

# 矩形截面直管中的振荡流动

林同骥 浦群

(中国科学院力学研究所)

**提要** 通过解析求解纳维尔-斯托克斯方程,本文给出了矩形截面直管中的层流振荡流动解。该解适用于不同的截面高宽比  $r$  和不同的振荡流动雷诺数。对典型的  $r$  和  $\lambda$  ( $\lambda$  为雷诺数的平方根),给出了振荡流动速度的振幅比和相位差的等值线分布以及振荡流动速度随时间的变化,可以看出流动的速度分布如何从低频高粘性类型向高频低粘性的边界层流型逐渐变化;也可以看出管的边壁和角部对振荡流动的影响。当振荡频率  $\omega$  为零时,本文结果即成为通过矩形截面定常管流的 Stokes 解。

**关键词:** 振荡流,矩形管内流动,非非常粘性流动。

## 一、引言

$U$ 型水槽是一种产生简谐振荡流动的基本设备,已被应用于海洋工程研究 (Sarpkaya, 1976; Maull, et al., 1978)。为便于进行边界层实验以及流动显示,  $U$ 型水槽试验段截面通常采用矩形,为此提出矩形截面振荡管流研究,探讨不同截面高宽比、不同振荡频率以及不同流体粘性时振荡管流的侧壁及角流效应等问题。这些问题本身也是非定常内流研究中感兴趣的一些基本问题。尽管矩形截面定常管流问题早已解决 (Stokes, 1843)、圆管振荡流动也已有了相当进展 (Richardson, 1929; Sexl, 1931; Uchida, 1956; Berlelsen, 1982; Joshi, 1983; Watson, 1983), 但矩形截面振荡管流的研究相对很少 (Duck, 1982)。本文试图通过精确求解矩形截面振荡管流下的  $N-S$  方程对上面提到的一些问题进行研究。

## 二、控制方程及其求解

考虑由活塞简谐周期运动引起的矩形截面直管中不可压缩流体的流动。在直角坐标系  $x_i$  中,不可压流动的质量守恒方程和  $N-S$  方程为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0, \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3.$

这里  $u_i$  和  $X_i$  分别表示  $x_i$  方向上的速度分量和彻体力分量,  $\rho$ 、 $p$  和  $\mu$  分别表示流体的密

度、压力和粘性系数。

令  $2a$  和  $2b$  分别表示管截面的宽度和高度,  $x_1$  和  $x_2$  分别平行于管截面的宽度和高度方向, 而  $x_3$  与管的轴向一致, 如图 1 所示。

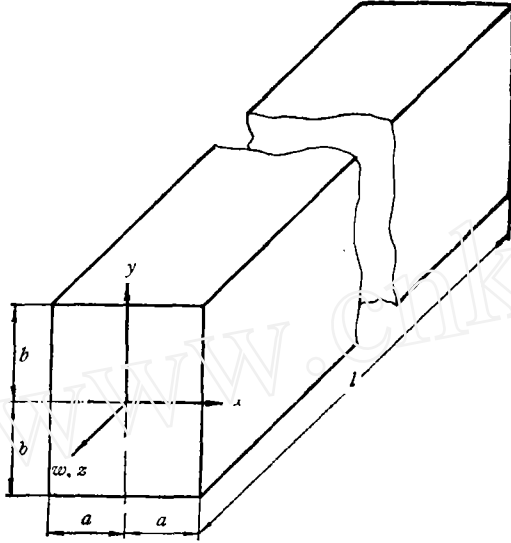


图 1 矩形截面直管及其坐标系

考虑忽略彻体力及管无限长的情况, 流动将与  $x_3$  无关,  $N-S$  方程及壁面无滑移条件可写为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right], \\ \omega &= 0, \text{ 当 } x = \pm a \text{ 或 } y = \pm b \text{ 时.} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

这里  $x, y, z$  和  $\omega$  分别替代了式(1)中的  $x_1, x_2, x_3$  和  $u_3, \nu = \mu/\rho$ 。

活塞作简谐周期运动产生的压力梯度可用  $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = k \cos \omega t$  来表示, 这里  $k$  和  $\omega$  为常值。令

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = k e^{i\omega t}, \quad \omega(x, y, t) = e^{i\omega t} f(x, y) \quad (3)$$

并且引入无因次参量

$$\left. \begin{aligned} \phi &= f/\omega_c, \quad \xi = x/a, \quad \eta = y/a, \quad r = b/a, \\ \lambda &= a(\omega/\nu)^{1/2}, \quad \omega_0 = k/\omega, \quad \omega_c = a^2 k/\nu = \lambda^2 \omega_0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

则方程(2)成为:

$$\left. \begin{aligned} \phi_{\xi\xi} + \phi_{\eta\eta} - i\lambda^2 \phi + 1 &= 0, \\ \phi &= 0, \text{ 当 } \xi = \pm 1 \text{ 或 } \eta = \pm r \text{ 时.} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

注意到式(3)中仅其实部有物理意义。

考虑到流动对称于  $y$  轴, 在满足  $\xi = \pm 1$  的边界条件下方程(5)左端函数  $\phi(\xi, \eta)$  和常数 1 在区间  $-1 < \xi < 1$  上可展成如下级数形式:

$$\left. \begin{aligned} \phi(\xi, \eta) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\xi) h_n(\eta), \\ 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\xi), \\ g_n(\xi) &= a_n \cos \sigma_n \xi, \quad a_n = (-1)^{n-1} (2/\sigma_n), \quad \sigma_n = \frac{1}{2} (2n-1)\pi, \\ n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

将式(6)代入方程(5), 得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 h_n}{d\eta^2} - \delta_n^2 h_n + 1 &= 0, \quad \delta_n^2 = \sigma_n^2 + i\lambda^2, \\ h_n(\eta) &= 0, \quad \text{当 } \eta = \pm r \text{ 时.} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

方程(7)为二阶常系数线性常微分方程, 其解为:

$$h_n(\eta) = \delta_n^{-2} [1 - \text{ch}(\delta_n \eta) / \text{ch}(\delta_n r)]. \quad (8)$$

将式(4)、(6)和(8)代入式(3), 得到振荡管流的速度分布:

$$\frac{w}{w_c} = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{2}{\sigma_n} \right) (\cos \sigma_n \xi) \delta_n^{-2} (1 - \text{ch} \delta_n \eta / \text{ch} \delta_n r). \quad (9)$$

当  $\omega = 0$  时, 式(4)和(7)给出  $\lambda = 0$  和  $\delta_n = \sigma_n$ , 于是式(9)即化为定常矩形截面管流的 Stokes 解(1843):

$$\frac{w}{w_c} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2\sigma_n^{-3}) \cdot (\cos \sigma_n \xi) (1 - \text{ch} \sigma_n \eta / \text{ch} \sigma_n r). \quad (10)$$

### 三、振幅比和相位差

如果振幅比和相位差能以显式给出, 则很容易得到一个周期中任意瞬间的速度分布以及振荡流动的时间均方速度。

分开  $\delta_n$  和  $h_n(\eta)$  的实部和虚部, 式(7)和(8)可写为:

$$\left. \begin{aligned} \delta_n &= \alpha_n + i\beta_n = |\delta_n| e^{i\phi_n}, \\ \alpha_n &= \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \text{ctg}^{\frac{1}{2}} \phi_n, \quad \beta_n = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \text{tg}^{\frac{1}{2}} \phi_n, \\ |\delta_n| &= \lambda \text{csc}^{\frac{1}{2}} 2\phi_n, \quad \phi_n = \frac{1}{2} \text{tg}^{-1}(\lambda^2/\sigma_n^2). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

和

$$\left. \begin{aligned} h_n(\eta) &= \lambda^{-2} r_n(\eta) e^{-i\theta_n(\eta)}, \\ r_n(\eta) &= \sin 2\phi_n [1 - 2e^{-\Delta S_n} \cos \Delta \tau_n + e^{-2\Delta S_n}]^{\frac{1}{2}}, \\ \theta_n(\eta) &= 2\phi_n - \text{tg}^{-1} [e^{-\Delta S_n} \sin \Delta \tau_n / (1 - e^{-\Delta S_n} \cos \Delta \tau_n)]. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_n &= S_n(r) - S_n(\eta), \quad \Delta \tau_n = \tau_n(r) - \tau_n(\eta), \\ S_n(\eta) &= \frac{1}{2} \ln [\text{sh}^2(\alpha_n \eta) + \cos^2(\beta_n \eta)], \\ \tau_n(\eta) &= \text{tg}^{-1} [\text{th}(\alpha_n \eta) \cdot \text{tg}(\beta_n \eta)]. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

在数值计算中, 为了避免在  $S_n(\eta)$  中出现很大的数以及在  $\tau_n(\eta)$  和  $\Delta\tau_n(\eta)$  中大角度选取中的问题, 用下面的表达式替代式(13)将是方便的:

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_n &= \alpha_n(\gamma - \eta) + K_n(\gamma) - K_n(\eta), \\ \Delta\tau_n &= \beta_n(\gamma - \eta) - \varepsilon_n(\gamma) + \varepsilon_n(\eta), \\ K_n(\eta) &= \frac{1}{2} \ln [1 + 2e^{-2\alpha_n\eta} \cos 2\beta_n\eta + e^{-4\alpha_n\eta}], \\ \varepsilon_n(\eta) &= \operatorname{tg}^{-1} [e^{-2\alpha_n\eta} \sin 2\beta_n\eta / (1 + e^{-2\alpha_n\eta} \cos 2\beta_n\eta)]. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

特别是对  $\alpha_n\eta \gg 5$  和  $\beta_n\eta \gg \frac{\pi}{2}$  的情况,  $K_n(\eta)$  和  $\varepsilon_n(\eta)$  一般很小, 采用式(14)使计算大为简便.

式(13)代入式(6), 得到:

$$\phi(\xi, \eta) = \lambda^{-2} R(\xi, \eta) e^{-iS(\xi, \eta)}. \quad (15)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} R(\xi, \eta) &= (F^2 + G^2)^{\frac{1}{2}}, \quad S(\xi, \eta) = \operatorname{tg}^{-1}(G/F), \\ F(\xi, \eta) &= \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\xi, \eta) \cos \theta_n(\xi), \\ G(\xi, \eta) &= \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\xi, \eta) \sin \theta_n(\xi), \\ q_n(\xi, \eta) &= g_n(\xi) r_n(\eta), \quad g_n(\xi) = (-1)^{n-1} \left( \frac{2}{\sigma_n} \right) \cos \sigma_n \xi, \\ n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

将式(15)和(4g)代入式(9)并取实部, 便得到一周期中任意瞬间的速度分布:

$$\frac{w}{w_0} = R(\xi, \eta) \cos [\omega t - S(\xi, \eta)]. \quad (17)$$

由此可见  $R(\xi, \eta)$  和  $S(\xi, \eta)$  分别是振荡流动中速度分布的振幅比和相位差.

在矩形截面的边界和角点处, 振荡流动的相位差表达式(16b)将出现不确定. 为此, 需要用下式来代替式(16b):

$$S(1, \eta) = \operatorname{tg}^{-1}(G_a/F_a), \quad S(\xi, \gamma) = \operatorname{tg}^{-1}(G_b/F_b), \quad S(1, \gamma) = \operatorname{tg}^{-1}(G_c/F_c). \quad (18)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} F_a &= \sum_{n=1}^{\infty} g'_n(1) r_n(\eta) \cos \theta_n(\eta), \\ G_a &= \sum_{n=1}^{\infty} g'_n(1) r_n(\eta) \sin \theta_n(\eta), \\ F_b &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\xi) r'_n(\gamma) \cos \theta_n(\gamma), \\ G_b &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\xi) r'_n(\gamma) \sin \theta_n(\gamma), \\ F_c &= \sum_{n=1}^{\infty} g'_n(1) r'_n(\gamma) \cos \theta_n(\gamma), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} G_c &= \sum_{n=1}^{\infty} g'_n(1) r'_n(\gamma) \sin \theta_n(\gamma), \\ g'_n(1) &= -2, \\ \theta_n(\gamma) &= \phi_n - \operatorname{tg}^{-1} [2e^{-2\alpha n \gamma} \sin 2\beta_n \gamma (1 - e^{-4\alpha n \gamma})^{-1}], \\ r'_n(\gamma) &= -\lambda \sin \frac{1}{2} 2\phi_n \left[ \frac{1 - 2e^{-2\alpha n \gamma} \cos 2\beta_n \gamma + e^{-4\alpha n \gamma}}{1 + 2e^{-2\alpha n \gamma} \cos 2\beta_n \gamma + e^{-4\alpha n \gamma}} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\}$$

上式中上标“'”表示函数对其各自变量求导数。考虑到流动的对称性, 这里仅给出四分之一矩形截面的结果。

#### 四、均方速度和剪应力

振荡流动的时间均方速度  $w^2$  及其无量次数  $M(\xi, \eta)$  定义为:

$$\left. \begin{aligned} w^2(\xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w^2 d(\omega t), \\ M(\xi, \eta) &= w^2 / \left( \frac{1}{2} w_0^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

将式(17)代入上式得到

$$M(\xi, \eta) = R^2(\xi, \eta). \quad (21)$$

由此可见振荡流动的时间均方速度等于振幅比  $R$  的平方。或者说振幅比  $R$  代表着无因次均方根速度。

管壁面剪应力  $\tau_a$ 、 $\tau_b$  和角点剪应力  $\tau_c$  分别定义为:

$$\left. \begin{aligned} \tau_a &= \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = C_a \tau_0 \lambda \cos [\omega t - S(1, \eta)], \\ \tau_b &= \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} = C_b \tau_0 \lambda \cos [\omega t - S(\xi, \gamma)], \\ \tau_c &= \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x=a, y=b} = C_c \tau_0 \lambda \cos [\omega t - S(1, \gamma)], \\ \tau_0 &= \rho w_0 / a. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

将式(17)代入上式并利用式(4)和(16), 得到管壁剪应力系数分别为:

$$\left. \begin{aligned} C_a &= (F_a^2 + G_a^2)^{\frac{1}{2}} / \lambda, \\ C_b &= (F_b^2 + G_b^2)^{\frac{1}{2}} / \lambda, \\ C_c &= (F_c^2 + G_c^2)^{\frac{1}{2}} / \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

当  $a = \infty$  时, 即对二维管流的情况, 以  $b$  为特征长度无因次化, 则对应的壁面剪应力为:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{bT} &= \tau_{0T} \lambda_T C_{bT} \cos [\omega t - S_T], \\ C_{bT} &= - \left[ \frac{1 - 2e^{-\sqrt{2}\lambda_T} \cos \sqrt{2}\lambda_T + e^{-2\sqrt{2}\lambda_T}}{1 + 2e^{-\sqrt{2}\lambda_T} \cos \sqrt{2}\lambda_T + e^{-2\sqrt{2}\lambda_T}} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ S_T &= \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}^{-1} [2e^{-\sqrt{2}\lambda_T} \sin \sqrt{2}\lambda_T (1 - e^{-2\sqrt{2}\lambda_T})^{-1}], \\ \lambda_T &= b(\omega/\nu)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau_{0T} = \mu w_0 / b. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

由此可见,在  $a = \infty$  的极限情况下,壁面剪应力只随振荡流参数  $\lambda_T$  变化。

当  $\lambda_T$  较小时,  $C_{bT}$  随  $\lambda_T$  的变化有  $C_{bT}/\lambda_T \approx 1$ , 即壁面剪应力与  $\lambda_T^2$  成正比。也就是说,壁面剪应力正比于振荡流动的雷诺数。

当  $\lambda_T \geq 4$  时,式(24)可进一步简化为:

$$\tau_{bT}/\tau_{0T} = -\lambda_T \cos \left[ \omega t - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (25)$$

这表明对于较大的振荡流雷诺数,壁面剪应力正比于雷诺数的平方根,而相差为  $\frac{\pi}{4}$ 。

综上所述,  $a = \infty$  的极限情况给出了二维振荡管流中壁面剪应力随着雷诺数的增加,由正比于雷诺数向正比于雷诺数平方根的过渡过程。

### 五、边界层型流动

在很多情况下,振荡管流中的  $\lambda$  较大,此时流动具有边界层型。对于这种情况  $\alpha_n \gamma \geq \alpha_n \eta \geq 5$ , 则有  $\text{ch } \alpha_n \gamma \approx \text{sh } \alpha_n \gamma = \frac{1}{2} e^{\alpha_n \gamma} \gg 1$ ,  $\text{ch } \alpha_n \eta \approx \text{sh } \alpha_n \eta = \frac{1}{2} e^{\alpha_n \eta} \gg 1$  以及  $\text{th } \alpha_n \gamma \approx \text{th } \alpha_n \eta \approx 1$ 。于是前面所有结果均可大大简化。式(14)可简化为:

$$\Delta S_n = \alpha_n (\gamma - \eta), \quad \Delta \tau_n = \beta_n (\gamma - \eta). \quad (26)$$

同样式(19)中  $\theta_n(\gamma)$  和  $r'_n(\gamma)$  分别成为:

$$\theta_n(\gamma) = \phi_n, \quad r'_n(\gamma) = -\lambda \sin^{\frac{1}{2}} 2\phi_n. \quad (27)$$

代入相应的式(12)、(16)和(18),则得到边界层型下的振幅比  $R(\xi, \eta)$ 、相位差  $S(\xi, \eta)$  以及边界上的  $S(1, \eta)$ 、 $S(\xi, \gamma)$  和  $S(1, \gamma)$  值。注意到

$$S(1, \gamma) = \text{tg}^{-1} \left[ \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \sin^{\frac{1}{2}} 2\phi_n \cdot \sin \phi_n}{\sum_{n=1}^{\infty} \sin^{\frac{1}{2}} 2\phi_n \cdot \cos \phi_n} \right] \quad (28)$$

中以及式(25)中  $\theta_n$ 、 $r'_n$  和  $S$  只是  $\lambda$  的函数,与  $\gamma$  无关,这表明在边界层型流动中角点上的相位差与  $\gamma$  无关;但在前述一般情况下  $S(1, \gamma)$  是  $\lambda$  和  $\gamma$  两者的函数,如式(18)和(19)所给。因而可以说,当  $\lambda$  足够大时,对于相同  $\lambda$  不同管截面高宽比的振荡流动具有相同的角点相位差。

在二维情况 ( $a = \infty$ ) 下,边界层型型的均方速度结果很简单。以  $b$  为特征长度重新无因次化,并利用  $a = \infty$  以及  $\alpha_T \geq \alpha_T \eta_T \geq 5$  的条件进行简化(这里  $\eta_T = y/b$ ,  $\alpha_T = b(\omega/2\nu)^{\frac{1}{2}}$ ), 可得到均方速度分布为:

$$\left. \begin{aligned} M(\eta_T) &= 1 - 2e^{-\Delta S} \cos \Delta S + e^{-2\Delta S} \\ \Delta S &= \alpha_T (1 - \eta_T). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

注意到均方速度以振荡方式趋于其平均值 1。其振幅随  $\Delta S$  的增加衰减较快。从第一个周期看  $\Delta S = 4.35$  时  $M = 1.01$ ,  $\Delta S = 5.92412$  时  $M = 0.995$ , 这些值对确定振荡流动中的边界层厚度很有用处。

### 六、算例和讨论

$\lambda = 2$  和  $\lambda = 10$  时  $\gamma = 1$  的振荡管流速度的振幅比  $R(\xi, \eta)$  和相位差  $S(\xi, \eta)$  给出于图(2)。考虑到流动对于  $\xi$  轴和  $\eta$  轴的对称性, 仅给出四分之一截面上的分布。由图可见, 当  $\lambda$  小时, 振幅比  $R$  和相位差  $S$  的最大值均在管的中心轴线处; 而当  $\lambda$  大时,  $R$  和  $S$  的峰值由一个向四角点方向发展为四个,  $\lambda$  越大, 峰值位置会越靠近角点, 在管的中央, 出现一个振幅比和相位差都基本不变的核心流区, 即当  $\lambda$  较大时确实是边界层型的振荡流动,

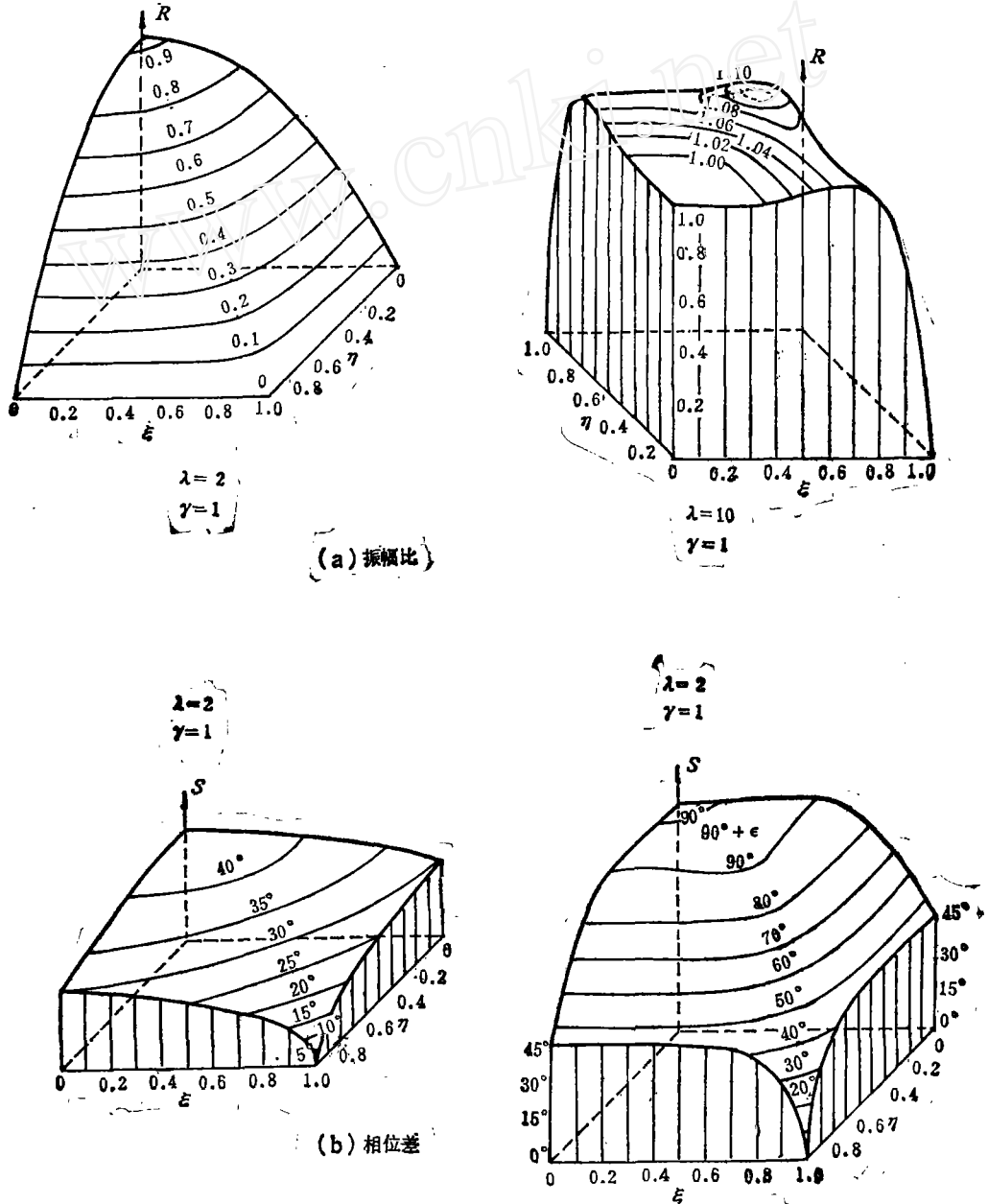


图 2 不同  $\lambda$  下振荡管流速度的振幅比和相位差

也就是说粘性影响可以仅在边壁附近薄层内起作用。由图还可见,对不同  $\lambda$ , 振幅比在边壁和角点上均为零, 但相位差只在角点处为零, 在角点以外的边界上并不为零。

与无粘流比较, 这里还可看出粘性的作用是降低了速度的大小和增加了相位的滞后。对大  $\lambda$ , 壁面上的相位差在绝大部分区为  $\pi/4$ , 当从壁面趋向中心时, 相位差很快由  $\pi/4$  增加到  $\pi/2$ ; 对小  $\lambda$ , 壁面上的相位差一般小于  $\pi/4$ , 在管中央的相位差增加到  $\pi/4$ 。

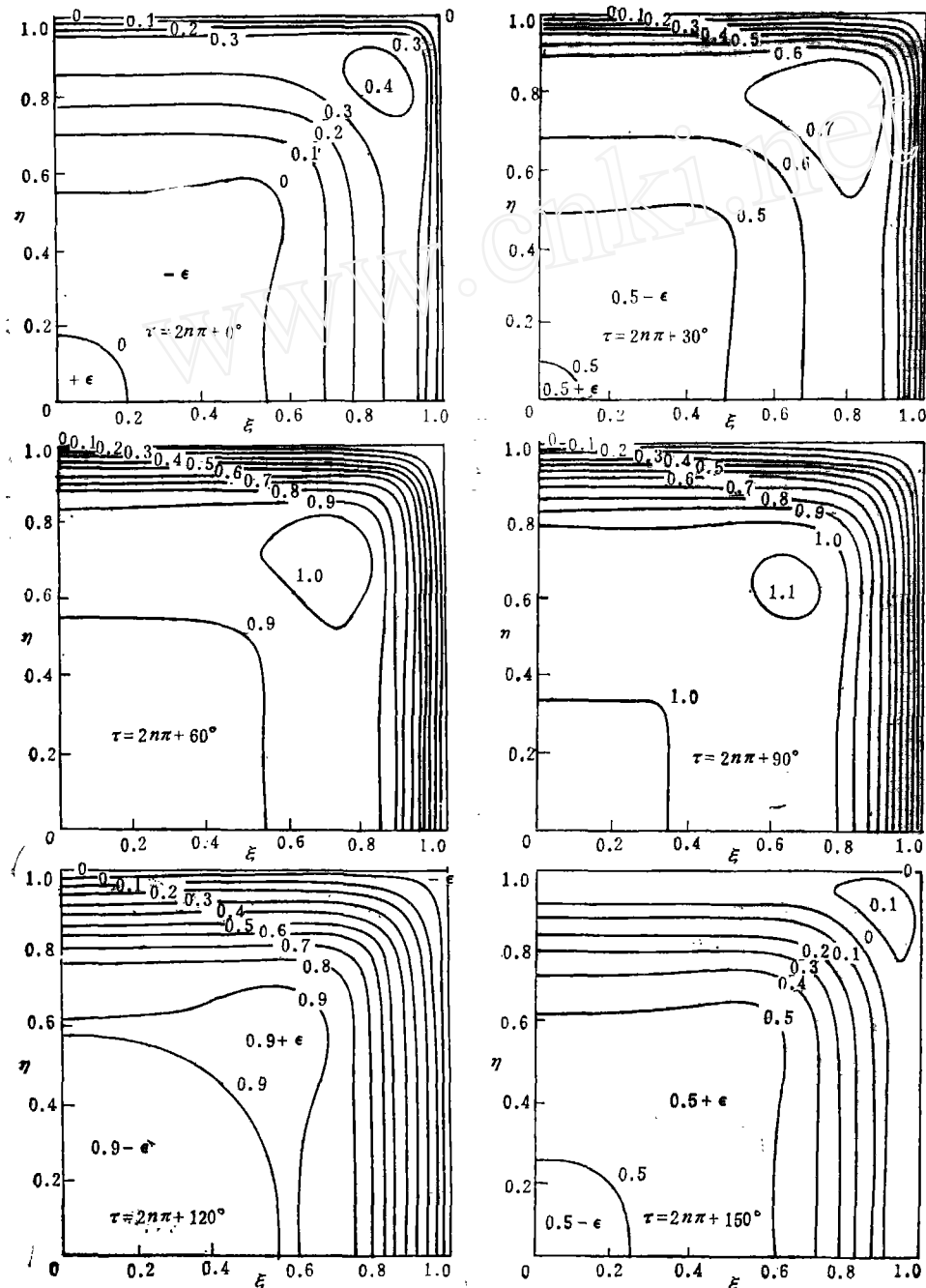


图 3a 振荡管流截面速度分布等值线 ( $\lambda = 10, \gamma = 1$ )



图(3)给出  $\lambda = 10, \gamma = 1$  时振荡管流截面上速度分布随时间的变化。图(3a)是等值速度分布图。由图可以清楚地看到,在半个周期内,由于角点的作用,角点附近四个正峰值区形成、增长、缩小、四个峰值区相连成环以及角点附近四个负峰值区形成的整个发展过程,而正峰值点的位置是沿着角点与中心的连线向中心方向移动的。由图还可以看出在半个振荡周期的不同时刻,角点对于管流中心无粘核心区的形状和大小影响的不同。图

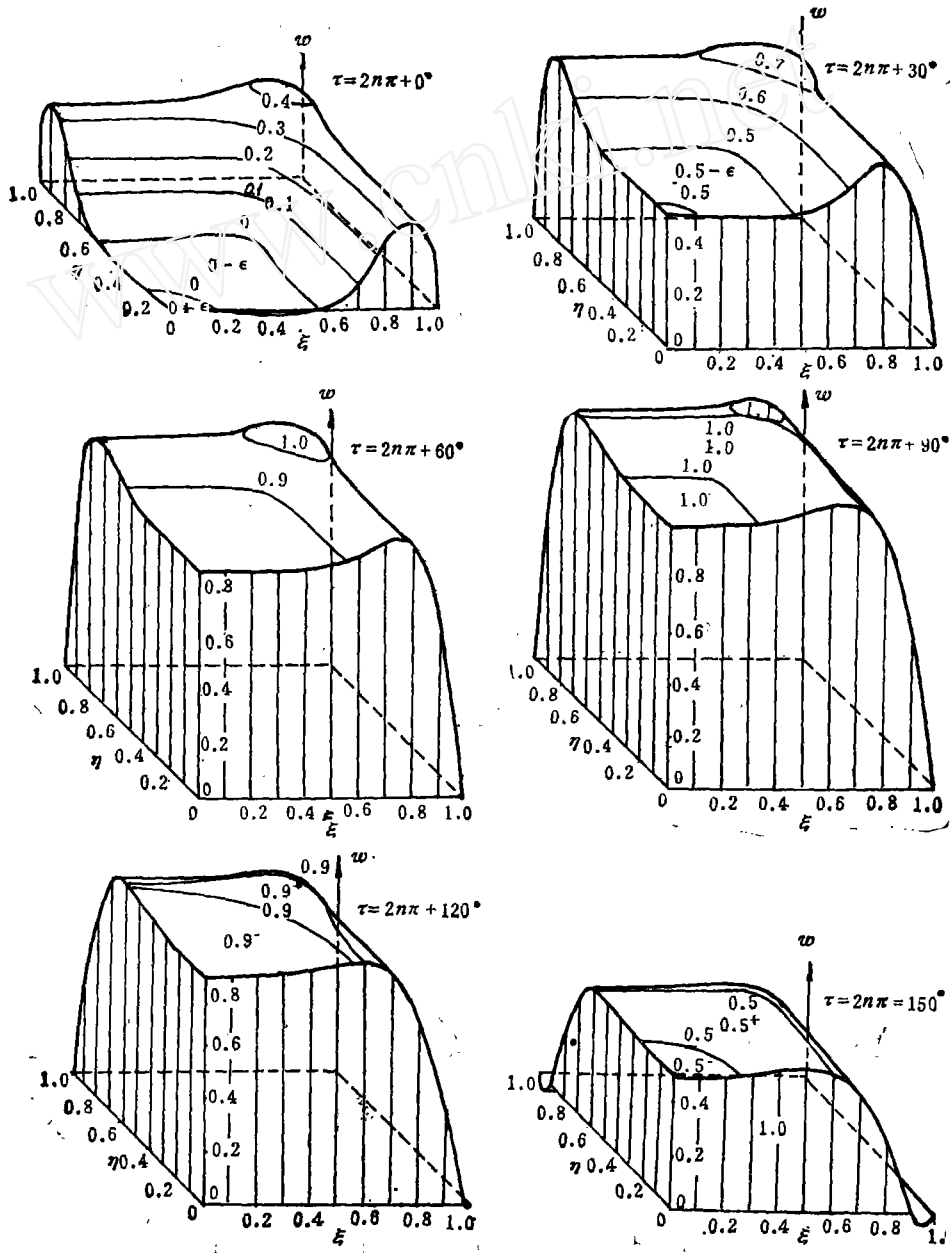


图 3b 半周期内不同瞬间振荡流速截面分布图解 ( $\lambda = 10, \gamma = 1$ )

(3b)是速度分布的图解表示。由图可见边界影响在半个周期内向中心传递的发展过程以及不同时刻边界对无粘中心区大小的不同影响。

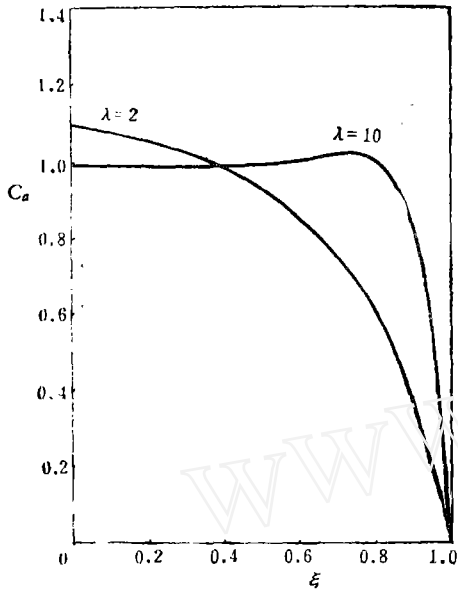


图4 不同 $\lambda$ 下的振荡管流壁面剪应力  $C_w$  ( $\gamma = 1$ )

荡流动的精确解析解。

$\gamma = 1$  时不同  $\lambda$  下壁面剪应力系数  $C_w$  的结果给予图(4)。由图可见, 对于大  $\lambda$  值, 除了角点附近以外, 壁面剪应力系数接近于 1, 而在角点上壁面剪应力为零。

图(5)给出  $\lambda = 10$ 、 $\gamma = 1.5$  下振荡管流的振幅比  $R(\xi, \eta)$  的分布, 图中虚线为  $\lambda = 10$ 、 $\gamma = 1$  的结果。两者相比可见当  $\lambda$  足够大时,  $\gamma$  增加只是扩大了管中心  $\xi$  轴线附近的二维流动区。

## 七、结 论

综上所述, 本文结论如下:

1. 通过求解不可压缩粘流的  $N-S$  方程, 本文给出了矩形截面直管中层流振荡流动的精确解析解。

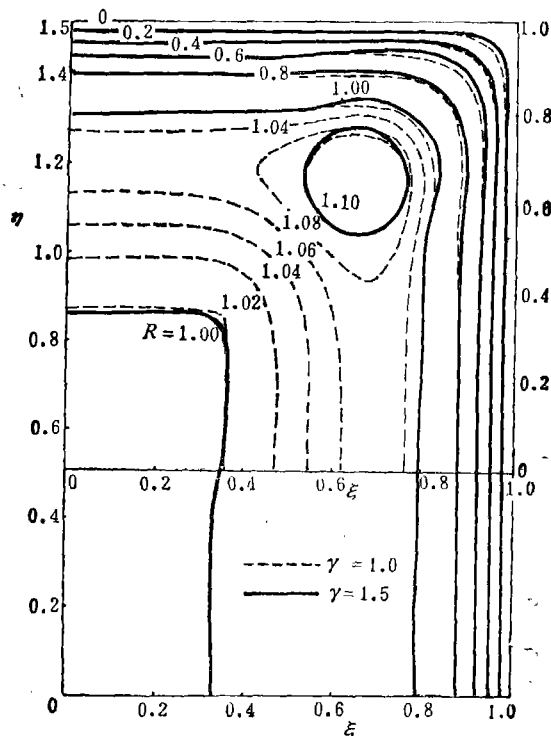


图5 不同 $\gamma$ 下振荡管流速度的振幅比 ( $\lambda = 10$ )

2. 当振荡流动雷诺数小时, 矩形截面振荡管流中均方根速度的最大值  $R_{\max}$  出现在截面中心处; 随着雷诺数增加, 在截面的四角附近出现四个  $R_{\max}$ , 雷诺数越大,  $R_{\max}$  所在位置越靠近角部。

3. 与无粘流比较, 振荡管流中粘性的作用是降低速度大小和增加相位滞后, 对小  $\lambda$ , 壁面的相位差通常小于  $\pi/4$ , 在管中央增加到  $\pi/4$ ; 对大  $\lambda$ , 壁面的绝大部分相位差为  $\pi/4$ , 从壁面趋向中心时, 相位差很快由  $\pi/4$  增加到  $\pi/2$ 。

4. 在大雷诺数时, 与最大速度出现在角部附近相联系, 尽管在角点上剪应力很快降到零, 而最大壁面剪应力亦出现在靠近管壁角点附近。

5. 在一个振荡周期的不同时刻管截面上的速度型是很不相同的, 这些结果可以定性和定量地说明管壁和角部对振荡流动特性的影响。

6. 当雷诺数大于 25 ( $\lambda \geq 5$ ) 时, 管壁附近区域中和角部区域中存在相似的流型。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Perlefer, A. and Thorson, L. K., *J. F. M.* 118, (1982), 269—284.
- [ 2 ] Duch, P. W., *J. F. M.* 122, (1982) 215—234.
- [ 3 ] Joshi, C. H., et al., *J. F. M.* 133, (1983), 245—254.
- [ 4 ] Maull, D. J. and Milliner, M. G., *Coastal Engrg.* 2, (1978), 149—168.
- [ 5 ] Richardson, E. C. and Tyler, E., *Proc. Phys. Soc. London*, 42, (1929), 1—15.
- [ 6 ] Sezl, Th., *Z. Phys.* 61, (1931), 249.
- [ 7 ] Sarpkaya, T., Naval Postgraduate School, Monterey, U. S. A., NPS 59, SL 76021, (1976).
- [ 8 ] Stokes, G. G., *Camb. Phil. Soc. Trans. Vol. 8*, (1843).
- [ 9 ] Uchida, S., *J. F. M.* 122, (1956), 215—234.

## OSCILLATORY FLOW THROUGH A RECTANGULAR TUBE

T. C. Lin Pu Qun

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

### Abstract

Oscillatory flow of an incompressible viscous fluid through a straight rectangular tube is considered. An exact analytic solution to the Navier-Stokes equation is obtained, which is valid for all values of the geometrical parameter  $\gamma$  and the physical parameter  $\lambda$ . Contours of constant amplitude ratio and constant phase shift are given for typical values of  $\gamma$  and  $\lambda$ . It shows how the velocity distribution pattern of the flow changes gradually from a low-frequency high-viscosity type to a high-frequency low-viscosity boundary-layer type. It also shows how the oscillatory flow is influenced by the side walls and especially by the corners of the tube. On putting the oscillatory frequency  $\omega$  equal to zero, the present solution reduces to Stokes' solution for steady flow through a rectangular tube.

Key words: Oscillatory flow, Rectangular tube flow, Unsteady viscous flow.