

平面应变 I 型非线性 裂纹问题的高阶渐近解

李 尧 臣 王 自 强

(天津理工学院) (中国科学院力学研究所, 北京)

摘 要

本文给出了平面应变情况下 I 型问题裂纹尖端附近二阶渐近场的定解方程、求解方法和计算结果, 并以某些细致的有限无解为依据, 估计了二阶渐近场的幅值系数 k_2 , 分析了它对应力、应变分布和三轴张力的影响, 变化规律以及在弹塑性断裂准则中的作用。

一、引 言

关于裂纹尖端材料的弹塑性行为, 很早就引起了人们的重视。Rice^[1] 提出的 J 积分以及 Hutchinson^[2], Rice 和 Rosengren^[3] 提出的 HRR 奇异解, 对于弹塑性断裂力学的发展作出了有意义的贡献。而后, Begley 和 Landes^[4,5] 进行了实验验证和数值分析。他们认为, 在 J 积分主导区或试件尺寸满足一定要求的情况下, HRR 奇异场是裂纹尖端弹塑性场的良好近似, J 积分和 J 积分阻力曲线可以作为裂纹起裂和扩展的判据。但 Shih 等人^[6,7] 的进一步研究表明, 即使在满足上述要求的情况下, 同一种材料, 不同形式试件的 J 积分起裂值和阻力曲线也不相同。Shih 和 German^[8] 的有限元分析表明, 对于边裂纹弯曲试样 (CBB), 有限元的结果与 HRR 渐近解符合较好, 然而对于含有中心裂纹或边裂纹的拉伸板条 (CCP 或 SECP), 两者的差异较大。McMeeking 和 Parks^[9], Needleman 和 Tvergaard^[10] 以及文献[11]的大变形有限元分析结果也证实了这一现象。而且现已公认, 在裂尖前缘存在着高三轴张力, 它对裂纹起裂也有很大影响。因此, 仅仅用 J 积分这样一个单参数来表征裂尖附近的断裂环境是不够的。

本文致力于寻求二阶渐近解。此项工作仍然是在小应变条件下进行, 非线性关系只在应力应变关系中引入。对 I 型裂纹问题的分析和计算结果表明, 二阶渐近解能较好地符合有限元解的结果, 即使对于以大变形理论为基础的有限元结果也是如此。因此渐近解第二项的幅值系数 k_2 就有可能和 J 积分一起作为判断裂纹起裂的双参数。

二、定解方程

计算中采用 Ramberg-Osgood 的应力应变关系

本文 1984 年 12 月 17 日收到, 1985 年 6 月 3 日收到修改稿。

$$\varepsilon = \sigma + \alpha\sigma^n, \quad (1)$$

σ, ε 是无量纲应力和应变。若以 $\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}$ 代表真实的应力和应变, 则 $\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0}, \varepsilon = \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_0}$ 。这里 σ_0 为材料的屈服极限, $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$ 为对应于屈服极限的弹性变形, E 为弹性模量, 系数 α 和指数 n 都是表示材料性质的量。

应力函数 ϕ 在极坐标下与各应力分量的关系为^[2]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= r^{-1}\phi' + r^{-2}\phi'', \\ \sigma_\theta &= \phi'', \\ \sigma_{r\theta} &= -(r^{-1}\phi')'. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ϕ 和 r 都经过无量纲化

$$\phi = \frac{1}{\sigma_0 L^2} \bar{\phi}, \quad r = \frac{\bar{r}}{L},$$

$\bar{\phi}$ 为真实的应力函数, \bar{r} 为真实的矢径长度, L 为裂纹的半长。(2)式中的 $(\quad)' = \frac{\partial}{\partial r}$, $(\quad)'' = \frac{\partial}{\partial \theta}$, θ 是以裂纹延长线为起始边按反时针方向量取的角度, 坐标原点设在裂纹顶端。平面应变相容方程为

$$r^{-1}(r\varepsilon_\theta)'' + r^{-2}\varepsilon_r'' - r^{-1}\varepsilon_r' - 2r^{-2}(\varepsilon_{r\theta}r)' = 0. \quad (3)$$

式中的应变可表示为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \sigma_r - \nu\sigma_\theta + \frac{3}{4}\alpha\sigma_e^{n-1}(\sigma_r - \sigma_\theta), \\ \varepsilon_\theta &= \sigma_\theta - \nu\sigma_r + \frac{3}{4}\alpha\sigma_e^{n-1}(\sigma_\theta - \sigma_r), \\ \varepsilon_{r\theta} &= (1 + \nu)\sigma_{r\theta} + \frac{3}{2}\alpha\sigma_e^{n-1}\sigma_{r\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ν 为泊桑比, σ_e 为等效应力,

$$\sigma_e^2 = \frac{3}{4}(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 3\sigma_{r\theta}^2. \quad (5)$$

利用(2)式, 在(3), (4)式中消去应变, 得

$$\left[r^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} - r^{-1} \frac{\partial(r)}{\partial r^2} \right] \cdot [\sigma_e^{n-1}(r^{-1}\phi' + r^{-2}\phi'' - \phi'')] + 4r^{-2}[r\sigma_e^{n-1}(r^{-1}\phi')]'' = 0. \quad (6)$$

(6)式左端没有计入表示弹性解部分的双调和项 $\nabla^2 \phi$, 以后我们将会说明这一项是可以忽略的。设应力函数可表达为

$$\phi = K_1 r^{s_1+2} \tilde{\phi}_1(\theta) + K_2 r^{s_2+2} \tilde{\phi}_2(\theta). \quad (7)$$

代入(2)式后应力可表示为

1) 严格地说, (5)式只适用于 $\nu = \frac{1}{2}$ 的情况, 但可以证明对二阶渐近解, 方程(5)对任何 ν 都是足够精确的。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= K_1 r^{s_1} \bar{\sigma}_{r1} + K_2 r^{s_2} \bar{\sigma}_{r2}, \\ \sigma_\theta &= K_1 r^{s_1} \bar{\sigma}_{\theta1} + K_2 r^{s_2} \bar{\sigma}_{\theta2}, \\ \sigma_{r\theta} &= K_1 r^{s_1} \bar{\sigma}_{r\theta1} + K_2 r^{s_2} \bar{\sigma}_{r\theta2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

代入(5)式得

$$\begin{aligned} \sigma_c^2 &= K_1^2 r^{2s_1} \bar{\sigma}_{c1}^2 + 2K_1 K_2 r^{s_1+s_2} \bar{\sigma}_{c12} + K_2^2 r^{2s_2} \bar{\sigma}_{c2}^2 \\ &= K_1^2 r^{2s_1} \bar{\sigma}_{c1}^2 \left[1 + \left(2\eta r^{\Delta s_2} \frac{\bar{\sigma}_{c12}}{\bar{\sigma}_{c1}^2} + \eta^2 r^{2\Delta s_2} \frac{\bar{\sigma}_{c22}}{\bar{\sigma}_{c1}^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

而

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{c1}^2 &= \frac{3}{4} (\bar{\sigma}_{r1} - \bar{\sigma}_{\theta1})^2 + 3\bar{\sigma}_{r\theta1}^2, \\ \bar{\sigma}_{c12} &= \frac{3}{4} (\bar{\sigma}_{r1} - \bar{\sigma}_{\theta1})(\bar{\sigma}_{r2} - \bar{\sigma}_{\theta2}) + 3\bar{\sigma}_{r\theta1}\bar{\sigma}_{r\theta2}, \\ \bar{\sigma}_{c2}^2 &= \frac{3}{4} (\bar{\sigma}_{r2} - \bar{\sigma}_{\theta2})^2 + 3\bar{\sigma}_{r\theta2}^2. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\eta = \frac{K_2}{K_1}, \quad \Delta S_2 = S_2 - S_1 > 0.$$

当 $r \rightarrow 0$ 时, (9) 式的圆括号中为小量, 因此有

$$\sigma_c^{n-1} \approx K_1^{n-1} r^{(n-1)s_1} \bar{\sigma}_{c1}^{n-1} \left[1 + \frac{n-1}{2} \left(2\eta r^{\Delta s_2} \frac{\bar{\sigma}_{c12}}{\bar{\sigma}_{c1}^2} + \eta^2 r^{2\Delta s_2} \frac{\bar{\sigma}_{c22}}{\bar{\sigma}_{c1}^2} \right) \right]$$

$r^{2\Delta s_2}$ 又比 $r^{\Delta s_2}$ 小得多, 可以忽略, 于是

$$\sigma_c^{n-1} \approx K_1^{n-1} r^{(n-1)s_1} \bar{\sigma}_{c1}^{n-1} \left[1 + \eta r^{\Delta s_2} (n-1) \frac{\bar{\sigma}_{c12}}{\bar{\sigma}_{c1}^2} \right]. \quad (11)$$

将(8), (10), (11)式代入(4)式, 计算中均略去 $r^{2\Delta s_2}$ 的项, 再略去弹性应变, 则有应变表达式

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \alpha K_1^n r^{ns_1} (\bar{\varepsilon}_{r1} + \eta r^{\Delta s_2} \bar{\varepsilon}_{r2}), \\ \varepsilon_\theta &= -\varepsilon_r = \alpha K_1^n r^{ns_1} (\bar{\varepsilon}_{\theta1} + \eta r^{\Delta s_2} \bar{\varepsilon}_{\theta2}), \\ \varepsilon_{r\theta} &= \alpha K_1^n r^{ns_1} (\bar{\varepsilon}_{r\theta1} + \eta r^{\Delta s_2} \bar{\varepsilon}_{r\theta2}). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{r1} &= \frac{3}{4} \bar{\sigma}_{c1}^{n-1} (\bar{\sigma}_{r1} - \bar{\sigma}_{\theta1}), \\ \bar{\varepsilon}_{\theta1} &= -\bar{\varepsilon}_{r1}, \\ \varepsilon_{r\theta1} &= \frac{3}{2} \bar{\sigma}_{c1}^{n-1} \bar{\sigma}_{r\theta1}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{r2} &= \frac{3}{4} \bar{\sigma}_{c1}^{n-1} \left[(n-1) \frac{\bar{\sigma}_{c12}}{\bar{\sigma}_{c1}^2} (\bar{\sigma}_{r1} - \bar{\sigma}_{\theta1}) + (\bar{\sigma}_{r2} - \bar{\sigma}_{\theta2}) \right], \\ \bar{\varepsilon}_{\theta2} &= -\bar{\varepsilon}_{r2}, \\ \bar{\varepsilon}_{r\theta2} &= \frac{3}{2} \bar{\sigma}_{c1}^{n-1} \left[(n-1) \frac{\bar{\sigma}_{c12}}{\bar{\sigma}_{c1}^2} \bar{\sigma}_{r\theta1} + \bar{\sigma}_{r\theta2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

将(13), (14)式代入(12)式, 再代入(3)式得

$$\alpha K_1^n r^{ns_1-2} (f_1 + \eta r^{\Delta s_2} f_2) = 0. \quad (15)$$

要使上式对任意的 r 都成立, 必须

$$f_1 = 0, f_2 = 0.$$

上式的详细表达式就是

$$\tilde{\epsilon}_{;i} - ns_1(ns_1 + 2)\tilde{\epsilon}_{r,1} - 2(ns_1 + 1)\tilde{\epsilon}_{r,\theta_1} = 0, \tag{16}$$

$$\tilde{\epsilon}_{;2} - (ns_1 + \Delta s_2)(ns_1 + \Delta s_2 + 2)\tilde{\epsilon}_{r,2} - 2(ns_1 + \Delta s_2 + 1)\tilde{\epsilon}_{r,\theta_2} = 0. \tag{17}$$

对于 I 型问题和裂纹面上无荷载的情况, (16), (17) 式都有边界条件

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\phi}^*(0) = 0, \quad \tilde{\phi}^{***}(0) = 0, \\ \tilde{\phi}^*(\pi) = 0, \quad \tilde{\phi}^*(\pi) = 0. \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

此外还需补充一个条件

$$\tilde{\phi}(0) = 1, \tag{19}$$

(16)–(19) 式组成了渐近解的定解方程。

三、方程求解

(16), (18), (19) 式的解就是 HRR 奇异解^[2], 特征值为

$$s_1 = -\frac{1}{n+1}. \tag{20}$$

(15) 式中的第一项含有因子 r^{ns_1-2} , 而双调和项含有因子 r^{s_1-2} . 由于 $n > 1, s_1 < 0$, 故 $s_1 - 2 > ns_1 - 2$. 塑性部分第一项 r 的奇异性高于弹性部分第一项, 因此在 $r \rightarrow 0$ 时忽略弹性项是允许的。

可以利用 J 积分来计算塑性应力强度因子 K_1 . 它们的关系为

$$J_1 = \alpha K_1^{n+1} r^{(n+1)s_1+1} I_1.$$

将 (20) 式代入, 得

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \alpha K_1^{n+1} I_1 \\ K_1 &= \left(\frac{J_1}{\alpha I_1} \right)^{\frac{1}{n+1}}. \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

I_1 为积分模量, 它只是 n 的函数^[2]

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{n}{n+1} \tilde{\sigma}_{r1}^{n+1} \cos \theta - [\sin \theta (\tilde{\sigma}_{r1}(\tilde{u}_{\theta_1} - \tilde{u}_{r1}) - \tilde{\sigma}_{r\theta_1}(\tilde{u}_{r1} + \tilde{u}_{\theta_1})) \right. \\ \left. + (ns_1 + 1)(\tilde{\sigma}_{r1}\tilde{u}_{r1} + \tilde{\sigma}_{r\theta_1}\tilde{u}_{\theta_1}) \cos \theta \right\} d\theta. \end{aligned} \tag{22}$$

若 J 积分的积分路径取图 1 所示的闭合迴路 $ABCDEA$, 则有

$$J^* = \int_{ABCDEA} (W dy - \sigma_{ij} n_j u_{i,x} ds) = 0, \tag{23}$$

(23) 式在裂纹面 EA 上积分为零, 在弧 \widehat{AB} 和 \widehat{CDE} 上的积分互相抵消, 最后只剩下

$$\int_{BC} (W dy - \sigma_{ij} n_j u_{i,x} ds) = 0.$$

以上积分导致

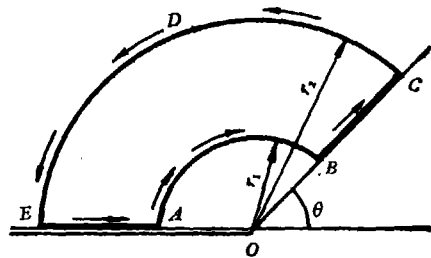


图 1 积分路径

1) 文献 [2] 中补充条件 (19) 为 $\tilde{\sigma}_{\theta_{max}} = 1$.

$$\int_{r_1}^{r_2} r^{-1} \Pi_1(\theta) dr = \Pi_1(\theta) \ln \frac{r_2}{r_1} = 0.$$

于是有王克仁¹⁾提出的公式

$$\begin{aligned} \Pi_1(\theta) = & \frac{n}{n+1} \bar{\sigma}_{r_1}^{n+1} \sin \theta + [\bar{\sigma}_{r_1}(\tilde{u}_{\theta_1} - \tilde{u}_{r_1}) - \bar{\sigma}_{\theta_1} \tilde{\epsilon}_{\theta_1}] \sin \theta \\ & + (1 + ns_1)(\bar{\sigma}_{r_1} \tilde{u}_{r_1} + \bar{\sigma}_{\theta_1} \tilde{u}_{\theta_1}) \cos \theta = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

(24)式可用来检验计算结果。我们计算出的(16),(18),(19)式的数值解相当精确地满足(24)式。

将(14)式代入(17)式,可得到一个变系数的线性常微分方程

$$A_1 \tilde{\phi}_2'' + A_2 \tilde{\phi}_2''' + A_3 \tilde{\phi}_2'''' + A_4 \tilde{\phi}_2'''' + A_5 \tilde{\phi}_2'''' = 0, \quad (25)$$

$A_1 \sim A_5$ 是 $s_1, \Delta s_2, \tilde{\phi}_1$ 及其各阶导数的函数,它们是

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 3(n-1) \bar{\sigma}_{r_1}^4 \tilde{S}_{r_1}^2 + \bar{\sigma}_{r_1}^6, \\ A_2 &= \frac{3}{2} \alpha_1 \tilde{S}_{r_1} + \alpha_3 + \alpha_6, \\ A_3 &= \frac{3}{2} [\alpha_2 \tilde{S}_{r_1} + \alpha_1 \tilde{S}_{r_1}'] + \alpha_7 + 3(s_1+1)(s_2+1) \alpha_1 \tilde{\phi}_1 + \alpha_4, \\ A_4 &= -s_2(s_2+2) \left(\frac{3}{2} \alpha_1 \tilde{S}_{r_1} + \alpha_6 \right) + 3(s_1+1)(s_2+1) \\ &\quad \times (\alpha_2 \tilde{\phi}_1 + \alpha_1 \tilde{\phi}_1'), \\ A_5 &= -s_2(s_2+2) \left[\frac{3}{2} (\alpha_2 \tilde{S}_{r_1} + \alpha_1 \tilde{S}_{r_1}') + \alpha_7 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= 2(n-1) \bar{\sigma}_{r_1}^2 [(n-3)(\bar{\sigma}_{r_1}^2)' \tilde{S}_{r_1} + 2\bar{\sigma}_{r_1}^2 \tilde{S}_{r_1}'] \\ &\quad + 2(ns_1+1+\Delta s_2)(s_1+1) \bar{\sigma}_{r_1}^2 \tilde{\phi}_1, \\ \alpha_2 &= (n-1) \left\{ (n-3) \left[\frac{n-5}{2} (\bar{\sigma}_{r_1}^2)'' + \bar{\sigma}_{r_1}^2 (\bar{\sigma}_{r_1}^2)''' \right] \tilde{S}_{r_1} + 2\bar{\sigma}_{r_1}^2 \tilde{S}_{r_1}'' \right. \\ &\quad + 2(n-3) \bar{\sigma}_{r_1}^2 (\bar{\sigma}_{r_1}^2)' \tilde{S}_{r_1}' - 2(ns_1+\Delta s_2)(ns_1+2+\Delta s_2) \bar{\sigma}_{r_1}^2 \tilde{S}_{r_1}''' \\ &\quad \left. + 4(ns_1+1+\Delta s_2)(s_1+1) \left[\frac{n-3}{2} \bar{\sigma}_{r_1}^2 (\bar{\sigma}_{r_1}^2)' \tilde{\phi}_1 + \bar{\sigma}_{r_1}^2 \tilde{\phi}_1' \right] \right\}, \\ \alpha_3 &= 6(s_1+1)(s_2+1)(n-1) \tilde{\phi}_1 \bar{\sigma}_{r_1}^4 \tilde{S}_{r_1}, \\ \alpha_4 &= 4(s_2+1) \bar{\sigma}_{r_1}^4 [(ns_1+1+\Delta s_2) \bar{\sigma}_{r_1}^2 + 3(n-1)(s_1+1) \tilde{\phi}_1 \tilde{S}_{r_1}] \\ &\quad - s_2(s_2+2) \bar{\sigma}_{r_1}^4 [3(n-1) \tilde{S}_{r_1}^2 + \bar{\sigma}_{r_1}^2], \\ \alpha_5 &= 2(n-1)(s_2+1) \bar{\sigma}_{r_1}^4 [(ns_1+1+\Delta s_2)(\bar{\sigma}_{r_1}^2)' + 3(s_1+1) \tilde{\phi}_1 \tilde{S}_{r_1}'] \\ \alpha_6 &= (n-1) \bar{\sigma}_{r_1}^4 [(\bar{\sigma}_{r_1}^2)' + 6\tilde{S}_{r_1} \tilde{S}_{r_1}'], \\ \alpha_7 &= \bar{\sigma}_{r_1}^2 \left\{ (n-1) \left[\frac{1}{4} (n-3)(\bar{\sigma}_{r_1}^2)'' + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{r_1}^2 (\bar{\sigma}_{r_1}^2)''' \right] \right. \\ &\quad \left. + 3\bar{\sigma}_{r_1}^2 \tilde{S}_{r_1} \tilde{S}_{r_1}'' \right\} - (ns_1+\Delta s_2)(ns_1+2+\Delta s_2) \bar{\sigma}_{r_1}^4 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

1) 王克仁,中国科学院力学研究所研究报告, 1984.

$$\tilde{\sigma}_{r1} = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{r1} - \bar{\sigma}_{\theta1}). \tag{28}$$

(25), (18), (19) 式组成了求解 $\Delta s_2, \tilde{\phi}_2$ 的定解方程. 用差分法可把 (25), (18) 式化为差分方程组, 这是一个线性齐次方程组, 能使该方程组系数行列式为零的 Δs_2 就是所求的特征值.

现在还需要考虑是否塑性部分第二项的奇异性仍高于弹性部分第一项, 如果是, 则在 $r \rightarrow 0$ 时弹性项仍可忽略, 方程 (17) 可以成立. 这个条件可以写成 $ns_1 - 2 + \Delta s_2 < s_1 - 2$, 也就是 Δs_2 应在 $0 < \Delta s_2 < \frac{n-1}{n+1}$ 范围内.

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } n = 3 \text{ 时, } 0 < \Delta s_2 < 0.5, \\ \text{当 } n = 10 \text{ 时, } 0 < \Delta s_2 < \frac{9}{11}. \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

在 (29) 式范围内假设 Δs_2 , 求出差分方程组行列式的值 \det , 由图 2 可见, \det 在 (29) 式范围内确有零点, 而且 $n = 10$ 的情况还有两个零点, 应取较小的那个值, 因此 (17) 式成立的条件满足. 然后再用龙格-库塔法仔细计算, 得到更为准确的 Δs_2 和特征函数 $\tilde{\phi}_2$ 及其各阶导数. 进一步可算出 $\bar{\sigma}_{r2}, \bar{\sigma}_{\theta2}, \bar{\sigma}_{r\theta2}$ 和 $\bar{\sigma}_{c2} = \bar{\sigma}_{c12}/\bar{\sigma}_{c1}$ 之值 (见表 1 及图 3).

表 1 Δs_2 及初值 $\tilde{\phi}_2'(0)$

n	3	10
Δs_2	0.23841435	0.16071865
$\tilde{\phi}_2'(0)$	3.235636	2.66642

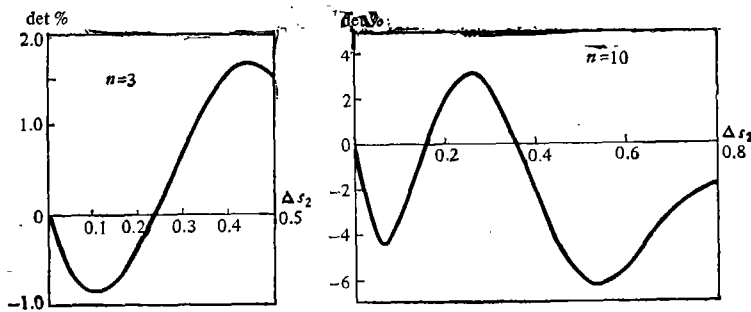


图 2 差分方程组系数行列式之值与 Δs_2 的关系

四、 J 积分及函数 $\Pi(\theta)$ 的考察

若应力函数的表达式取 (7) 式或是更多的项, 则 J 积分也可相应表示为

$$J = J_1 + J_2 r^p + J_3 r^q + \dots \tag{31}$$

如果积分迴路为一个圆, 它的起点和终点分别在上、下裂纹面上, 则 J_1 即为 (21) 式的第一式, 它是个常数^[2]. 又有 $0 < p < q < \dots$, 因此当 $r \rightarrow 0$ 时 $J = J_1$. 根据 J 积分的守恒性知, 对

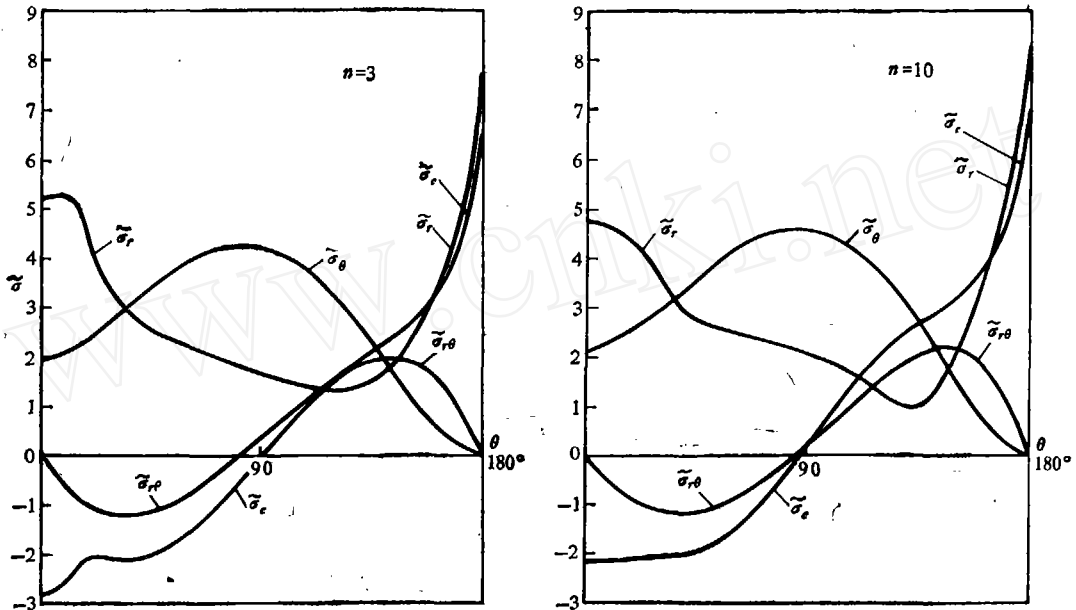


图 3 $\tilde{\sigma}_{r,2}, \tilde{\sigma}_{\theta,2}, \tilde{\sigma}_{r,\theta,2}, \tilde{\sigma}_{\phi,2}$ 的分布(图中省略了下标 2)

于任意的 r 都有

$$J_2 r^p + J_3 r^q + \dots = 0, \tag{32}$$

或

$$J_2 + J_3 r^{q-p} + \dots = 0. \tag{33}$$

当 $r \rightarrow 0$, 就有

$$J_2 = 0. \tag{34}$$

(32)式中的 p 就是 Δs_2 , 取应力函数为公式(7), 则有

$$\begin{aligned} J &= J_1 + J_2 = \alpha K_1^{n+1} r^{(n+1)s_1+1} (I_1 + \eta r^{\Delta s_2} I_2) \\ &= \alpha K_1^{n+1} (I_1 + \eta r^{\Delta s_2} I_2) = \alpha K_1^{n+1} I_1. \end{aligned} \tag{35}$$

因此有

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \{ n \tilde{\sigma}_{r,1}^{n-1} \tilde{\sigma}_{r,2} \cos \theta - \sin \theta [\tilde{\sigma}_{r,1} (\tilde{u}_{\theta 2} - \tilde{u}_{r,2}) \\ &\quad + \tilde{\sigma}_{r,2} (\tilde{u}_{\theta 1} - \tilde{u}_{r,1}) - (\tilde{\sigma}_{r,\theta 1} \tilde{\epsilon}_{\theta 2} + \tilde{\sigma}_{r,\theta 2} \tilde{\epsilon}_{\theta 1})] - \cos \theta [(n s_1 + 1) (\tilde{\sigma}_{r,2} \tilde{u}_{r,1} \\ &\quad + \tilde{\sigma}_{r,\theta 2} \tilde{u}_{\theta 1}) + (n s_1 + 1 + \Delta s_2) (\tilde{\sigma}_{r,1} \tilde{u}_{r,2} + \tilde{\sigma}_{r,\theta 1} \tilde{u}_{\theta 2})] \} d\theta = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

式中 $\tilde{u}_{r,1}, \tilde{u}_{r,2}, \tilde{u}_{\theta 1}, \tilde{u}_{\theta 2}$ 按下式定义:

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \int e_r dr = \alpha K_1^n r^{n s_1+1} (\tilde{u}_{r,1} + \eta r^{\Delta s_2} \tilde{u}_{r,2}), \\ u_r &= \alpha K_1^n r^{n s_1+1} (\tilde{u}_{r,1} + \eta r^{\Delta s_2} \tilde{u}_{r,2}), \\ u_\theta &= r \int r^{-1} (2 \tilde{\epsilon}_{r,\theta} - r^{-1} u_r) dr \\ &= \alpha K_1^n r^{n s_1+1} (\tilde{u}_{\theta 1} + \eta r^{\Delta s_2} \tilde{u}_{\theta 2}). \end{aligned} \right\} \tag{37}$$

且

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_{r1} &= \frac{\tilde{\epsilon}_{r1}}{ns_1 + 1}, & \tilde{u}_{\theta1} &= \frac{2\tilde{\epsilon}_{r\theta1} - \tilde{u}_{r1}}{ns_1}, \\ \tilde{u}_{r2} &= \frac{\tilde{\epsilon}_{r2}}{ns_1 + \Delta s_2 + 1}, & \tilde{u}_{\theta2} &= \frac{2\tilde{\epsilon}_{r\theta2} - \tilde{u}_{r2}}{ns_1 + \Delta s_2}, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

与推导 $\Pi_1(\theta)$ 的过程相仿, 可推出在半径方向 J 积分的被积函数 $\Pi(\theta)$ 的第二项为

$$\begin{aligned} \Pi_2(\theta) &= n\tilde{\sigma}_{r1}^{-1}\tilde{\sigma}_{e12}\sin\theta + \sin\theta[\tilde{\sigma}_{r\theta1}(\tilde{u}_{\theta1} - \tilde{u}_{r1}) \\ &+ \tilde{\sigma}_{r\theta2}(\tilde{u}_{\theta2} - \tilde{u}_{r2}) + (ns_1 + 1 + \Delta s_2)\tilde{\sigma}_{\theta1}\tilde{u}_{r2} + (ns_1 + 1)\tilde{\sigma}_{\theta2}\tilde{u}_{r1}] \\ &+ \cos\theta[(ns_1 + 1 + \Delta s_2)(\tilde{\sigma}_{r\theta1}\tilde{u}_{r2} + \tilde{\sigma}_{\theta1}\tilde{u}_{\theta2}) \\ &+ (ns_1 + 1)(\tilde{\sigma}_{r\theta2}\tilde{u}_{r1} + \tilde{\sigma}_{\theta2}\tilde{u}_{\theta1})]. \end{aligned} \quad (39)$$

仍考虑图 1 的积分回路, 应力函数表达式取两项, 实施积分(23)式, 得

$$\begin{aligned} J^* &= \left[\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CDE} \right] (W dy - \sigma_i n_i u_{i,x} ds) \\ &= \alpha K_1^{n+1} \left\{ \int_{\pi}^{\theta} (\Sigma_1 + \eta r_1^{\Delta s_1} \Sigma_2) d\theta_1 + \int_{r_1}^{r_2} r^{-1} [\Pi_1(\theta) + \eta r^{\Delta s_2} \Pi_2(\theta)] dr \right. \\ &\quad \left. + \int_{\theta}^{\pi} (\Sigma_1 + \eta r_2^{\Delta s_2} \Sigma_2) d\theta_1 \right\} = 0. \end{aligned}$$

Σ_1, Σ_2 分别为(22),(36)式中的被积函数, 又 $\Pi_1(\theta) = 0$, 故有

$$\int_0^{\pi} \Sigma_2 d\theta_1 + \frac{1}{\Delta s_2} \Pi_2(\theta) = 0. \quad (40)$$

又因 $\int_0^{\pi} \Sigma_2 d\theta_1 = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \Sigma_2 d\theta_1 = \frac{1}{2} I_2 = 0$,

代入(40)式得

$$-\int_0^{\theta} \Sigma_2 d\theta + \frac{1}{\Delta s_2} \Pi_2(\theta) = 0. \quad (41)$$

五、 k_2 的估计

Shih 和 German^[8] 用基于小变形理论的有限单元法, 并利用(1)式的应力应变关系, 对边裂纹弯曲试件 (CBB)、边裂纹拉伸试件 (SECP) 和中心裂纹拉伸试件 (CCP) 进行了分析. 他们计算了 $n = 3, 10, \infty$ 的情况, 裂纹长与板条宽之比 $\frac{a}{b} = 0.5$ 和 0.75 ; Needleman 和 Tvergaard^[10] 则用有限变形理论, 并考虑裂纹为有限宽, 裂尖为半圆形, 对 CBB 和 CCP 试样进行了分析. 他们计算了 $n = 10$ 的情况, $\frac{a}{b} = 0.9$.

由(8)和(21)式不难推得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{y1} &= k_1 \left(\frac{\bar{X}}{\bar{J}/\sigma_0} \right)^{s_1} \tilde{\sigma}_{\theta1}(0), \\ \sigma_{y2} &= k_2 \left(\frac{\bar{X}}{\bar{J}/\sigma_0} \right)^{s_2} \tilde{\sigma}_{\theta2}(0), \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

$$\sigma_y = \sigma_{y1} + \sigma_{y2},$$

σ_y 是在裂纹延长线上垂直方向的正应力, \bar{X} 表示裂纹延长线上的点到裂纹尖端的真实距离,

$\bar{X} = Lr$, \bar{J} 为真实的 J 积分值. k_1, k_2 与 K_1, K_2 的关系为

$$k_1 = \left(\frac{\bar{J}/\sigma_0}{L}\right)^{n_1} K_1, \quad k_2 = \left(\frac{\bar{J}/\sigma_0}{L}\right)^{n_2} K_2, \quad (43)$$

而

$$k_1 = \left(\frac{E}{\alpha\sigma_0 L_1}\right)^{-n_1} \quad (44)$$

是一个只与材料性质有关的量, 而 k_2 还与试件形式, 几何构形与屈服程度有关.

从文献[10]的 $\sigma_y \sim \bar{X}/(\bar{J}/\sigma_0)$ 关系曲线上可以看到(图 4), 在 $\bar{X}/(\bar{J}/\sigma_0) = 1 \sim 2$ 处有一最大值, 再向裂纹顶端逼近时, 曲线就降落下来, 这是裂纹顶端的大变形所致. 因此在 $\bar{X}/(\bar{J}/\sigma_0) < 1 \sim 2$ 的范围内, HRR 奇异解实际上没有意义. 又因为渐近解只适合裂纹尖端小范围的情况, 因此我们拟合时主要照顾 $\bar{X}/(\bar{J}/\sigma_0) = 2 \sim 5$ 的曲线段. 对于 $n = 10, 3$ 的情况, 分别与文献[10], [8]的结果拟合, 材料常数为 $\alpha = 1, \frac{\sigma_0}{E} = 0.002^{(1)}$. 拟合结果见表 2, 3 和图 4

表 2 $n = 10, \frac{a}{b} = 0.9$ 时的 k_2

试样	$C\sigma_0/\bar{J}$	482 及 405	296	195
CBB		0	0	0
CCP		-0.17	-0.23	-0.27

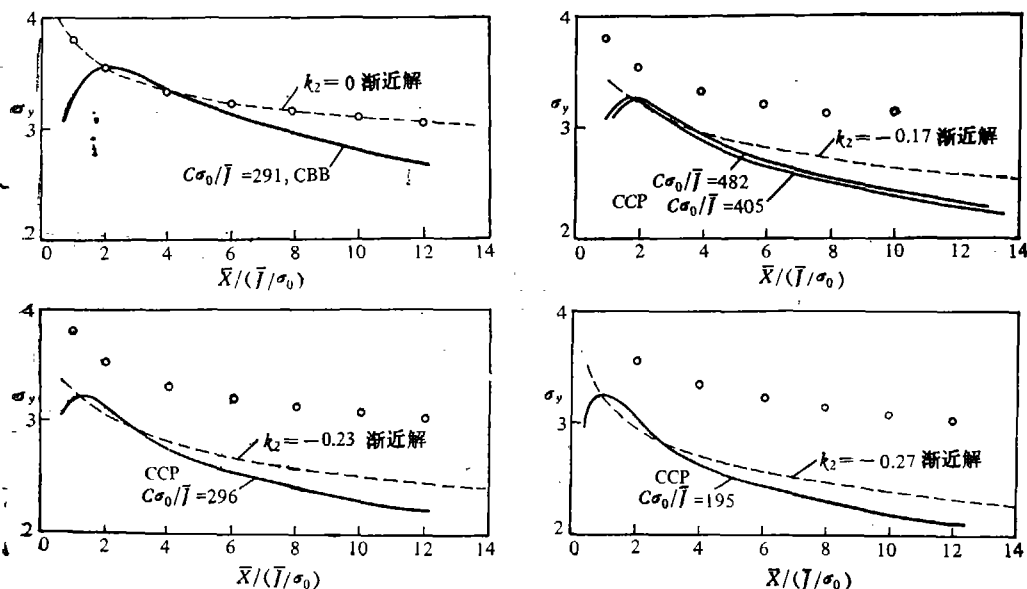


图 4 $n = 10, a/b = 0.9$ 的曲线拟合情况

($\circ \circ \circ \circ$ 为 HRR 奇异解, ----- 为渐近解, —— 为有限元解)

1) 文献[8]中给出 $\alpha = \frac{3}{7}$, 但该文献图中的 HRR 奇异解点似乎是 $n = 3$ 时用 $\alpha = 1, n = 10$ 时 $\alpha = \frac{7}{3}$ 点出. 可能此文叙述有误.

—6, 表中 c 为韧带长度。

表 3 $n = 3$ 时的 k_2

$\frac{a}{b}$	试样	$c\sigma_0/\bar{J}$					
		1200	120	600	200	60	30
0.5	CBB	0	-0.25				
	SECP	-0.2	-0.5				
	CCP	-0.2	-0.67				
0.75	CBB			-0.1	-0.15	-0.25	-0.5
	CCP			-0.3	-0.5	-0.68	-0.8

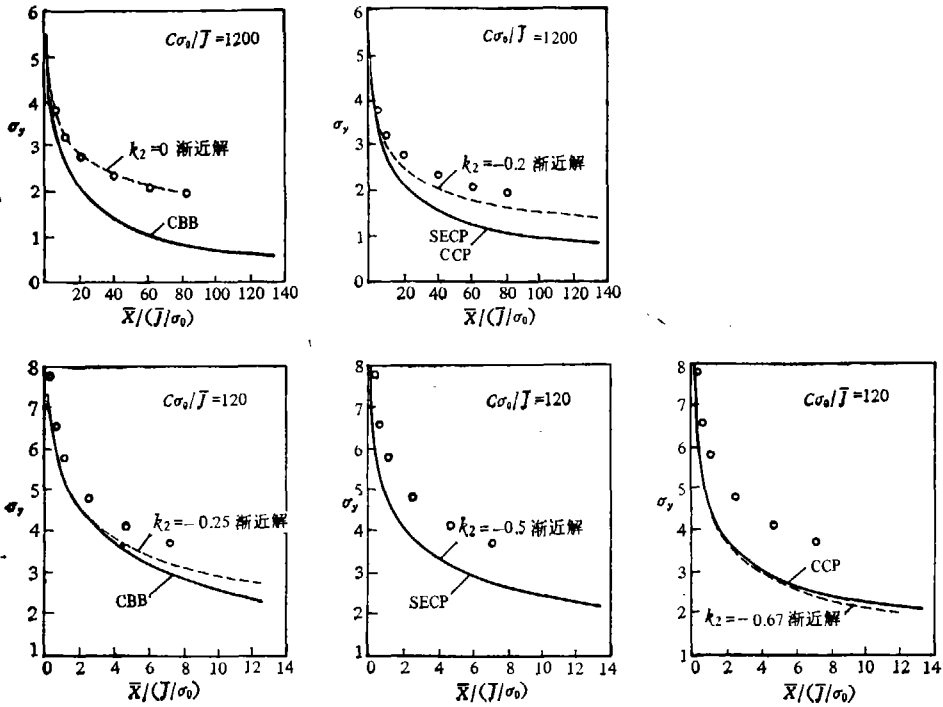


图 5 $n = 3, a/b = 0.5$ 的曲线拟合情况
(说明同图 4)

六、讨 论

从拟合的情况可以看出,与 HRR 奇异解相比,渐近解的第二项非但不是可忽略的高阶小量,而且起着相当大的作用。在 $\bar{X}/(\bar{J}/\sigma_0) = 2 \sim 5$ 的范围内, HRR 奇异解已衰减很多,而第二项的指数 $s_2 = s_1 + \Delta s_2$ 接近于零,该项基本上是常数,因此影响显著。

在我们所研究的几种试件中, k_2 总是负值。由图 4—6 可见,就曲线的拟合范围而论, CCP 试件比 CBB 试件大 (CCP 试件几乎在给出有限元解的整个范围内都拟合得很好), 屈服程度

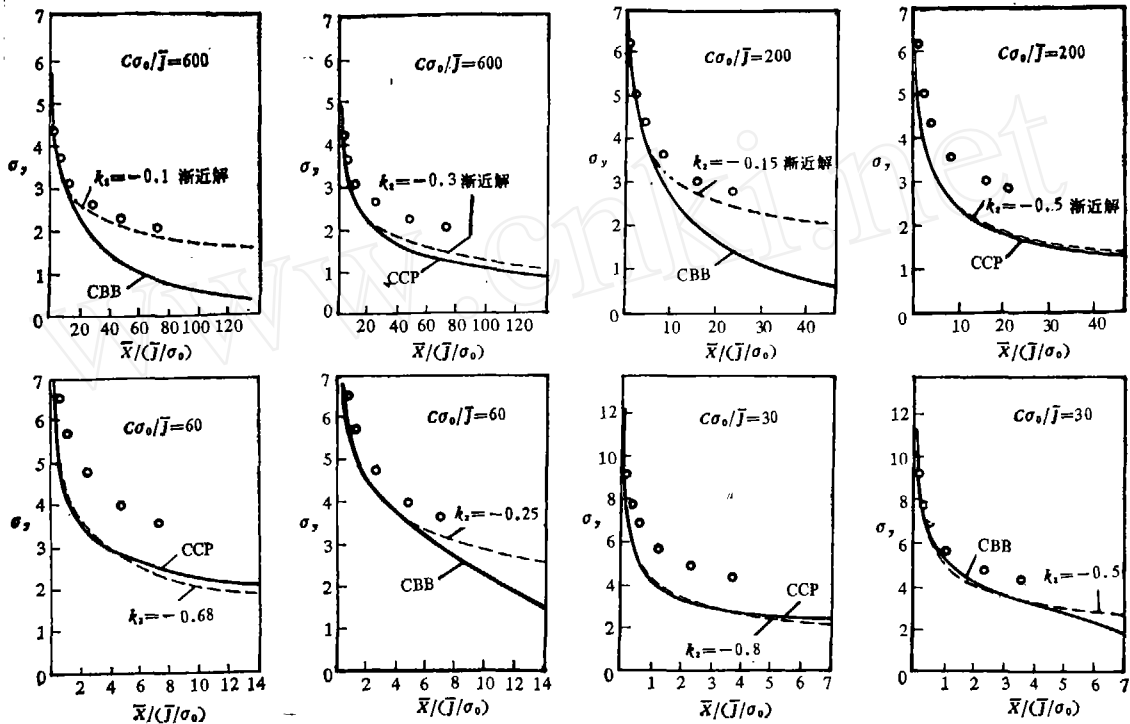


图 6 $n = 3, a/b = 0.75$ 的曲线拟合情况
(说明同图 4)

高的比屈服程度低的大。可以推测,渐近解第二项对 CCP 试件影响较大,对屈服程度较高的影响较大。而对 CBB 试件,在离裂纹尖端较远处二阶渐近解与有限元解仍有较大差别,这可能是因为我们没有考虑渐近解第三项的缘故。然而我们研究的只是裂尖附近小范围的断裂环境,因此在渐近解中考虑前两项可以认为是已经够了。

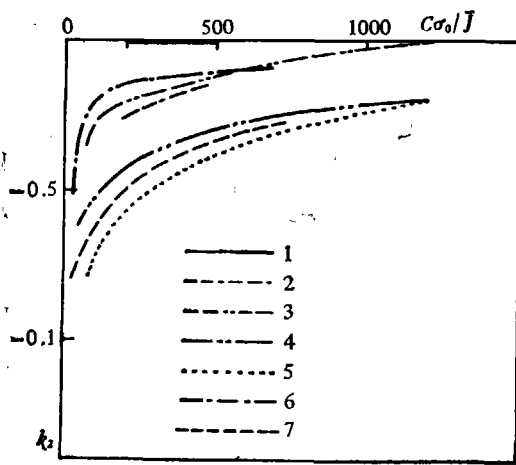


图 7 k_2 的变化

- 1——CBB, $n = 10, a/b = 0.9$, 2——CCP, $n = 10, a/b = 0.9$, 3——CBB, $n = 3, a/b = 0.5$, 4——SECP, $n = 3, a/b = 0.5$, 5——CCP, $n = 3, a/b = 0.5$, 6——CBB, $n = 3, a/b = 0.75$, 7——CCP, $n = 3, a/b = 0.75$

随着屈服程度的提高,塑性区要增大,这时 HRR 奇异解与实际情况有较大的差别,因此 k_2 的绝对值要增大,这个趋势表示在图 7 中。 k_2 与 $\frac{a}{b}, n$ 的关系还不能明显地看出来,但从 CCP 试件的曲线中可以看出 k_2 绝对值随 $\frac{a}{b}$ 增大而减小,并且在同样的屈服程度下,CCP 试件的 k_2 绝对值要比 CBB 试件的大。

表 4, 5 给出了在裂尖前缘 $\bar{X}/(J/\sigma_0) = 2$

表4 $n=10, \frac{a}{b}=0.9$ 时的三轴张力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma$

$\frac{\sigma_2}{\sigma}$ 试件	$c\sigma_0/\bar{\sigma}$	482 及 405	296	195	σ_1
		CBB	0/3.041	0/3.041	
CCP	-0.621/2.42	-0.84/2.201	-0.986/2.055		

表5 $n=3$ 的三轴张力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma$

$\frac{a}{b}$	$\frac{\sigma_2}{\sigma}$ 试件	$c\sigma_0/\bar{\sigma}$	1200	120	600	200	60	30	σ_1
			0.5	CBB	0.0 4.655	-0.89 3.765			
SECP	-0.712 3.943	-1.78 2.875							
CCP	-0.712 3.943	-2.385 2.163							
0.75	CBB			-0.356 4.299	-0.534 4.121	-0.89 3.765	-1.78 2.875		
	CCP			-1.068 3.587	-1.78 2.875	-2.421 2.234	-2.848 1.807		

时的三轴张力, σ_1 是由 HRR 奇异解求出的三轴张力, σ_2 是由渐近解的第二项求出的三轴张力, σ 为总三轴张力。由此也看到了渐近解第二项的重要影响, 尤其是使 CCP 试件的裂尖前缘三轴张力大为减少, 在屈服程度较高的情况下更是如此, 从而失去了高三轴张力状态^[3]。

综上所述, 既然 k_2 对裂尖附近材料的弹塑性行为有相当重要的影响, 那末我们就有理由认为, k_2 可作为判断裂纹起裂的一个重要参数。

七、结 论

原来的 HRR 奇异解在某些情况下与较精确的有限元解有较大的差别, 但在考虑了渐近解的第二项后, 通过调整第二项的幅值系数 k_2 , 可以很好地符合有限元解, 而且试件形式、几何构形和屈服程度等等影响都可通过 k_2 表现出来。

渐近解的第二项对裂纹尖端附近应力应变分布及三轴张力有较大的影响。因此, 除 J 积分外, 它有可能成为另一个特征参数, 这就为建立双参数准则提供了理论基础。

参 考 文 献

- [1] Rice, J. R., *Journal of Applied Mechanics*, 35(1968), 379—386.
- [2] Hutchinson, J. W., *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16(1968), 13—31; 337—347.
- [3] Rice, J. R. and Rosengren, G. F., *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16(1968), 1—12.
- [4] Begley, J. A. and Landes, J. D., in *Fracture Toughness*, ASTM STP, 514(1972), 1—23; 24—39.
- [5] Landes, J. D. and Begley, J. A., *ibid.*, 560(1974), 170—186.

- [6] Shih, C. F., deLorenzi, H. G. and Andrews, W. R., in *Elastic-Plastic Fracture*, ASTM STP, 668(1979), 65—120.
- [7] Shih, C. F. et al., Methodology for Plastic Fracture, 1st through 8th Quarterly Reports, General Electric Company, Schenectady, NY, September 1976—July 1978; also in EPRI Ductile Fracture Review Document, edited by T. U. Marston, EPRI NP-701-SR, February 1978.
- [8] Shih, C. F. and German, M. D., *International Journal of Fracture*, 17(1981), 27—43.
- [9] McMeekin, R. M. and Parks, D. M., in *Elastic-Plastic Fracture*, ASTM STP, 668(1979), 175—194.
- [10] Needleman, A. and Tvergaard, V., in *Elastic-Plastic Fracture*, ASTM, STP, 803(1983) I-80-I-115.
- [11] Wang Tzuchiang, *Proceedings of ICF International Symposium on Fracture Mechanics (Beijing)*, 1983, 243—248.

www.cnki.net