关于测不准关系

朱如曾

（中国科学院力学研究所）

《大学物理》刊登了"测不准关系的意义（上）"一文[1]，其主要论点是：只承认测不准关系[2,3]

$$\Delta x \Delta P_x \geqslant \hbar/2 \tag{1}$$

中的 Δx 和 ΔP_x 是系综的均方差，而否定海森伯对(1)式的解释[4]；同时对同一粒子测量 x 和 P_x 时的"精确度"$(\Delta x)'$和$(\Delta P_x)'$也满足(1)式，即

$$(\Delta x)'(\Delta P_x)' \geqslant \hbar/2; \tag{2}$$

并建议教科书中只介绍(1)式，不要介绍(2)式。为行文方便，后面将称(2)式为海森伯关系而仍称(1)式为测不准关系。文[1]的主要论据是：1. 关系式(2)不能从量子力学的基本假设[1]推导出来，因此(2)式必定包含着证据不足的"额外"假设。2. 作者认为，海森伯用来证明(2)式的 γ 射线望远镜实验只测量了电子的位置，而未测量其动量。相反，戴维斯-革末实验及其他实验[5,6]，却违反了(2)式。3. 作者从理论上作了"反证明"，结果得出，有相当的几率使对同一粒子同时测得的 x、P_x 和平均值 $\bar{x}$、$\bar{P}_x$ 满足与(2)式"矛盾"的关系

$$|x-\bar{x}|\cdot|P_x-\bar{P}_x|<\hbar/2 \tag{3}$$

(1)式和(2)式都与测量理论有关，并进一步涉及到争论已久的对量子力学的解释问题[7]。不过1972年以来的实验已否定了决定论的定域隐变数理论[8]，使波函数描述的完备性得到基本的肯定，这对正统解释是极大的支持。本文将基本上按正统观点简介测量理论，表明(2)式是(1)式的推论，并对[1]的观点提出一些看法，与作者商洽。

一、两种类型的测量

假定要测量系统 I 的力学量 F。用$|\mathrm{I},\lambda\rangle$ 表示 I 的本征态，用$|\mathrm{II},\alpha\rangle$表示测量 F 的仪器 II 的本征态，α 是适当的"指针位置"，$|\mathrm{II},0\rangle$是仪器的初始态。II 既是测量 F 的仪器，那末 I 和 II 之间的相互作用的结果应该使系统 I 的不同初始值 λ 对应于 α 的不同终值组，但每次只具体对应组中一个 α 值。用 i 来给每组中的 α 值编号，有 $\alpha=(\lambda,i)$，如果 $\lambda\neq\lambda'$，则 $\alpha(\lambda,i)\neq\alpha(\lambda',j)$；如果 $i\neq j$，则 $\alpha(\lambda,i)\neq\alpha(\lambda,j)$。因此，每一 α 决定一个 λ 并对应一个 i，$\lambda=\lambda(\alpha)$，$i=i(\alpha)$。例如，多色电子波入射在晶体光栅上，反射波按动量的不同值向不同方向射去，在远处分开。如果在远处用照相底板上的感光原子作为指针，则不同动量的电子将落在荧光屏的不同面积上，而每块面积上有许多感光原子，构成一组指针位置。

如果复合系统 I+II 的初态是 $|\mathrm{I},\lambda\rangle|\mathrm{II},0\rangle$，那么运动方程必定导致终态 $\sum_i a_{\lambda,i}|\mathrm{I},\lambda\rangle|\mathrm{II},\alpha(\lambda,i)\rangle$，即

$$U|\mathrm{I},\lambda\rangle|\mathrm{II},0\rangle=\sum_i a_{\lambda,i}|\mathrm{I},\phi(\lambda,i)\rangle|\mathrm{II},\alpha(\lambda,i)\rangle, \tag{4}$$

式中，$\sum_i|a_{\lambda,i}|^2=1$，$U$ 是由 I 和 II 之间相互作用哈密顿量决定的标符。这里，如果 $\phi(\lambda,i)=\lambda$，即系统的初态和终态相同(称为"无畸变")，则称为"制备型测量"，因为从仪器的"指针位置"α 可以判定，测量结束时，系统肯定处于态 $|\mathrm{I},\lambda=\lambda(\alpha)\rangle$。用史特恩—盖拉赫方法测自旋就属于这种类型。在这种类型的测量中，有时 i 只取一个数，因而可以取消它。如果对某些 i 有 $\phi(\lambda,i)\neq\lambda$，则称为"过去型测量"[9,10]，因为在这种情况下，从仪器指针位置 α 所判定的 $\lambda=\lambda(\alpha)$ 只是系统初态的特征，而不是测量结束时系统的特征。用非弹性散射方法测定原子能级就属于这种类型。这里不同的 λ 所对应的$|\mathrm{I},\phi(\lambda,i)\rangle$ 不必互相正交，I+II 的各终态的正交性由 λ 和 i 的不同值所对应的$|\mathrm{II},\alpha(\lambda,i)\rangle$的正交性

方向相反的最大值，两次为零。电子相对于金属导体铜皮处于受迫振荡状态。铜皮中沿着柱体切线方向出现的交变电流通过磁耦合，使得套在柱体外的线圈与外部导体构成的回路中产生了感应电流。由于电流较弱，在观测仪器灵敏度不高的情况下，还需要通过放大电路才能观测。实验结果与理论的预期完全一致。

参考资料

[1] G. Thomson: "*Discovery of the Electron*", *Phy Today*, (1956.8), P. 19.
[2] 赵凯华，陈熙谋编："电磁学"(上册)P. 192.
[3] С. Э. Фриш、А. В. Тиморева: "*Курс Обшей Физики*"(中译本)二卷一分册，§148.
[4] R. Becker, F. Sauter: "*Electromagnetic Fields and Interactions*" P. 158.

来保证。

现在假定被测系统的初始态 $|\mathrm{I},\psi\rangle$ 不是F的本征态，$|\mathrm{I},\psi\rangle=\sum_{\lambda}|\mathrm{I},\lambda\rangle\langle\lambda|\psi\rangle$，从(4)式和运动方程的线性性质可知，终了时有

$$
\begin{aligned}
&|\mathrm{I}+\mathrm{II},f\rangle=U|\mathrm{I},\psi\rangle|\mathrm{II},0\rangle= \\
&\sum_{\lambda,i}\langle\lambda|\psi\rangle a_{\lambda,i}|\mathrm{I},\phi(\lambda,i)\rangle|\mathrm{II},\alpha(\lambda,i)\rangle
\end{aligned}
\tag{5}
$$

现在可以看到，指针指示α的概率是$|a_{\lambda,i}\langle\lambda|\psi\rangle|^2$，这里，$\lambda=\lambda(\alpha)$，$i=i(\alpha)$。如果指针确实“实现”了指示$\alpha_0$，从而称为测得$\lambda_0=\lambda(\alpha_0)$，那末我们就能作出如下两点判断：

1．态的约化：复合系统I+II处于$|\mathrm{I},\phi(\lambda_0,i_0)\rangle|\mathrm{II},\alpha(\lambda_0,i_0)\rangle$态，因此系统I处于$|\mathrm{I},\phi(\lambda_0,i_0)\rangle$态，即测量过程制备了$|\mathrm{I},\phi(\lambda_0,i_0)\rangle$态。对“制备型测量”，$\phi(\lambda,i)=\lambda$，测量过程制备了$|\mathrm{I},\lambda_0\rangle$态。“制备型测量”测得$\lambda$，即制备出$|\mathrm{I},\lambda\rangle$态的总几率是

$$\sum_i|a_{\lambda,i}\langle\lambda|\psi\rangle|^2=|\langle\lambda|\psi\rangle|^2.$$

2．测量F前，系统“过渡”于$|\mathrm{I},\lambda_0\rangle$态（此态称为“过渡态”）其含意是：①虽然系统的初态是$|\mathrm{I},\psi\rangle$，但这一次具体测量的结果，仪器指针的位置恰恰落在初态$|\mathrm{I},\lambda_0\rangle$所对应的$\alpha$值组内。②“过渡”于$|\mathrm{I},\lambda_0\rangle$的几率恰恰等于$|\langle\lambda_0|\psi\rangle|^2$，而这正好就是量子力学所预言的，对$|\mathrm{I},\psi\rangle$测得$F$值为$\lambda_0$的几率。“过渡于”三个字仅仅是以上两点内容的代词而已。

所以对二种类型的测量，测得λ的几率都是$|\langle\lambda|\psi\rangle|^2$。

那末，何谓指针确实“实现”了指示α_0呢？岂不是要用第二台仪器来测量吗？第二台仪器的指针位置又得由第三台仪器来测量……。因此必须说明究竟到哪一步就算指针真正实现指示一个确定的位置，从而“态的约化”发生了。对于这个问题的回答是：1．当仪器中发生了不可逆的热力学过程（熵增加）时，态的约化便发生。例如照相底板上感光斑点的形成。2．负的热力学过程（负指示）也引起态的约化。例如从第一小孔的照像底片制成的大球壳的中心处向小孔发射由已知波包描述的一个电子，如果经过足够长的时间，底片不出现斑痕，则可以断定电子已穿过小孔而由球壳外面的可求出的新波包所描写。

二、海森伯关系的正确性

对于制备型测量而言，精确测量之后，系统必须进入相应的本征态。对一个粒子同时精确测量x和P_x，就必须使粒子进入x和P_x的公共本征态，而这样的态并不存在，所以，x和P_x不可能同时精确地测量。假定能够同时对一个粒子测量近似值x_0和P_{x0}，使其精确度$(\Delta x)'$和$(\Delta P_x)'$违反(2)式（这四个量应由粒子末态决定，但一个末态可以对应不只一组数，因为x_0和P_{x0}是近似的），那末我们进行多次这样的测量，找出数组$(x_0,P_{x0},(\Delta x)',(\Delta P_x)')$全同的一组粒子，其中末态也相同的那些粒子，客观上构成一个系综。定性看来，对此系综，“精确度”$(\Delta x)'$和$(\Delta P_x)'$应保证$\Delta x\leqslant(\Delta x)'$和$\Delta P_x\leqslant(\Delta P_x)'$。从而$\Delta x\Delta P_x\leqslant(\Delta x)'(\Delta P_x)'<\hbar/2$。这违反(1)式。这已证明了(2)式是(1)式的推论。定量看来，由于末态粒子的x和P_x不确定，所以近似值x_0和P_{x0}的“精确度”应定义为

$$
\begin{aligned}
(\Delta x)'&=\sqrt{\langle(x_0-x)^2\rangle}\\
&=\sqrt{(x_0-\langle x\rangle)^2+\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle}\\
&\geqslant\Delta x
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
(\Delta P_x)'&=\sqrt{\langle(P_{x0}-P_x)^2\rangle}\\
&=\sqrt{(P_{x0}-\langle P_x\rangle)^2+\langle(P_x-\langle P_x\rangle)^2\rangle}\\
&\geqslant\Delta P_x
\end{aligned}
\tag{7}
$$

式中所有平均指对末态平均（当碰巧$x_0=\langle x\rangle$，$P_{x0}=\langle P_x\rangle$时，达到极限精度$(\Delta x)'=\Delta x$，$(\Delta P_x)'=\Delta P_x$）．从(1)式、(6)式和(7)式可得(2)式。这称为“制备型同时测量”，这里并不要求与$\phi(\lambda,i)=\lambda$相类似的“无畸变条件”。必须注意，均方差ΔF既属于系综，又属于单个粒子。这与微观粒子如下的性质相一致：1．干涉现象；2．波函数描述的完备性；3．单个粒子的状态决定它所从属的系综，而一个系综只对应一个单粒子状态；4．因此ΔF是单个粒子的态函数。这些都与经典粒子的速度同温度之间的关系绝然不同，而体现了或根源于微观粒子的波粒二象性。

对x和P_x进行“过去型同时测量”定义为确定“过渡态”的相应近似值x_0和P_{x0}，并且规定“过渡态”对x_0和P_{x0}及其精确度$(\Delta x)'$和$(\Delta P_x)'$的多值决定关系等同于“制备型同时测量”中末态与相应量间的关系。因此(6)式、(7)式和(2)式都成立，只是式中所有平均都改为对过渡态进行。

对x和P_x的同时测量也可定义为通过一次测量确定数组$(x',(\Delta x)',P_x',(\Delta P_x)')$，表示末态（或过渡态）在位形空间和动量空间中的波包几乎被限制在$|x-x'|\leqslant2(\Delta x)'$和$|P_x-P_x'|\leqslant2(\Delta P_x)'$范围内。对这样的定义，(2)式显然也是满足的。

三、关于文[1]对海森伯关系的反驳

1．关于文[1]的“反证明”：

文[1]的“反证明”不成立，因为作者所假定测得的 x 和 P_x 只可能有三种情况：①x 和 P_x 是精确值，这已假设(2)式不真，故属“循环论证”。②x 和 P_x 是近似值，即本文的 x_0 和 P_{x0}，故(3)式的 $|x-\bar{x}|$ 和 $|P_x-\bar{P}_x|$ 与(2)式的 $(\Delta x)'$ 和 $(\Delta P_x)'$ 不同，因此，(3)式即使无误，也与(2)式无矛盾。此外文[1]利用误差理论也无根据（经典情况下近似值的分布才适用误差理论）。就算误差理论适用，作者所用联合概率公式也有误。

2．关于海森伯理想实验：

海森伯 γ 射线望远镜实验确实没有对电子动量进行“直接测量”，但海森伯是利用“动量守恒”的概念间接断定电子动量具有符合(2)式的不确定量的。“动量守恒”是薛定谔方程的推论，而不是什么“额外假设”。其实对 x 的测量也要通过成像理论来间接推定，所以承认估计值 $(\Delta x)'$，就没有理由否认估计值 $(\Delta P_x)'$。因此，不管在量子力学的解释上赞成哪家的观点（例如，可以认为电子客观上具有确定的 x 和 P_x，也可以不管测量的干扰原则上能否控制），至少不能否认：这个实验的精确度不能超越(2)式的限制。

3．关于“反例”：

文[1]、文[5]以及文[6]中的“反例”均可一一澄清，下面以戴维斯—革末实验为代表进行分析。

① 先从制备型同时测量的观点来看。在法拉弟圆筒接收到电子前，这个电子处于衍射后的叠加态，其动量具有不确定值。当电子被接收到之后（我们可以通过“负指示”，判定电子是否已进入筒中），它的波函数一定发生以圆筒口径 Δx 为特征的衍射，利用衍射理论间接决定的 ΔP_x 表明(1)式，从而(2)式都是满足的。

② 从过去型同时测量的观点来看。设光栅常数为 a，原子个数为 N，入射电子束的波长为 λ。在与入射方向成 θ 角的方向接收到一个电子，表示该电子在被检测到之前“过渡于”向 θ 方向传播的分波 $|\psi_\theta(r,t)\rangle$（与 θ 方向垂直的方向记为 x 方向）。为了能肯定这一电子确实属于 $|\psi_\theta(r,t)\rangle$，R 必须足够大

$$R>Na^2\cos^2\theta/\lambda \tag{8}$$

以保证在筒口处，各波束已经分开。根据薛定谔方程，这一分波必有一发散角 $\delta\theta$ 及相应的 ΔP_x

$$\Delta P_x=P\delta\theta=\hbar/Na\cos\theta \tag{9}$$

波束最小宽度为 $Na\cos\theta$，所以对整个波束 $|\psi_\theta(r,t)\rangle$ 而言，有 $(\Delta x)'(\Delta P_x)'\geqslant\Delta x\Delta P_x\geqslant\hbar$。这与(2)式一致。

③ 文[1]的分析存在如下不妥：ⓐ文[1]把制备型同时测量中得到的 $(\Delta x)'$ 与过去型同时测量中得到的 $(\Delta P_x)'$ 相乘来证明(2)式可以违反，这样做违背了(2)式中 $(\Delta x)'$ 和 $(\Delta P_x)'$ 的定义。ⓑ本来，为了使 $(\Delta P_x)'\to 0$，必须 $\Delta P_x\to 0$，按(9)式，必须 $N\to\infty$，又由(8)式知，也须 $R\to\infty$。可是文[1]却认为 N 固定不变时，只要 $R\to\infty$，就可使 $(\Delta P_x)'\to 0$。这里，文[1]实际上是用了电子按直线运动的经典概念（像文[5]一样）。可是“按直线运动”并不是可能的量子态，不能构成“过渡态”。ⓒ文[1]的观点没有以任何测量理论或明确的测量定义为基础。

4．关于“额外假设”及其证据问题：

显然，没有恰当的测量理论，(1)式以至波函数的统计解释本身就无意义。可见它们都需要“额外假设”。目前非正统的测量理论都有严重困难[7]，并且对决定论定域隐变数理论的实验否定，是对正统理论的有力支持。因此，目前看来，(1)式和(2)式所需“额外假设”很可能只能是正统测量理论或其改进，这样的假设将可纳入“量子力学的基本假设”。此外，仅就测量精度（不管 Δx 和 ΔP_x 是否属于单个粒子等等）而言，海森伯的理想实验等就是(2)式很好的例证。

四、关于教学

尽量分清量子力学中的各种结论由哪些假设所决定，这无疑是有好处的。不过，没有测量的概念，就谈不上波函数的统计解释而且如果按照文[1]的主张，在量子力学的基本教程中绝对取消“测量理论”，那末连“测得原处第一激发态的氢原子发出了一个光子后，它处于什么态？”这样简单的问题都无法解答。这样的教学安排未必可取。事实上，国内现行的教科书虽不专门讲授“测量理论”，也都介绍过测得 F 的本征值 λ 后，系统处于相应的本征态这样的制备型测量的概念，只是没有提及“制备型”的名称而已。至于“过去型测量”，几乎所有的量子力学教科书都未介绍，但许多教科书实际是用了这个概念的。例如，许多教科书在从 $|\psi(r,t)|^2$ 表示位置的概率密度出发，证明 $\psi(r,t)$ 的傅氏展开系数 $C(P)$ 的绝对值平方 $|C(P)|^2$ 代表动量取 P 的概率密度时，都是把 $\psi(r,t)$ 所描写的电子射向晶体表面，其中与不同的 P 对应的分量，反射后互相分开，因此用法拉弟圆筒检测到电子的总概率与 $|C(P)|^2$ 成正比。于是便认为证明了 $|\psi(r,t)\rangle$ 态中电子取 P 的概率密度是 $|C(P)|^2$。可是当粒子在法拉弟圆筒中被检测出来时，粒子既不在原来的 $|\psi(r,t)\rangle$ 态，其动量也不是 P 了。因此这里涉及的是“过去型测量”，所证明的也是粒子“过渡于” P 的本征态的概率密度是 $|C(P)|^2$。我们认为，明确地介绍一下两种类型测量的基本概念，并

刚体滚动中静摩擦力方向的直观判断方法与其作功问题

姚 干 和

（安徽大学）

一 纯滚动中静摩擦力方向直观判断方法

相对静止的两个物体之间有相对滑动趋势时，则在两个物体的接触面（点）上就存在着阻碍相对滑动趋势的静摩擦力，其方向与相对滑动趋势方向相反。

在刚体滚动中，物体间相对滑动趋势不象平动那样直观，静摩擦力方向不易给出。在图1中，质量为 m，半径为 R 的匀质实心圆柱体，受一水平外力 F 作用，在水平面上作纯滚动。作用在圆柱体 P 点处的静摩擦力方向由于相对滑动趋势不明显，难以直接判定。为了能比较直观地确定滚动中静摩擦力方向，可以应用下述方法：先隔离研究的滚动体，再设想 P 点不受静摩擦力作用，然后找出在外力 F 作用下，圆柱体 P 点的切向加速度的方向。（此即相对滑动趋势），则 P 点所受到的静摩擦力方向同该切向加速度方向相反。

在图1中，设 P 点不受静摩擦力，圆柱体在 F 的作用下，可看成质心的平动和绕质心的转动，则 P 点的切向加速度应是平动加速度 a_c 和转动的切向加速度 a_t 的矢量和，即 $a_P = a_c + a_t$。（图2）。为了判别 a_P 的方向，由图2可得：

$$F = ma_c \tag{1}$$

$$F \cdot r = J_c \beta \tag{2}$$

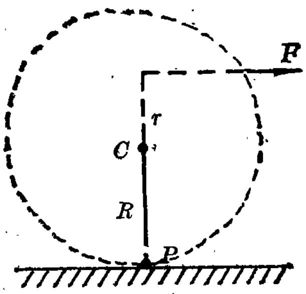

图 1

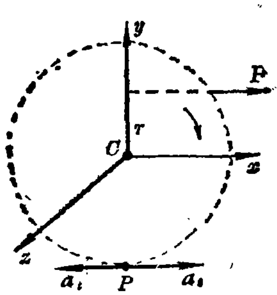

图 2

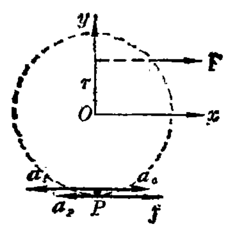

图 3

把(2)式作为(1)式的推论来讲解，可以避免一些不必要的混淆。

参 考 文 献

［1］关洪，大学物理，1983(9)。

［2］张安邦等，大学物理，1982(5)。

［3］B. Kurs,unoğlu, *Modern Quantum Theory*, P.144, *San Francisco and London* (1962).

［4］W. Heisenberg, *Z. Physik*. 43(1927), 1720.

［5］M. C. Robinson, *Can. J. Phys*. 47(1969), 960.

［6］L. E. Ballenfine, *Rev. Med. Phys*., 42 (1970), 358.

［7］M. Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics*, *John Wily* (1974).

［8］苏汝铿，自然杂志，1983(9)。

［9］W. Pauli, *Handbuch der Physik*, *Vk*. 5, (1958), P. 73。

［10］H. Margenau, *Phil. Sci*. 25(1958)23, *Ann. Phys*. (*N. Y*.) 23, 469.