碍了它在工程上的应用。

本文给出的方法,保留了积分矩阵法中对边界层方程的处置方法,但在解最后的代数方程组时,采用了数学过程比较简单的“打靶法”,它对计算机内存无特殊要求,即使在小型计算机上也能迅速得到满意的结果。

二、方程

1. 化学反应边界层方程的一般形式

在略去气体辐射、热扩散和假定所有气体质量扩散系数相等的情况下,化学反应层流边界层方程的一般形式是:

总连续方程(质量守恒):

$$\frac{\partial(\rho u r')}{\partial s} + \frac{\partial(\rho v r')}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

流线方向动量方程(动量守恒):

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial s} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial P}{\partial s} \quad (2.2)$$

能量守恒方程:

$$\rho u \frac{\partial H_T}{\partial s} + \rho v \frac{\partial H_T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial u^2/2}{\partial y} + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \sum_i \rho D_{12} h_i \frac{\partial K_i}{\partial y} \right] \quad (2.3)$$

组元连续方程 (组元质量守恒):

$$\rho u \frac{\partial K_i}{\partial s} + \rho v \frac{\partial K_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D_{12} \frac{\partial k_i}{\partial y} \right) + \dot{w}_i \quad (2.4a)$$

在引进Shvab-Zeldovich变换后, 方程(2.4a)可以写成元素质量守恒的形式⁽¹⁾:

$$\rho u \frac{\partial \tilde{k}_k}{\partial s} + \rho v \frac{\partial \tilde{k}_k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D_{12} \frac{\partial \tilde{k}_k}{\partial y} \right) \quad (2.4b)$$

其中,

$j=0$ (二线), $i=1$ (轴对称),

$$\tilde{k}_k = \sum_i \alpha_i k_i, \quad H_T = h + J u^2/2$$

$$h = \sum_i k_i h_i, \quad h_i = \int_{T_0}^T C_{pi} dT + h_i^0$$

α_i 为 i 组元中所含 K 元素的质量分数.

2. 座标变换

上述方程在引进Lees-Levy变换⁽¹⁾, 即

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \int_0^s \rho_e u_e \mu_e r^{2j} ds \\ \eta &= \frac{r^j u_e}{\alpha_H \sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

和定义无量纲流函数:

$$f - f_w = \alpha_H \int_0^\eta \frac{u}{u_e} d\eta \quad (2.6)$$

后, 总连续方程自动满足, 其它方程变为:

动量方程:

$$\left(\frac{C}{\alpha_H} f'' \right)' + f f'' + \beta (\alpha_H^2 \frac{\rho_e}{\rho} - f'^2) = 2 \left(f' \frac{\partial f''}{\partial \ln \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \ln \xi} - f'^2 \frac{\partial \ln \alpha_H}{\partial \ln \xi} \right) \quad (2.7)$$

能量方程:

$$(-q^*)' + f g' = 2 \left(f' \frac{\partial g}{\partial \ln \xi} - g' \frac{\partial f}{\partial \ln \xi} \right) \quad (2.8)$$

元素守恒方程:

$$\left(\frac{C}{\alpha_H S_c} \tilde{k}_k' \right)' + f \tilde{k}_k' = 2 \left(f' \frac{\partial \tilde{k}_k}{\partial \ln \xi} - \tilde{k}_k' \frac{\partial f}{\partial \ln \xi} \right) \quad (2.9)$$

其中, $g \equiv H_T/H_{Te}$, $\beta \equiv 2 d \ln u_e / d \ln \xi$, $C \equiv \rho \mu / \rho_e \mu_e$,

$$-q^* \equiv \frac{C}{\alpha_H} \left[\frac{g'}{S_c} + J \left(1 - \frac{1}{S_c} \right) \left(\frac{u_e}{\alpha_H} \right)^2 \frac{f' f''}{H_{Te}} + \left(\frac{1}{P_r} - \frac{1}{S_c} \right) \frac{\overline{C_p T'}}{H_{Te}} \right] \quad (2.10)$$

$$P_r \equiv \overline{C_p} \mu / \lambda, \quad S_c \equiv \mu / \rho D_{12}, \quad \overline{C_p} \equiv \sum_i k_i c_{pi}$$

边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0, f = f_w; f' = 0; g = g_w; \tilde{k}_k = \tilde{k}_{kw} \\ \eta \rightarrow \infty \text{ (或 } \eta = \eta_e), f' = \alpha_H; g = 1.0; \tilde{k}_k = \tilde{k}_{ke} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

座标变换(2.5)与通常的Lees-Levy变换相比,在 η 中新引进了一个叫“伸缩参数”的 α_H ,它仅是 ξ 的函数,引进它的目的是在计算中能采用不变的通用网格^[1].确定 α_H 的约束条件是,在接近于边界层外缘的一个节点 η_c 处,令流线方向的速度与外缘速度的比值为一定值 C , C 接近但小于1.0,即

$$f' \Big|_{\eta_c} = \alpha_H \frac{u}{u_e} \Big|_{\eta_c} = \alpha_H C \quad (2.12)$$

或

$$\alpha_H = f' \Big|_{\eta_c} / C \quad (2.13)$$

在相似或局部相似解条件成立时,方程(2.7)~(2.9)的右边等于零.

3. 边界层方程的积分矩阵形式

根据文献〔1〕对边界层方程的处置方法,将边界层分成 $(N-1)$ 条条带,连结条带的节点用 η_n 表示,在壁面上 $n=1$,在外缘 $n=N$.将基本因变量 f, g, \tilde{k}_k 及其导数在每一组相邻节点间进行泰勒展开,级数在此边界层方程中出现的最高阶导数(f''', g'' 和 \tilde{k}_k'')高一阶的导数处截断;对守恒方程进行条带积分.这样,得到边界层方程的积分矩阵形式如下^[1]:

泰勒展开式:

$$f_n = f_{n-1} + f'_n \delta\eta - f''_n \delta\eta^2/2 + f'''_n \delta\eta^2/8 + f''''_n \delta\eta^3/24 \quad (2.14)$$

$$G_n = G_{n-1} + G'_n \delta\eta - G''_n \delta\eta^2/3 - G'''_n \delta\eta^2/6 \quad (2.15)$$

$$G'_n = G_{n-1} + G''_n \delta\eta/2 + G'''_n \delta\eta/2 \quad (2.16)$$

守恒方程的条带积分形式(这里仅列出层流局部相似解情况):

动量方程

$$\left[\frac{C}{\alpha_H} f'' + f f' \right]_{n-1}^n - (1 + \beta) [f'_n x p_1 + f''_n x p_2 + f'''_n x p_3 + f''''_n x p_4]_{G_n = f_n} \\ + \beta \alpha_H^2 \rho_e \delta\eta/2 \times \left[\frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\rho_{n-1}} + \frac{\delta\eta^2}{6} \left(\frac{\rho'_n}{\rho_n^2} - \frac{\rho'_{n-1}}{\rho_{n-1}^2} \right) \right] = 0 \quad (2.17)$$

能量方程

$$[-q^* + fg]_{n-1}^n - [f'_n x p_1 + f''_n x p_2 + f'''_n x p_3 + f''''_n x p_4]_{G_n = g_n} = 0 \quad (2.18)$$

元素守恒方程

$$\left[\frac{C}{\alpha_H S_c} \tilde{k}_k' + f \tilde{k}_k \right]_{n-1}^n - [f'_n x p_1 + f''_n x p_2 + f'''_n x p_3 + f''''_n x p_4]_{G_n = \tilde{k}_{kn}} = 0 \quad (2.19)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned}
 x p_1 &\equiv \delta \eta \left(G_n - \frac{G_n'}{2} \delta \eta + \frac{G_n''}{8} \delta \eta^2 + \frac{G_{n-1}''}{24} \delta \eta \right) \\
 x p_2 &\equiv -\delta \eta^2 \left\{ \frac{G_n}{2} - \frac{G_n'}{3} \delta \eta + \frac{11}{120} G_n'' \delta \eta^2 + \frac{G_{n-1}''}{30} \delta \eta^2 \right\} \\
 x p_3 &\equiv \delta \eta^3 \left\{ \frac{G_n}{8} - \frac{11}{120} G_n' \delta \eta + \frac{11}{420} G_n'' \delta \eta^2 + \frac{5}{504} G_{n-1}'' \delta \eta^2 \right\} \\
 x p_4 &\equiv \delta \eta^3 \left\{ \frac{G_n}{24} - \frac{G_n''}{30} \delta \eta + \frac{5}{504} G_n'' \delta \eta^2 + \frac{G_{n-1}''}{252} \delta \eta^2 \right\} \\
 \delta \eta &\equiv \eta_n - \eta_{n-1} \\
 G_n &\text{表示 } f_n', g_n \text{ 或 } \tilde{k}_k
 \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

边界条件:

$$\left. \begin{aligned}
 \eta = 0, \quad f = f_w; \quad f' = 0; \quad g = g_w; \quad \tilde{k}_k = \tilde{k}_{kw} \\
 \eta = \eta_e, \quad f' = \alpha_H; \quad g = 1.0; \quad \tilde{k}_k = \tilde{k}_{ke} \\
 f'' = 0, \quad g' = 0, \quad \tilde{k}_k' = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

对 α_H 的约束条件:

$$\alpha_H = f' \Big|_{\eta_e} / C \quad (2.13)$$

边界条件 (2.21) 与 (2.11) 相比, 多了三个条件, 这是三次样条拟合要求附加的条件^(3.3)

三、解 法

为克服用矩阵法解上述方程组时出现的对计算机内存要求过高和计算过程过于繁杂的缺点, 我们采用了对三个条带积分形式的守恒方程逐个从壁面算到边界层外缘的“打靶法”, 并对上述方程组作了改造, 得到更适于计算的递推公式. 为此, 我们令

$$f_n' \equiv x_n \quad (3.1)$$

将其代入 (2.14) - (2.16) 得到:

$$f_n''' = \frac{6}{\delta \eta} (x_n - S_2) \quad (3.2)$$

$$f_n'' = \frac{3}{\delta \eta} (x_n - S_2) + S_1 \quad (3.3)$$

$$f_n = \frac{\delta \eta}{4} (x_n - S_2) + S_3 \quad (3.4)$$

将方程 (3.1) - (3.4) 和 (2.20) 代入 (2.17) 经过整理后得到:

$$a_1 x_n^2 + b_1 x_n + c_1 = 0 \quad (3.5)$$

其中,

$$a_1 \equiv \frac{\delta \eta}{7} (0.75 - \beta)$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &\equiv \frac{3}{\delta\eta} \frac{C_n}{\alpha_H} + S_3 - \frac{\delta\eta}{4} S_2 - (1 + \beta) \frac{\delta\eta}{2} \left(\frac{3}{7} S_2 - \frac{\delta\eta}{5} S_1 + \frac{\delta\eta^2}{210} f_{n-1}'''' \right) \\
 c_1 &\equiv \frac{C_n}{\alpha_H} \left(S_1 - \frac{3S_2}{\delta\eta} \right) + S_4 - S_5 - (1 + \beta) \delta\eta \left[\frac{9}{14} S_2 - \frac{9}{10} \delta\eta S_1 S_2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\delta\eta^2}{3} f_{n-1}'''' \left(\frac{17}{70} S_2 - \frac{\delta\eta}{5} S_1 + \frac{\delta\eta^2}{84} f_{n-1}'''' \right) \right] \\
 S_1 &\equiv f_{n-1}'' - f_{n-1}'''' \delta\eta / 2 \\
 S_2 &\equiv f_{n-1}' - f_{n-1}'''' \delta\eta^2 / 6 + S_1 \delta\eta \\
 S_3 &\equiv f_{n-1} + f_{n-1}'''' \delta\eta^3 / 24 + S_2 \delta\eta - S_1 \delta\eta^2 / 2 \\
 S_4 &\equiv \beta \alpha_H^2 \rho_e \frac{\delta\eta}{2} \left[\frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\rho_{n-1}} + \frac{\delta\eta}{6} \left(\frac{\rho_n'}{\rho_n^2} - \frac{\rho_{n-1}'}{\rho_{n-1}^2} \right) \right] \\
 S_5 &\equiv \frac{C_{n-1}}{\alpha_H} f_{n-1}'' + f_{n-1} f_{n-1}'
 \end{aligned}$$

方程 (3.5) 的系数 a_i , b_i , c_i 是节点间距 $\delta\eta$; 前一节点流函数及其导数和热力学状态参数, 输运系数的函数. 同样, 我们令

$$g_n'' \equiv y_n \quad (3.6)$$

可以从方程 (2.15), (2.16) 得到:

$$g_n' = \frac{\delta\eta}{2} y_n + H_1 \quad (3.7)$$

$$g_n = \frac{\delta\eta^2}{6} y_n + H_2 \quad (3.8)$$

将方程 (3.6)–(3.8) 及 (2.10), (2.20) 代入 (2.18) 经过整理后得:

$$b_2 y_n + c_2 = 0 \quad (3.9)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 b_2 &\equiv F_1 \equiv \frac{\delta\eta}{2} \left[\frac{C_n}{\alpha_H S_c} + f_n \delta\eta / 3 - f_n' \delta\eta^2 / 12 + f_n'' \delta\eta^3 / 60 \right. \\
 &\quad \left. - f_n'''' \delta\eta^4 / 420 - f_{n-1}'''' \delta\eta^4 / 2520 \right] \\
 c_2 &\equiv H_1 F_2 + H_2 F_3 - g_{n-1} F_4 - H_3 + H_4 \\
 H_1 &\equiv g_{n-1}' + g_{n-1}'' \delta\eta / 2 \\
 H_2 &\equiv g_{n-1} - g_{n-1}'' \delta\eta^2 / 6 + H_1 \delta\eta \\
 H_3 &\equiv (-q^* + fg)_{n-1} \\
 H_4 &\equiv \frac{C_n}{\alpha_H} \left[J \left(1 - \frac{1}{S_c} \right) \left(\frac{u_c}{\alpha_H} \right)^2 \frac{f_n' f_n''}{H_{T_e}} + \left(\frac{1}{P_r} - \frac{1}{S_c} \right) \frac{\bar{C}_{p,n} T_n'}{H_{T_e}} \right] \\
 F_2 &\equiv \frac{C_n}{\alpha_H S_c} + f_n' \delta\eta^2 / 2 - f_n'' \delta\eta^3 / 3 + \frac{11}{120} f_n'''' \delta\eta^4 + \frac{1}{30} f_{n-1}'''' \delta\eta^4 \\
 F_3 &\equiv f_n - f_n' \delta\eta + f_n'' \delta\eta^2 / 2 - f_n'''' \delta\eta^3 / 8 - f_{n-1}'''' \delta\eta^3 / 24
 \end{aligned}$$

$$F_4 \equiv \frac{\delta\eta^3}{6} (f_n'/4 - f_n''\delta\eta/5 + \frac{5}{84}f_n''' \delta\eta^2 + f_{n-1}'''' \delta\eta^2/42)$$

最后, 令

$$\tilde{k}_{kn} \equiv Z_n \quad (3.10)$$

从 (2.15) 和 (2.16) 得到:

$$\tilde{k}_{kn}' = \frac{\delta\eta}{2} Z_n + K_1 \quad (3.11)$$

$$\tilde{k}_{kn} = \frac{\delta\eta^2}{6} Z_n + K_2 \quad (3.12)$$

将(3.10) - (3.12) 和(2.20) 代入(2.19) 整理后得到:

$$b_3 Z_n + c_3 = 0 \quad (3.13)$$

其中,

$$b_3 \equiv F_1$$

$$c_3 \equiv K_1 F_2 + K_2 F_3 - \tilde{k}_{kn}'' F_4 - k_3$$

$$k_1 \equiv \tilde{k}_{kn-1}' + \tilde{k}_{kn-1}'' \delta\eta/2$$

$$k_2 \equiv \tilde{k}_{kn-1} - \tilde{k}_{kn-1}'' \delta\eta^2/6 + k_1 \delta\eta$$

$$k_3 \equiv \left[\frac{C}{a_{j,S}} \tilde{k}_k' + f \tilde{k}_k \right]_{n-1}$$

方程 (3.9) 和 (3.13) 的系数 b_2, c_2, b_3, c_3 是节点间距、热力学参数、输运性质、前一节点的 g, \tilde{k}_k 及其导数和流函数及其导数的函数。

对于最一般的化学反应边界层问题, 打靶过程通常从动量方程开始, 然后其它两个方程。与其它边界层方程解法一样, 求解时需假设初始剖面 $f'(\eta), g(\eta)$ 和 $\tilde{k}_k(\eta)$ 。实施打靶过程时需赋初值, 例如对动量方程需赋 f'', f''' 和 α_n 的初值, 然后由方程 (3.2) - (3.5) 向边界层外缘推进。对初值的选择并不苛刻, 例如, 利用不可压平板或旋成体驻点的精确解和令 $\alpha_n = 1.0$ 作初值就可以; 计算过程中这些值的调整由可变多面体算法的程序^[4] 自动进行。

由于打靶过程中的递推公式是一元一次和二次代数方程, 我们又用了最优化的多自变量求极小值点的计算程序——可变多面体算法^[4] 来实施迭代过程, 所以整个打靶过程是异常快捷的。

四、算 例

为了确定现在方法的可靠性, 与文献[1]一样, 我们将计算方程置于特例情况之下, 计算了有精确剖面数据可供比较的不可压等特性平板层流边界层 (Blasius解) 和不可压等特性旋成体驻点边界层 (Falkner-skan解)^[7], 所得结果如图1, 更精细的比较列在表1、表2中。从表中可以看到, 现在方法与精确解的误差在千分之一以内, 与积分矩阵法达到的精度 (3位—4位精度)^[1,2] 基本相同。

上述两个算例只涉及到动量方程的解, 为进一步确定现在方法的可靠性, 我们还在头部半径 $R_N = 1.27\text{cm}$, 驻点压力 $P_{\infty} = 1.5190 \times 10^7\text{Pa}$, 驻点焓 $H_{T_{\infty}} = 9.0730\text{J/kg}$ 的条件下计

算了离解空气平衡边界层, 计算得出驻点冷壁热流 $q_w = 1.17186 \times 10^5 \text{ kW/m}^2$, 而由文献[5]经典热流公式得到的驻点冷壁热流 $q_w = 1.17022 \times 10^5 \text{ kW/m}^2$, 误差在0.14%左右. 因此, 也是很令人满意的.

表1 不可压平板层流边界层方程的解

η	本文结果			精确解 ^a		
	f	f'	f''	f	f'	f''
0.000	0.0000000	0.000000	0.170080	0.0000000	0.000000	0.169600
0.021	0.0001353	0.011280	0.170079			
0.046	0.0003730	0.018802	0.170078			
0.072	0.0012183	0.033840	0.170066			
0.120	0.0033843	0.056411	0.170017			
0.200	0.0091010	0.093980	0.169786	0.0093911	0.093905	0.169306
0.320	0.0210618	0.150364	0.168875			
0.480	0.0511038	0.225085	0.166030			
0.800	0.1198661	0.372660	0.151599	0.1496745	0.371963	0.151190
1.400	0.1510039	0.621005	0.380328	0.1507231	0.621386	0.379692
2.000	0.8874371	0.818239	0.254983	0.8867962	0.816691	0.255669
3.200	1.9895610	0.977749	0.050555	1.9905796	0.9803165	0.016370
5.000	3.7831850	1.000000	0.000001	3.7832321	0.999936	0.000258

表2 不可压旋成体驻点边界层方程的解

η	本文结果			精确解 ^a		
	f	f'	f''	f	f'	f''
0.000	0.0000	0.0000	0.9273	0.0000	0.0000	0.9278
0.021	0.0003	0.0221	0.9153			
0.040	0.0007	0.0367	0.9073			
0.070	0.0024	0.0655	0.8913			
0.120	0.0065	0.1077	0.8673			
0.200	0.0179	0.1755	0.8274	0.0179	0.1756	0.8278
0.320	0.0417	0.2711	0.7675			
0.480	0.0976	0.3876	0.6883			
0.800	0.2512	0.5829	0.5344	0.2544	0.5833	0.5347
1.400	0.6811	0.8261	0.2813	0.6846	0.8258	0.2850
2.000	1.2195	0.9410	0.1190	1.2200	0.9422	0.1185
3.200	2.3959	0.9973	0.0074	2.3963	0.9972	0.0085
5.000	1.1951	1.0000	0.0000			

五、结 论

本文给出的边界层方程的新解法, 由于保留了积分矩阵法节点数少, 计算机时省, 计算精度较高的优点, 特别适合于多组元化学反应边界层计算. 又由于本方法数学过程比较简单, 对计算机内存无特殊要求, 在中小型计算机上即能迅速得到满意的结果. 因此, 易为工程师

所接受。

本文的计算方程是在层流边界层局部相似假设条件下推出的, 将其推广至非相似和湍流边界层时, 不会有什么困难。

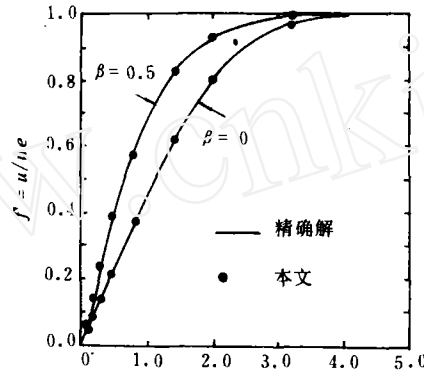


图1 本文结果与精确解比较

参 考 文 献

- [1] Bartlett, E. P. & Kendall, R. M., NASA CR - 1062.
- [2] Kendall, R. M. et al, NASA CR - 1060.
- [3] 易大义等: "数值方法", 浙江科学技术出版社 (1984), 39 - 55.
- [4] 刘德贵等: "FORTRAN 算法汇编", 第二分册, 国防工业出版社 (1983), 341 - 350.
- [5] Fay, J. A. & Riddell, F. R., JAS, 25, 2 (1958), 73 - 85.
- [6] Rosenhead, L., "Laminar Boundary Layers" Oxford (1963), 221, 237.

A NEW SOLVING METHOD FOR BOUNDARY LAYER EQUATIONS

Wei Shuru

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Wang Fuhun, Feng Guohuan

(Industry Ministry of Aerospace)

ABSTRACT A new solving method for boundary layer equations is given. The new method is the same as the integral matrix method on the disposal of the boundary layer equations. However, not the matrix method but the shooting method is used to solve resulting algebraic equations. present method is specially available for multicomponent chemically reacting boundary layers. The results obtained by present method

are compared with corresponding exact solutions and the results obtained by classical heat transfer rate formula. These compares indicate that present method is accurate enough.

KEY WORDS multicomponent; chemical reaction; boundary layer equations; integral matrix method; shooting method.

www.cnki.net