

地转涡内层结构解

凌国灿 李显霖

(中国科学院力学研究所) (航天部五院计算中心)

摘要 利用多重尺度渐近理论,考虑地转涡中心附近的粘性力,得到涡心附近有一个 αS 量级的涡核结构。其中速度、大气自由面的高度均为有限值分布且随时间变化。克服了无粘地转涡理论在 $r \rightarrow 0$ 时速度为无穷大、大气高度趋于负无穷大的奇性。

一、引言

Morikowa^[1] 提出一个二维、无粘、不可压缩的地转涡理论并用它预计在海洋上空完全发展成熟的台风的移动路径。这个模型将大气看作具有自由表面的、密度不变的、无粘的一个均匀大气层。在流体静力平衡假设及地转近似假设下,用小参数展开法得到渐近解。该模型引进大气自由面高度 h 为

$$h = h_{00} + \alpha h' + \dots \quad (1)$$

其中 h_{00} 为常值。特征速度 U 与 $\sqrt{gh_{00}}$ 相比为小量 α , 即 $\alpha = U/\sqrt{gh_{00}} \ll 1$ 。扰动量 h' 与流函数关系是

$$(g/f)h' = \phi_1(r) + \phi^*(\mathbf{X}, t) \quad (2)$$

其中 f 为科里奥利力参数, $\mathbf{X}(t)$ 为地转涡空间位置, ϕ^* 为地转涡背景流场, 而 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{X}|$ 。所得地转涡的首项解 $\phi_1(r)$ 为

$$\phi_1(r) = -\frac{\Gamma}{2\pi} K_0(kr) \quad (3)$$

其中 K_0 为第二类修正的 Bessel 函数, $k^2 = f^2/gh_{00}$ 。

上述 Morikowa 理论,当 $r \rightarrow 0$ 时 K_0 具有对数奇性 ($\ln r$), 而 $\frac{\partial \phi_1}{\partial r}$ 具有 $\frac{1}{r}$ 奇性。在物理上表示大气自由面高度要变为负无穷大而流体的速度趋于无穷大。这种奇性与实际情况不符。

本文将证明,当考虑了涡心附近的粘性影响并利用多重尺度的渐近理论以后,上述缺陷可以得到克服。在远离涡心处地转涡解趋于无粘解而近涡心处地转涡有一个随时间变化的涡核结构,其中速度分布和大气高度均为有限值。本文所采用的方法与解决二维无粘位势涡的奇性^[2]的方法类同。本文将该方法推广到包括有重力、科氏力情况的地转涡问题。

本文于 1984 年 12 月 22 日收到, 1985 年 10 月 25 日收到修改稿。

二、地转涡内外层结构及内层控制方程

由式(3)可知,周向速度 v 与 r 呈 $v \sim 1/r$ 的关系,因此在近涡心处速度梯度很大,粘性不能忽略. 如果是湍流情况则应考虑湍流粘性力. 因此,对于大气中的地转涡运动,尤其在涡心附近,除了要考虑重力、科氏力以外,还须考虑粘性作用. 为了把实际上很复杂的大气运动分解开来考虑,本文仍局限于研究地球切平面上的一个二维、有自由面的、不可压而气体为各向同性的地转涡运动. 在垂直方向上假设流体静力平衡成立,不考虑垂直方向上的流动以及旋涡与外界的能量交换. 设坐标原点取在运动的涡心上,则相对运动在柱坐标中的运动控制方程为:

连续方程

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{h}{r} \left(\frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = 0$$

r 方向动量方程:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + g \frac{\partial h}{\partial r} - f[v + \dot{X}_\theta] + \ddot{X}_r \\ & = \nu_{(T)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

θ 方向动量方程

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + \frac{g}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + f[u + \dot{X}_r] + \ddot{X}_\theta \\ & = \nu_{(T)} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right) \end{aligned}$$

其中 u 、 v 分别表示径向及周向速度分量; \dot{X}_θ 、 \ddot{X}_θ 、 \ddot{X}_r 分别表示旋涡运动速度及加速度在周向和径向上的分量; $\nu_{(T)}$ 为粘性系数,在湍流情况它表示湍流涡度粘性系数,此时速度 u 、 v 理解为湍流平均量.

为了反映涡心附近的流动结构,在首项控制方程中出现粘性项的作用,需将地转涡分为内层和外层两层流动并放大内层坐标. 若设 S 为外层流动的特征长度,则内层的特征长度应为 αS , αS 即为地转涡核的尺度. 内层坐标是以 $1/\alpha$ 因子放大. 外层流动的特征速度是 $\alpha \sqrt{gh_{00}}$, 内层流动的速度量级可为 $\sqrt{gh_{00}}$, 而自由面的高度内外层均可相同的量级,即 $O(h_{00})$. 外层流动的特征时间为 $S/\alpha \sqrt{gh_{00}}$. 为了研究内层涡核结构随时间的衰变情况,本文采用比外层流动小一个量级的时间尺度,即 $S/\sqrt{gh_{00}}$. 因此内层流动的无量纲量可有下列定义:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= r/\alpha S, \quad \bar{u} = u/\sqrt{gh_{00}}, \quad \bar{v} = v/\sqrt{gh_{00}}, \quad \bar{t} = t/(S/\sqrt{gh_{00}}) \\ \text{而无量纲涡心运动速度为 } \bar{X} &= |\dot{X}|/\sqrt{gh_{00}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

利用上述定义将方程(4)无量纲化,得内层流动的控制方程组

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\alpha \bar{r}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} + \frac{\bar{h}}{\alpha \bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{r} \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right) = 0 \\ & \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\alpha \bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} - \frac{\bar{v}^2}{\alpha \bar{r}} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{r}} - \frac{fS}{\sqrt{gh_0}} [\bar{v} + \dot{X}_\theta] + \ddot{X}_r \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &= \frac{\nu_T \alpha^{-2}}{S \sqrt{gh_0}} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \theta^2} - \frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} - \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}}{\alpha} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\alpha \bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\bar{u} \bar{v}}{\alpha \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} + \frac{fS}{\sqrt{gh_0}} (\bar{u} + \dot{X}_r) + \ddot{X}_\theta & \\ &= \frac{\nu_T \alpha^{-2}}{S \sqrt{gh_0}} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \theta^2} - \frac{\bar{v}}{\bar{r}^2} + \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

上述方程组的定解条件分别是：

边界条件

$$\bar{r} = 0, \bar{u} = \bar{v} = 0 \quad (6b)$$

匹配条件

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} \rightarrow \infty, (\dot{X}_i + \dot{Y}_j + \bar{u} \hat{r} + \bar{v} \hat{\theta})_{r \rightarrow \infty} &= \left\{ \begin{aligned} &(-\bar{\varphi}_y^* \sin \theta - \bar{\varphi}_x^* \cos \theta) \hat{\theta} \\ &+ (\bar{\varphi}_y^* \cos \theta - \bar{\varphi}_x^* \sin \theta) \hat{r} + \frac{\alpha \bar{\Gamma}}{2\pi r} \hat{\theta} \end{aligned} \right\}_{r \rightarrow \infty} \\ \text{故有} & \\ \bar{u} = (\bar{\varphi}_y^* - \dot{X}) \cos \theta - (\bar{\varphi}_x^* + \dot{Y}) \sin \theta, \bar{v} &= (-\bar{\varphi}_y^* + \dot{X}) \sin \theta \\ &- (\bar{\varphi}_x^* + \dot{Y}) \cos \theta + \frac{\bar{\Gamma}}{2\pi r} \\ \bar{h} \rightarrow 1, \bar{\Gamma} = \Gamma / S \sqrt{gh_{00}}. & \end{aligned} \right\} \quad (6c)$$

其中

初始条件： $\bar{r} = 0, \bar{u}, \bar{v}$ 给定。

参考匹配条件 (6c)，内层物理量可作如下的摄动展开：

$$\bar{u} = \alpha \bar{u}_1 + \alpha^2 \bar{u}_2 + \dots, \bar{v} = \bar{v}_0 + \alpha \bar{v}_1 + \alpha^2 \bar{v}_2 + \dots, \bar{h} = \bar{h}_0 + \alpha \bar{h}_1 + \alpha^2 \bar{h}_2 + \dots \quad (7)$$

这种展开可使周向速度的首项与外层无粘地转涡的结果相匹配。在方程组 (6a) 中所出现的一些无量纲组合量，对它们的量级作如下的估计是合理的：

$$\left. \begin{aligned} fS / \sqrt{gh_{00}} &= O(1) \\ |\dot{X}| / \sqrt{gh_{00}} &= O(\alpha) \\ |\dot{X}^*| / \sqrt{gh_{00}} &= O(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

组合参数 $S \sqrt{gh_{00}} / \nu_T$ 实际上是一种雷诺数，在首项内解方程中要反映粘性的作用应假设它有 $O(\alpha^{-2})$ 的量级，或定义

$$R_{eT} = \frac{\alpha^2 S \sqrt{gh_{00}}}{\nu_T} = O(1). \quad (9)$$

利用摄动展开式 (7) 以及量级估计式 (8) (9)，从方程 (6a) 可得 α 各阶系数对应的各阶控制方程。为以后书写方便，现将内解变量上的一横去掉， α^{-1} 的系数对应的方程有：

$$\frac{v_0}{r} \frac{\partial h_0}{\partial \theta} + \frac{h_0}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} = 0 \quad (10a)$$

$$\frac{v_0^2}{r} - \frac{\partial h_0}{\partial r} = 0 \quad (10b)$$

$$\frac{v_0}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial h_0}{\partial \theta} = 0 \quad (10c)$$



α^0 系数对应的方程有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_0}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} \frac{\partial h_1}{\partial \theta} + \frac{h_0}{r} \frac{\partial (ru_1)}{\partial r} + \frac{h_0}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{v_0}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{2v_0 v_1}{r} + \frac{\partial h_1}{\partial r} - \frac{fS}{\sqrt{gh_0}} v_0 &= 0 \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{u_1 v_0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial h_1}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{Re_T} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{v_0}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

同样还可得 α' 及更高阶的控制方程。利用展开式 (7) 从边界条件及匹配条件 (6b) (6c) 可分别得到首项及一阶项等等对应的定解条件, 它们分别是:

$$r = 0 \quad v_0 = 0 \quad (12a)$$

$$v_1 = u_1 = 0 \quad (12b)$$

$$r \rightarrow \infty \quad v_0 = \bar{r}/2\pi r, \quad h_0 = 1 \quad (12c)$$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= -(\dot{\phi}_y^* - \dot{X}) \sin \theta - (\phi_x^* + \dot{Y}) \cos \theta \\ u_1 &= (\phi_y^* - \dot{X}) \cos \theta - (\phi_x^* + \dot{Y}) \sin \theta, \quad h_1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12d)$$

三、首项内解控制方程

由匹配条件 (12c) 及边界条件 (12a) 可知, 首项物理量应与 θ 无关, 即 $\frac{\partial u_0}{\partial \theta} = \frac{\partial h_0}{\partial \theta} = 0$, 此时 α^{-1} 的系数方程 (10) 中除了第二式以外均能自动满足。因此必须从 α^0 的系数方程式 (11) 中去寻找首项解的控制方程。为此, 从方程 (11) 中消去 u_1 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{Re_T} \frac{rh_0}{\zeta_0} \frac{\partial \zeta_0}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{rh_0}{\zeta_0} \frac{\partial v_0}{\partial t} \right) + \frac{\partial rh_0}{\partial t} \\ = \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h_0 v_0}{\zeta_0} \right) + \frac{h_0 v_0}{\zeta_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h_0}{\zeta_0} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \theta} \\ + \frac{h_0}{\zeta_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial h_1}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} (v_0 h_1 + h_1 v_0) \end{aligned} \quad (13)$$

对上述方程各项取周向积分 $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\) d\theta$, 注意到流场中不存在点泉或点汇, 各物理量应是单值连续函数, 故上述方程中的右端项的周向积分应为零, 而左端部分均为与 θ 无关的对称部分, 它与式 (10b) 联立给出了内解的控制方程组, 定义了涡核结构:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{rh_0}{\zeta_0} \left(\frac{1}{Re_T} \frac{\partial \zeta_0}{\partial r} - \frac{\partial v_0}{\partial t} \right) \right\} &= - \frac{\partial rh_0}{\partial t} \\ \frac{\partial h_0}{\partial r} = \frac{v_0^2}{r}, \quad \zeta_0 &= \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} \end{aligned} \quad (14)$$

边界和匹配条件应是式 (12a) 及 (12c), 初始条件 $t = 0$ 时 $v_0(r, 0)$ 应该给定。

四、涡核结构数值解

方程组 (14) 为一非线性偏微分方程组, 本文用有限差分法进行初边值问题数值解, 为

了建立差分方程, 方程组 (14) 可改写为如下形式:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{Re_T} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial t} \right) \left(1 + \frac{r}{h} \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{r}{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) \\ & + r \left(\frac{1}{Re_T} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial r} \right) = - \frac{r \zeta}{h} \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{v^2}{r}$$

对于上述方程各项, 对时间导数采用前差分格式, 对空间导数采用六点对称格式或中心差分格式, 故有:

$$\begin{aligned} \zeta_j &= \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right)_j = \frac{1}{4(\Delta r)} [v_{j+1} - v_{j-1} + v_{j+1}^n - v_{j-1}^n] + \frac{1}{2r_j} [v_j + v_j^n] \\ \left(\frac{\partial \zeta}{\partial r} \right)_j &= \frac{1}{2(\Delta r)^2} [v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1} + v_{j-1}^n - 2v_j^n + v_{j+1}^n] \\ &+ \frac{1}{r_j} - \frac{1}{4(\Delta r)} [v_{j+1} - v_{j-1} + v_{j+1}^n - v_{j-1}^n] - \frac{1}{2r_j^2} [v_j + v_j^n] \\ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} \right)_j &= \frac{1}{4(\Delta r)^3} [v_{j+2} - 2v_{j+1} + 2v_{j-1} - v_{j-2} + v_{j+2}^n - 2v_{j+1}^n \\ &+ 2v_{j-1}^n - v_{j-2}^n] + \frac{1}{2r_j(\Delta r)^2} [v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1} + v_{j-1}^n \\ &- 2v_j^n + v_{j+1}^n] - \frac{1}{2r_j^2(\Delta r)} [v_{j+1} - v_{j-1} + v_{j+1}^n - v_{j-1}^n] \\ &+ \frac{1}{r_j^3} [v_j + v_j^n] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial r} \right)_j &= \frac{-1}{2\Delta r \Delta t} [v_{j+1} - v_{j-1} - v_{j+1}^n + v_{j-1}^n] \\ \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_j &= \frac{1}{\Delta t} (v_j - v_j^n), \quad \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_j = \frac{1}{\Delta t} (h_j - h_j^n) \\ \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)_j &= \frac{(h_{j+1} - h_{j-1})}{2\Delta r}, \quad h_j = \frac{1}{2} (h_j + h_j^n) \end{aligned}$$

$$j = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$$

上述诸式中 j 表示空间第 j 个格点, 右上角标 n 表示第 n 时刻. 为书写简便, 表示第 $n+1$ 时刻的物理量右上角标 $n+1$ 可略去不写, 直接写为 v_j, h_j 等等. 用上述差分方法, 微分方程 (15) 的有限差分方程组为:

$$a_{j,j-2}v_{j-2} + a_{j,j-1}v_{j-1} + a_{j,j}v_j + a_{j,j+1}v_{j+1} + a_{j,j+2}v_{j+2} = b_j \quad (17a)$$

$$h_{j-1} - h_j = (\Delta r) \frac{v_j^2}{r_j} \quad (17b)$$

其中 $a_{j,j-2} = -\frac{Ar_j}{Re_T} = a_{j,j+2}, a_{j,j-1} = \frac{a_0}{Re_T} \alpha_{(1)} + B \frac{r_j}{Re_T} + E - \frac{2H_{(1)}\alpha_0}{\Delta t}, a_{j,j} = -$

$$\left[\left(\frac{b_0}{Re_T} + \frac{1}{\Delta t} \right) \alpha_{(1)} - C \frac{r_j}{Re_T} + \frac{H_{(1)}}{\Delta t} \right], a_{j,j+1} = \frac{c_0}{Re_T} \alpha_{(1)} + D \frac{r_j}{Re_T} - E + \frac{2H_{(1)}\alpha_0}{\Delta t}$$

$$b_j = \frac{Ar_j}{Re_T} v_{j-2}^n - \left[\frac{a_0}{Re_T} \alpha_{(1)} + B \frac{r_j}{Re_T} - E - \frac{2H_{(1)}\alpha_0}{\Delta t} \right] v_{j-1}^n + \left[\left(\frac{b_0}{Re_T} - \frac{1}{\Delta t} \right) \alpha_{(1)} - C \frac{r_j}{Re_T} - \frac{H_{(1)}}{\Delta t} \right] v_j^n - \left[\frac{c_0}{Re_T} \alpha_{(1)} + D \frac{r_j}{Re_T} + E + \frac{2H_{(1)}\alpha_0}{\Delta t} \right] v_{j+1}^n - \frac{Ar_j}{Re_T} v_{j+2}^n$$

$$A = \frac{1}{4(\Delta r)^3}, B = \frac{1}{2(\Delta r)^3} + \frac{1}{2r_j(\Delta r)^2} + \frac{1}{2r_j^2\Delta r}$$

$$C = \frac{1}{r_j^3} - \frac{1}{r_j(\Delta r)^2}, D = \frac{1}{2r_j(\Delta r)^2} - \frac{1}{2(\Delta r)^3} - \frac{1}{2r_j^2(\Delta r)}$$

$$E = \frac{1}{2\Delta r\Delta t}, H_{(1)} = \frac{h_j - h_j^n}{h_j + h_j^n}, j = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$$

而

$$\alpha_{(1)} = 1 + \frac{v^2}{h} - \frac{r}{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial r} = 1 + \frac{(v_j + v_j^n)^2}{2(h_j + h_j^n)} + \frac{2r_j^2(a_0v_{j-1} - b_0v_j + c_0v_{j+1} + a_0v_{j-1}^n - b_0v_j^n + c_0v_{j+1}^n)}{2d_0v_{j-1} - v_j - 2d_0v_{j+1} + 2d_0v_{j-1}^n - v_j^n - 2d_0v_{j+1}^n}$$

$$a_0 = \frac{1}{2(\Delta r)^2} - \frac{1}{4r_j(\Delta r)}, b_0 = \frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{2r_j^2}$$

$$c_0 = \frac{1}{2(\Delta r)^2} + \frac{1}{4r_j\Delta r}, d_0 = \frac{r_j}{4(\Delta r)}$$

从式(17)中看出,系数中含有下标 [I] 的均为非线性项,因而这是一组非线性代数方程组。在每个时刻用叠代法计算,计算时将内层分为 N 等分,两端边界外的函数值需根据问

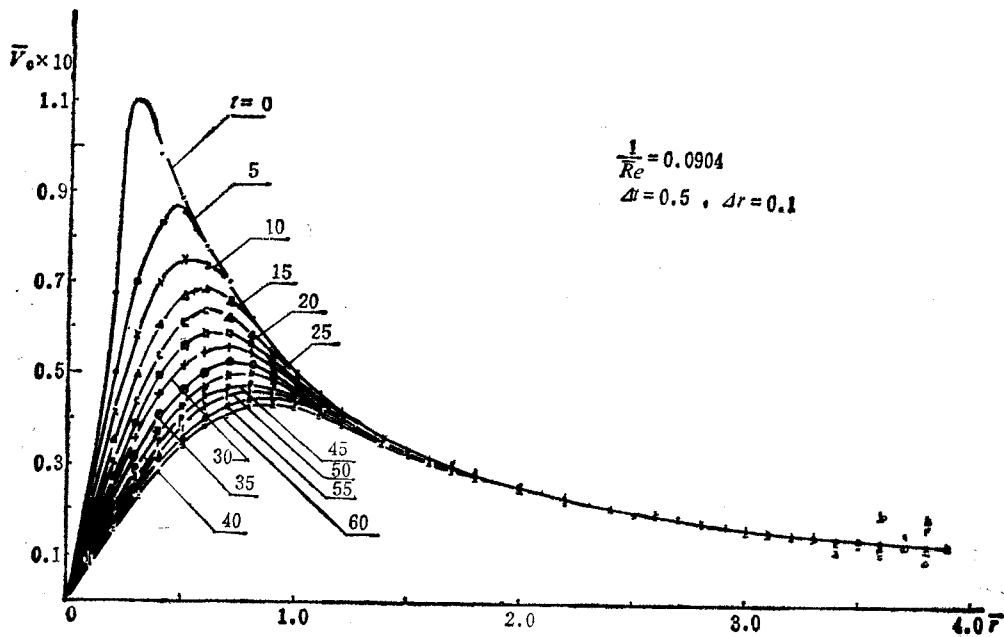


图1 周向速度分布

题的物理特点而定. 在 $r \rightarrow 0$ 时, 因周向速度随 r 呈线性变化. 因此在左端边界外 ($r < 0$) v 值可假设与边界内的 v 值呈关于 $r = 0$ 的中心对称分布而取值. 右端边界外的速度值因 $r \rightarrow \infty$ 时 h_0 趋于常值而从式 (17 b) 可得到. 作为一个算例, 本文参考 1958 年 8 月 27 日台风 Daisy 在海拔 6248 米高度上的实测风速, 经光滑化后给出 $v(r, 0)$. 计算用的特征参数为 $S = 10^3 \text{ km}$, $h_{00} = 20 \text{ km}$, $v_T = 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$, $f = 2.52 \times 10^{-1}/\text{h}$. 从初值分布估算出小参数 $\alpha = 0.05015$. 环量值 $\Gamma = 14.7219 \times 10^4$ 湮²/h. 在计算时为使计算稳定、收敛, 叠代用的松弛因子 ω 需要仔细选择, 在步长 $\Delta r = 0.1$, $\Delta t = 0.5$ 的计算中, t 从 0—30 时 $\omega = 0.15$; $t = 30—40$, $\omega = 0.14$, 当 $t = 40—60$ 时 $\omega = 0.13$. 本文在计算中用过不同的时间和空间步长, 而比较合适的步长间隔如上所述.

图 1, 2 分别给出了涡核内的无量纲速度 $v_0(r, t)$ 及大气自由面高度 $h_0(r, t)$ 的数值解结果. v_0, h_0 是关于 θ 对称, 图上所画是对称的右半边图形. 由图可看到在靠近 $r \rightarrow 0$ 处速度呈线性分布. 当 r 较大时 $v_0 \sim 1/r$ 并与外解匹配, 在中间, 速度为有限值分布并有一个最大值. 随着时间增长, 涡核的范围不断增大, 最大值下降, 解呈衰减状. 图上 $\bar{t} = 60$ 相当于从起始时刻经历了 36 小时后的解的状况. 自由面高度在 $r \rightarrow 0$

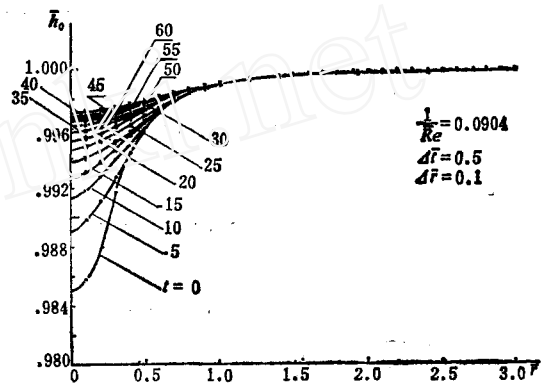


图 2 大气自由面高度

时呈抛物线性态, 当 r 增大时逐渐趋于常值与外解匹配. 随着时间增长自由面形状变得较为平缓. 由于在垂直方向上满足流体静力假设, 故大气压力分布的等压线与自由面形状相似. 上述数值解结果表明旋涡的奇性已经消除.

五、结论与讨论

本文理论分析和数值解结果表明, 利用多重尺度渐近理论, 在考虑了涡心附近存在的粘性作用后可以得到地转涡的内层结构. 其中速度分布及大气自由面高度均为有限值分布并随时间变化, 在首项近似范围内, 在涡的内层科氏力不是主要的, 地转近似不再成立. 本文结果也表明文献 [2] 所提出的克服二维位势涡奇性的方法已被推广到包括有重力和科氏力的地转涡情况.

本文是关于地转涡结构研究, 在此基础上可进一步分析具有这样一种内外层统一解的旋涡在背景流场中的运动特性, 即它与背景流场的相互作用和旋涡的摆动运动. 由于本文不考虑旋涡与外界的能量交换, 内解结构是随时间衰减的, 因此可进一步引入有能量交换而分析其结构及运动. 探索这种旋涡的结构与运动是否可作为某些实际流动 (大气或海洋中) 的简单模型是很有意义的.

致谢: 本工作曾得到美国 Courant 数学研究所 Lu Ting(丁汝) 教授的指导, 谨致谢意.

参 考 文 献

- [1] Morikawa, G. K., On the Prediction of Hurricane Tracks Using a Geostrophic Point vortex, Proceedings of the International Symposium on Numerical Weather Prediction in Tokyo, (Nov., 1960).
- [2] L. Ting and C. Tung, Motion and Decay of a vortex in a Nonuniform Stream, *Physics of Fluid* 8(1965), 1039—1051.

**GEOSTROPHIC VORTEX INNER STRUCTURE
SOLUTION**

Ling Gaoan

(Institute of Mechanic, Academia Sinica, China)

Li Xiaolin

*(Institute of Space Technology of China)***Abstract**

Considering the visous force near the center of geostrophic vortex and making use of the asymptotic theory with multiple scales, we obtained the vortical core structure being of the orderas. Therefore the velocity and the atmospheric equivalent height are of the finite value distributions and they change with time. Two defects in the inviscid geostrophic vortex theory, namely the velocity becomes infinite and the equivalent height of the atmosphere becomes negative infinite at $r \rightarrow 0$, are removed.