

研究简报

有限单元节点位移约束与释放

张双寅

(中国科学院力学研究所)

Nodal Displacement Constraint and Release in FEM

Zhang Shuangyin

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

1. 引言

在用有限单元法解某些弹性力学问题时,常常需要对域内节点之间的相对位移施加约束条件。例如二维八节点四边形等参元广泛用于断裂力学问题,用坍塌(Collapsed)三角形四分之一节点奇异元计算裂纹应力强度因子。但是,应该指出,这个单元的奇异性依赖于坍塌边三个节点的位移约束条件。若对处于裂纹顶端的三个重迭节点施加位移相同的约束条件后,这个单元的应变场才具有 $1/\sqrt{r}$ 的奇性。这适合于用来计算线弹性断裂力学的应力强度因子。相反,若不施加这一条件,任三个节点自由位移,那么,它的应变场具有 $1/r$ 的奇性,这适合于计算理想塑性材料的裂纹问题^[1]。怎样才能实现对域内节点之间的相对位移施加约束,并在必要的情况下将它释放呢。本文提出一个简单的方法——二力杆约束单元法,并用复合型裂纹扩展与应力强度因子的计算问题作为实例说明这一方法的应用。

2. 约束单元的基本概念

(1) 二力杆约束单元 设有一直杆单元,长度为 l , 横截面面积为 A , 材料的杨氏模量为 E , 将它放置于如图1所示之坐标上。在两端作用轴向力 P_{xi} 与 P_{xj} , 在两端产生之位移为 u_i 与 u_j 。利用能量原理,可以导出节点力和节点位移之间的关系式:

$$\begin{Bmatrix} P_{xi} \\ P_{xj} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (1)$$

二力杆的刚度矩阵 $[K]$ 为

$$[K] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

若把二力杆单元置于 y 坐标方向时,我们得到与公式(1)相似的式子

$$\begin{Bmatrix} P_{y_i} \\ P_{y_j} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (3)$$

当 $EA/l \gg 1$ 时, 公式 (1) 与 (3) 代表刚性二力杆节点力与节点位移关系式。〔 K 〕为刚性约束刚度矩阵。当 $EA/l=0$ 时, 〔 K 〕为零刚度矩阵。

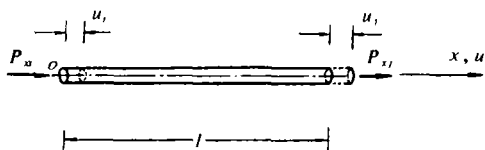


图1 二力杆单元

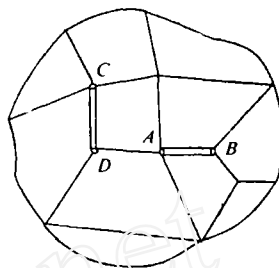


图2 约束单元的装配

(2) 二力杆约束单元与二维问题的装配 设有一个一般的二维问题, 有限元网格如图 2 所示。若我们要求 A, B 二节点之间在 x 方向上的相对位移保持不变, 可以在 A, B 二节点之间装配上一个刚性二力杆约束单元 (1); 同理, 若我们在 C, D 二节点之间装配上一个刚性约束单元 (3), 那么, C, D 二节点之间的 y 方向上的相对位移为零。当要求域内任意二节点 (节点号为 i 与 j) 具有相同的位移时, 我们在 i, j 二节点之间装配上如公式 (1) 与公式 (3) 所示的两个刚性约束单元即可。于是, 我们有

$$u_i = u_j, \quad v_i = v_j \quad (4)$$

3. 算例

这里用等参单元计算短纤维毡 (Chopped Strand Mat) 玻璃钢层间剪切断裂问题作为例子, 说明二力杆约束单元的应用。图 3 绘出了有限元网格, 在层间剪切面上有一条理想裂纹。裂纹周围有 24 个特殊单元, 这些单元的节点位置满足下式^[2]

$$r_2 = \frac{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_3})^2}{4} \quad (5)$$

在裂纹顶端周围有 8 个坍塌三角形四分之一节点奇异元 (图 7)。

(1) 节点位移约束与释放 沿裂纹面各节点为多位移节点, 即可以产生不同位移的节点。这些多位移节点是由二个重叠节点与两个二力杆约束单元装配在一起构成的。当约束单元的刚度系数 $EA/l \gg 1$ 时, 此二重叠节点具有相同位移, 裂纹闭合在一起, 计算裂纹开裂前的变形与应力分布。图 4 表示了裂纹开裂前的变形形状。当 $EA/l=0$ 时, 约束条件释放, 可以计算裂纹开裂后的变形。逐个释放节点约束, 可以得到裂纹扩展过程, 图 5 是裂纹扩展过程中的一个图形。

(2) 应力强度因子的计算 图 3 所示之网格, 在裂纹顶点共有 16 个坍塌节点重叠在一起。为了使这些三角形单元的应变场具有 $1/\sqrt{r}$ 的奇性, 对这 16 个节点施加了位移相同的约束条件。变形后的图形表示于图 6。不施加位移相同约束条件的变形图象与图 6 大致相同。

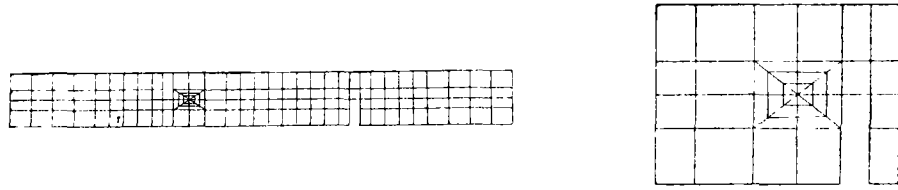


图 3

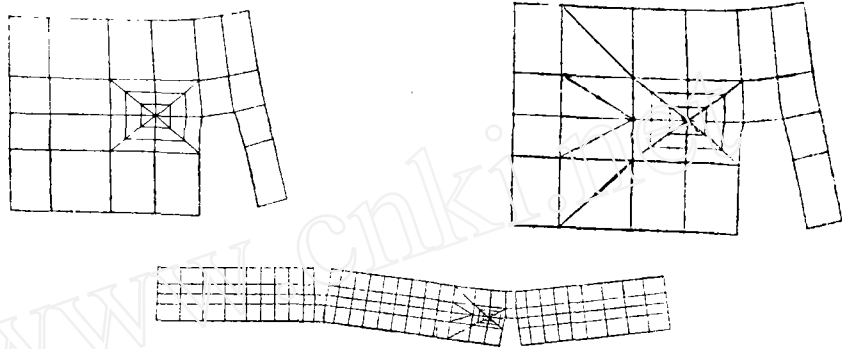


图 4

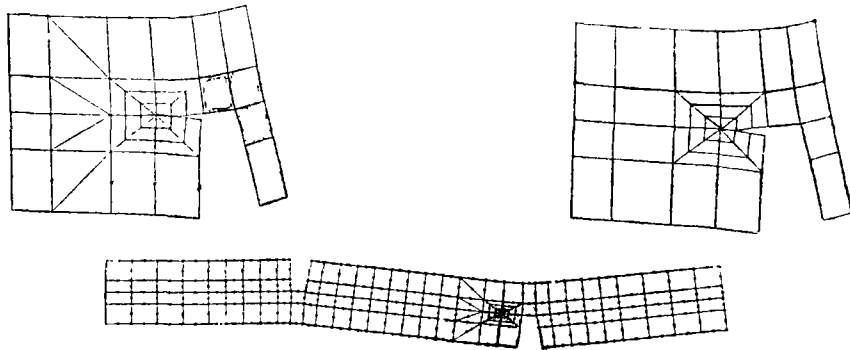


图 5

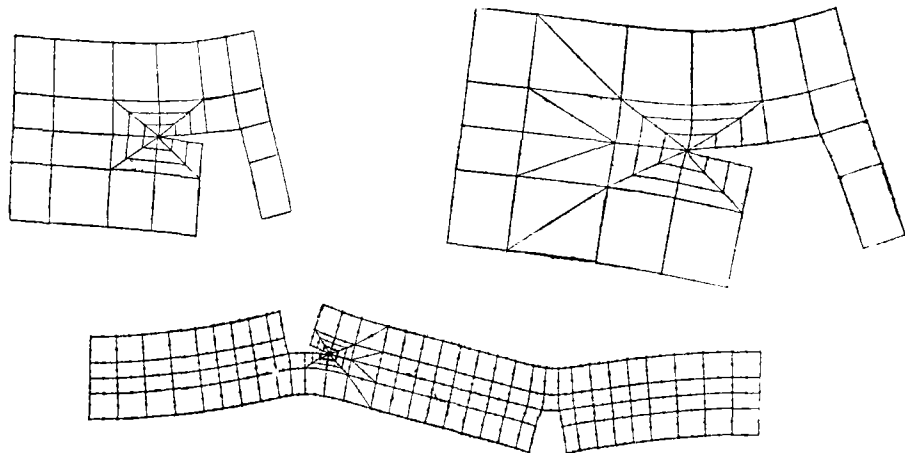


图 6

用对应于图 6 的位移场计算了复合型应力强度因子 K_{I} 与 K_{II} ，用各向同性与正交异性两种材料模型进行了计算。着重对比了施加与不施加位移相同条件对计算值的影响。

由有限元位移场计算应力强度因子，可以使用线性外插法^[2]，但是，这个方法有较大的随意性，不适合本文的需要。这里采用文献〔3〕介绍的公式。

对各向同性材料

$$K_{\text{I}} = \frac{2G\sqrt{2\pi}}{k+1} \left\{ \frac{4U_{\theta B} - U_{\theta C}}{\sqrt{a}} \right\} \quad (6)$$

$$K_{\text{II}} = \frac{2G\sqrt{2\pi}}{k+1} \left\{ \frac{4U_{rB} - U_{rC}}{\sqrt{a}} \right\}$$

其中 G 是剪切模量， $G = E/[2(1+\nu)]$ ； k 是与泊松比有关的常数，对于平面应变问题： $k = 3 - 4\nu$ ，对于平面应力问题： $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ 。

对于正交异性材料：

$$K_{\text{I}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{F_{\text{I}}} \left\{ \frac{4U_{\theta B} - U_{\theta C}}{\sqrt{a}} \right\} \quad (7)$$

$$K_{\text{II}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{F_{\text{II}}} \left\{ \frac{4U_{rB} - U_{rC}}{\sqrt{a}} \right\}$$

其中 F_{I} 与 F_{II} 是依赖于材料常数的因子，从文献〔4〕中可以推导出计算 F_{I} 与 F_{II} 的公式，由于式子很繁，本文从略。公式（6）与（7）中的 a 是三角元边长， $U_{\theta B}$ 、 $U_{\theta C}$ 、 U_{rB} 与 U_{rC} 分别为 B 与 C 二点的周向位移与径向位移（请参看图 7）。这两个公式是从构造奇异元的公式中推导出来的，所以可以给出较精确的结果。

用两种材料模型对图 6 所示的 CSM 玻璃钢的复合应力强度因子 K_{I} 与 K_{II} 进行了计算。各向同性模型的材料常数为 $E = 7.0\text{GPa}$ ， $\nu = 0.34$ ；而正交异性模型的材料常数为 $E_{11} = 9.81\text{GPa}$ ， $E_{22} = 5.20\text{GPa}$ ， $\nu_{12} = 0.34$ ， $G_{12} = 1.43\text{GPa}$ 。

计算结果列于表 1，由表中数值可知，关于 K_{II} 的计算结果，有位移相同约束条件与无这个条件二者之差为 8.8%，这个差别是不容忽视的。

图 4，5，6 中，绘出了两种有限元网格局部放大图，二者稍有差别，但并不影响计算结果。

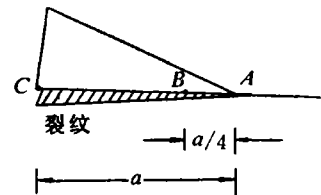


图 7 四分之一节点元

两种约束条件下 K_I 与 K_{II} 计算值

表 1

应力强度因子	约束条件	各向同性	正交异性
$\frac{K_I}{\sigma_\infty \cdot \sqrt{c}}$	施加位移相同条件	1.27	1.383
	各节点自由	/	1.386
$\frac{K_{II}}{\sigma_\infty \cdot \sqrt{c}}$	施加位移相同条件	2.80	2.285
	各节点自由	/	2.488

c 为裂纹长度。

参 考 文 献

- [1] Barsom, R. S., Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements, *IJNME*, 11 (1977), 85—98.
- [2] Wang Kejen, Hsu Chilin and Kao Hua, Calculation of stress intensity factors for combined mode bend specimens, *Advances in research on strength and fracture of materials*, 4 (1978), 123.
- [3] Shih, C. F., De Lorenzi, H. G. and German, M. D., Crack extension modelling with singular quadratic isoparametric elements, *Int. J. Fracture*, 12 (1976), 647—651.
- [4] Wang, S. S., Yau, J. F. and Corten, H. T., A mixed-mode crack analysis of rectilinear anisotropic solids using conservation laws of elasticity, *Inter. J. Fracture*, 16 (1980), №.3, June.