

轴向超音速气吹电弧的准稳态 流动分析与数值计算

中国科学院力学研究所 薛明伦 顾 琅

内容提要 本文在给定喷管几何尺寸及储气缸压力后数值计算小电流时超音速喷管中冷气流对电弧的冷却效果,算出温度,速度沿轴向及径向分布,并考虑了层流及湍流两种情况。计算表明,超音速情况的湍流动量和能量交换可有效地灭弧。本计算方法可供气吹断路器设计时参考。

一、引言

气吹断路器是采用冷气流通过喷管时与电弧交换热量,使电弧在电流过零后不再重燃的装置。本文讨论在拉伐尔喷管中冷气流与电弧的热交换情况,在给定喷管几何形状、压力比及温度的情况下,用数值计算方法计算几种不同电流值下气流的冷却效果,可根据几何尺寸、外电路参数计算灭弧室内部气体状态参数、温度及速度场分布,从而为灭弧室的设计选择提供参考数据。

根据喷管几何尺寸及初始压力 p_0 可确定喷管任一横截面上的压力及压力梯度、应用边界层理论给出喷管中气体的边界层方程,通过 Von. Mises 变换,把边界层方程转换成通常的抛物型偏微分方程,其中以流函数 ψ 代替径向自变量 r 。用差分法列出相应的差分方程组,解出速度,温度分布等。计算中作了层流及紊流两种情况假设。其给定条件为:

a、由于电流的周期变化率相对气流粒子穿过整个喷管的时间较慢,我们把每个瞬时电流下的情况看成平稳态,所以是准稳态流动计算。

b、对交流电流一般都要求电弧在电流过零时熄灭,所以这里的讨论限于接近电流过零时的较小电流范围内,由于电流较小,忽略辐射效应的热传递作用。

c、因为 $B^2/2\mu$ 相对气体压力来说很小,不考虑自身磁场产生的力学效应。

d、温度1000K以下时采用状态方程,超过1000K采用文[1]给出的气体状态参数表插值计算。

二、超音速喷管的作用分析

我们可将断路器看成整个网络中的可变电阻,如图1所示,可以列出:

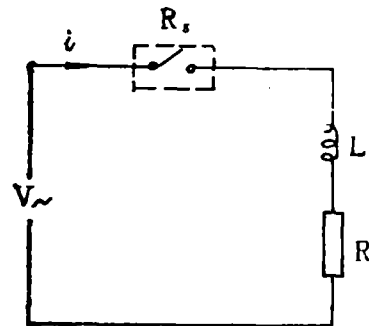


图1 断路器等值回路图

$$L \frac{di}{dt} + i (R + R_s) = V$$

$$V = V_m \sin \omega t$$

式中: R 和 L 为电路网络中总电阻和电感,

R_s 为开关的弧隙电阻。

对 R_s 的理想要求如图 2。

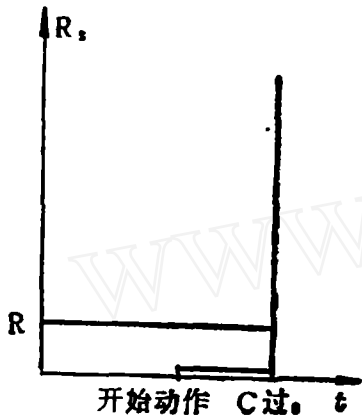


图 2 理想开关的弧隙电阻

a、当接通时 $R_s \approx 0$ 以减少损耗。

b、断开时, 在电流过零前: $R_s \ll R$ 以减少断路器中焦耳热, 并避免产生过电压, 电流过零及以后, $R_s \gg R$ 以断开线路并避免复燃。

弧隙电阻在电流过零前后的变化主要由电弧的输入能(焦耳热)与输出能量的平衡情况决定。在电流过零期间, 假如弧柱的温度下降, 仅之依靠周围气体介质的热传导, 可用下式估算其时间尺度。从热传导方程:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T)$$

式中: λ —导热系数、 T —温度、 ρ —密度

从公式的量纲分析可看出, 温度下降的特征时间长度为 $t \sim \rho C_p a^2 / \lambda$, 其中 a —电弧半径。

试以 SF_6 为例, 在 $p = 2 \text{ atm}$, $T = 3000 \text{ K}$ 时

$$C_p = 4.78 \times 10^3 \text{ J/gK}, \quad \lambda = 4.774$$

$$\times 10^{-3} \text{ W/cmK}$$

$$\text{取 } a = 0.5 \text{ cm}$$

$$\text{则 } t \sim 0.048 \text{ s}$$

$$\text{当 } P = 8 \text{ atm 时, } t \sim 0.11 \text{ s}$$

显然 $t > t_c (0.01 \text{ s})$, t_c 为电流过零周期。由此看出, 仅靠层流热传导不能在电流过零前后散出足够热量, 必须采用强迫对流散热, 如果要求强迫对流的时间尺度 $t_c \ll t_c$, 则:

$t_c = l / u$ 其中 l 为弧长, u 为电弧气体运动速度, 设 $l = 0.01 \text{ m}$, $t_c = 10^{-4} \text{ s}$

则要求 $u = 10^5 \text{ m/s}$, 所以一般应采用超音速喷管。

三、基本模型及方程

下面我们应用气体动力学中的边界层理论来建立方程描述喷管中气体特性, 将电弧周围热层看作边界层, 因为喷管中气体的速度径向分量远小于轴向分量, 可近似认为垂

直于轴的平面上压力是均匀的即 $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$,

计算模型如图 3。喷管形状尺寸可按需要给定, 这里假定从喷管入口到喉部截面积的变化规律为:

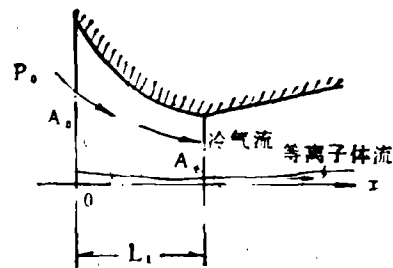


图 3 喷管形状图

$$A(x) / A_1 = \frac{A_0}{A_1} \text{Exp} \left[- \ln \left(\frac{A_0}{A_1} \right) \frac{x}{L_1} \right]$$

其中 A_t 为喉部截面积, A_0 —入口处截面积。喷管后腔即从喉部到出口处倾斜角为 $9^\circ \sim 10^\circ$ 左右,采用轴对称柱坐标,令 v 为气流速度的径向分量, μ 为粘性系数, u 为气流速度的轴向分量,则可写出下列守恒方程:
质量方程:

$$-\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(r\rho u) = 0$$

动量方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ v\frac{\partial u}{\partial r} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mu\frac{\partial u}{\partial r}) \end{cases}$$

能量方程:

$$\rho u\frac{\partial h}{\partial x} + \rho v\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial r}(\lambda r\frac{\partial T}{\partial r}) + \sigma E^2 + u\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

式中 h 为焓值, σ 为导电率, E 为电场强度。因为在电弧气体中的焦耳热以及传热损耗量远大于由摩擦损耗产生的热量,故可忽略最后一项 $\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$, r —径向坐标, x —轴向坐标。 L —喷管总长度。
另有欧姆定律表达式

$$E(x) = I/2\pi \int_0^a cr dr$$

式中:设总电流沿轴向为常数, a 为电弧半径, dp/dx 按冷气流在喷管中一元等熵流动计算。

设 p_0 、 T_0 为来流压力及温度,

$$\begin{aligned} p_0/p &= \left(1 + \frac{K-1}{2} M^2\right)^{K/(K-1)} \\ A/A_t &= \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{K-1}{2} M^2}{(K+1)/2}\right)^{(K+1)/2(K-1)} \\ T_0/T &= (p_0/p)^{(K-1)/K} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} u^2 = \frac{K}{(K-1)} (R_0 T_0 - R_0 T)$$

式中 K 为比热比, M 为马赫数。

应用上列公式,根据各 x 处的截面面积,通过计算马赫数求出 dp/dx 。这里的 T 、 u 值应是冷气流等熵流动下的温度及速度值。其边界条件为:

$x=0$ 时,即喷管入口处:

$$T = T(r, 0), u = u(r, 0)$$

$$v = v(r, 0), E = E_0 \text{ (或给出电流值时的 } E)$$

$$r=0 \text{ 时 } v=0, \frac{\partial T}{\partial r} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

$$r \rightarrow \infty \text{ 时 } \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \text{ 即认为}$$

速度剖面及温度剖面在边界层外缘与冷气流光滑连接。

四、Von Mises变换[2]

为便于数值计算,引进流函数为自变量,边界层方程可以通过变换(亦称Von Mises变换)转换成一般的热传导方程形式,其流函数 ψ 可表达为:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \gamma} = 2\pi\rho u \gamma; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -2\pi\rho v r,$$

这对连续方程自动满足,代入到动量及能量方程中可得到:

$$\begin{cases} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho u \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\mu r^2 \rho u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) & (1) \\ \rho u \frac{\partial C_{PT}}{\partial x} + \dots^* = u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho u \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\lambda r^2 \rho u \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \sigma E^2 & (2) \end{cases}$$

* \dots 系忽略掉一项 $\rho v \frac{\partial h}{\partial r} = \rho^2 u v r \frac{\partial h}{\partial \psi}$

这两个方程都是通常的热传导方程形式，可用数值求解，方程中的粘性系数 μ 以及导热系数 λ 在紊流时包括了紊流引起的增加值。

五、采用六点隐格式的 预测校正法给出差分 方程^[3, 4]

上面的(1)，(2)式可写成如下形式：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \psi} \left(b_1 \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) - q_1 = 0 & (1'') \\ \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \psi} \left(b_2 \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) - q_2 = 0 & (2'') \end{cases}$$

其中 $b_1 = \frac{1}{1.78} \mu r^2 \rho u$

$$q_1 = \frac{9.8 \times 10^4}{1.78} \frac{1}{\rho u} \left(- \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

b_2, q_2 也按同样方式表示。

动量方程(1'')应用预测公式写成如下差分方程：

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\tau} (u_{i,j}^{j+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^j) - \frac{1}{H^2} \left[(B_{i,j+\frac{1}{2}}^j (u_{i,j+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{j+\frac{1}{2}})) \right. \\ & \left. - B_{i,j-\frac{1}{2}}^j (u_{i,j}^{j+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}) \right] - Q_{i,j}^j = 0 \end{aligned}$$

其中 τ 为 x 方向步长， H 为 ψ 的网络步长，由于采用 ψ 为自变量，尽管各喷管截面的半径不同，网格仍是矩形，而不受影响。其表达式为：

$$B_{i,j+\frac{1}{2}}^j = (b_{i,j+\frac{1}{2}}^j + b_{i,j}^j) / 2;$$

$$B_{i,j-\frac{1}{2}}^j = (b_{i,j}^j + b_{i,j-\frac{1}{2}}^j) / 2$$

式中 i 为 ψ 的网格节点， j 为 x 的网格节点

整理后得到如下形式的方程组：

$$\begin{aligned} a_1 u_{i,j}^{j+\frac{1}{2}} + a_2 u_{i,j+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} + a_0 u_{i,j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} &= f \\ i &= 2 \text{ 到 } M-1 \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{2}{\tau} + \frac{1}{H^2} (B_{i,j+\frac{1}{2}}^j + B_{i,j-\frac{1}{2}}^j)$$

$$a_2 = -\frac{1}{H^2} B_{i,j+\frac{1}{2}}^j, \quad a_0 = -\frac{1}{H^2} B_{i,j-\frac{1}{2}}^j$$

$$f = q_{i,j}^j + \frac{2}{\tau} u_{i,j}^j \quad (\text{能量方程类同})$$

采用追赶法解方程组，求得 $u_{i,j}^{j+\frac{1}{2}}$ ， $T_{i,j}^{j+\frac{1}{2}}$ 后可得到相应参数 $b^{j+\frac{1}{2}}$ 及 $q^{j+\frac{1}{2}}$ 值，代入到校正公式中：

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{j+1} - u_{i,j}^j}{\tau} - \frac{1}{2H^2} \left[B_{i,j+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} (u_{i,j+\frac{1}{2}}^{j+1} - u_{i,j}^{j+1}) \right. \\ & \left. - B_{i,j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} (u_{i,j}^{j+1} - u_{i,j-\frac{1}{2}}^{j+1}) \right] - \frac{1}{2H^2} \left[B_{i,j+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} (u_{i,j}^{j+1} \right. \\ & \left. - u_{i,j}^j) - B_{i,j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} (u_{i,j}^j - u_{i,j-\frac{1}{2}}^j) \right] - Q_{i,j}^{j+\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned}$$

整理后得到形式为：

$$A_0 u_{i,j}^{j+1} + A_1 u_{i,j+1}^{j+1} + A_2 u_{i,j-1}^{j+1} = F_{i,j}$$

同样采用追赶法解方程组，共 $(M-2)$ 个方程

边界条件：

$$A_1^i(2) = A_0(2) + A_1(2)$$

$$(M_0 = M-1) \quad A_1^i(M_0) = A_1(M_0)$$

$$+ A_2(M_0)$$

$$A_0^i(2) = 0; \quad A_2^i(M_0) = 0$$

由于电弧弧心温度高，密度低，各种状态参数变化都集中在相对整个横截面较窄的范围内，故采用不均匀网格，在近轴心处即 ψ 小值网格取得密一些，在参数变化不大处($i > M/2$ 后)随 i 的增加网格变疏。在 x 轴向，则因属于初始值类问题，本来选不均匀网格使步长逐渐增长就是合理的。

不能在交流电过零时迅速散热，要避免重燃必须依靠冷热气流之间的热交换。

六、计算结果及分析

以SF₆气体为例计算储气压力为10atm、触头断开后在不同电流下的准稳态流动时动量及能量交换情况，给出轴向及径向的温度场、速度场分布，在给定电流下可给出沿轴向x各处的电场强度值以及电弧半径沿轴向分布，电弧半径以6000K为界，在i = 0时分别作了三种流动情况的计算比较：

(1) 仅依靠喷管的等熵流动，(将气体的粘性系数及导热系数趋于零值)

(2) 有气体分子粘性系数及导热系数的层流流动。

(3) 附加了紊流粘性系数及导热系数的湍流流动计算中给出的在x = 0处初始值u = 20m/s

弧心处温度CT₁ = 12,000K，

冷气流入口温度CT₂ = 600K

1. 三种流动计算结果比较 (σE² = 0时)

等熵流动表达式：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{9.8 \times 10^4}{1.78} \cdot \frac{1}{\rho u} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{9.8 \times 10^4}{1.78 \times c_p} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \end{cases}$$

其中参数ρ, C_p随T、p值变化。

计算结果温度沿轴向分布见图4曲线3，径向分布见图5。轴向分布基本上与喷管的dp/dx沿轴向变化情况吻合、在喉口处变化率最大，在出口处中心速度达4908m/s，温度降到5450K。由于无热传导及对流换热，不存在电弧与周围冷气流之间的热量交换，所以它的径向分布剖面相同，只是因实际喷管尺寸变化而有宽窄之分，结果表明，光靠等熵流动即仅有超音速喷管的作用

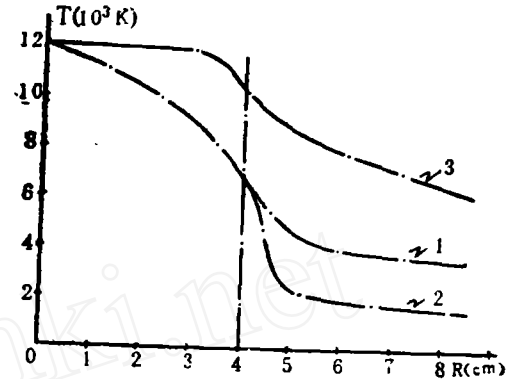


图4 中心温度沿轴向分布曲线

1. 层流计算结果

2. 喷管后腔按湍流计算

3. 仅由dp/dx项引起变化

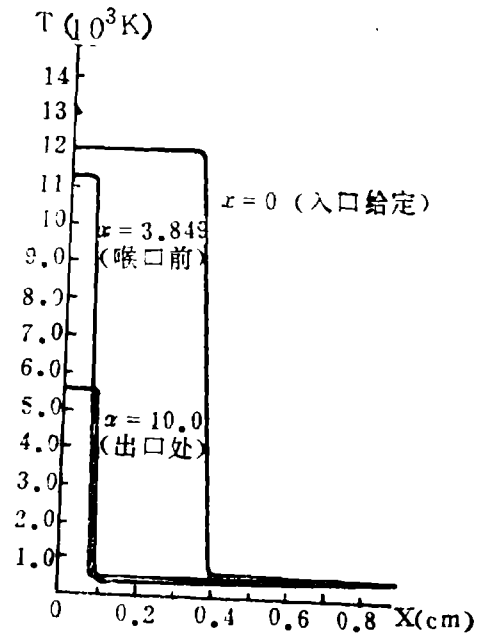


图5 等熵流动温度径向分布图

层流流动情况：因σE² = 0 能量方程

$$\text{为：} \frac{\partial T}{\partial X} = \frac{9.8 \times 10^4}{1.78 \times C_p} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X} +$$

$\frac{1}{1.78C_p} \frac{\partial}{\partial \psi} (\lambda r^2 \rho u \frac{\partial T}{\partial \psi})$ 计算结果见图 4

曲线 1, 可从数量级比较看冷热气流热交换的影响。

$$\text{公式右边第一项} \quad \frac{9.8 \times 10}{1.78C_p} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X}$$

$$\text{第二项为} \quad \frac{1}{1.78C_p} \frac{\partial}{\partial \psi} (\lambda r^2 \rho u \frac{\partial T}{\partial \psi})$$

在前腔, $x = 0.754$ 处, 其第一项为 0.9×10^4 第二项为 1.6×10^4 , 所以冷热气体之间热量交换的影响更大。

在喉口处, dp/dx 增加很快, 起明显作用。

在后腔近口处: $x = 7.961$ (总长 $CL = 10$)

两项量级比为 $4.8 \times 10^4 : 1.85 \times 10^4$ 。这是因为在近出口处, 温度较低, 导热系数下降。所以从曲线上也可见出第一项影响略大。

有紊流流动情况 (考虑从喷管喉口开始), 结果见图 4 曲线 2 湍流的冷却作用是明显的, 增强了冷热气流之间热交换, 所以在 di/dt , dv/dt 大时即大电流开关中应充分利用湍流换热来改善灭弧功能。

2. 初始数值影响问题

从计算结果 (见图 6) 可看出, 计算的温度及速度分布与初始值选取无关, 在喷管入口 1 cm 后计算曲线基本重合。(由于给出的喷管形状在喉口处连接不光滑, 所以曲线有接点)。

3. 误差及稳定性分析

因采用六点隐格式对称差分格式, 是恒稳的。应用的网格节点在 ψ 方向尽量满足计算要求, 在 x 轴向用 $N = 60$, 及 $N = 100$, $N = 120$ 数值计算比较, 数据吻合度好, 相对误差 $< 1\%$ 。

4. 计算了 $i = 100$ 安, 200 安下温度,

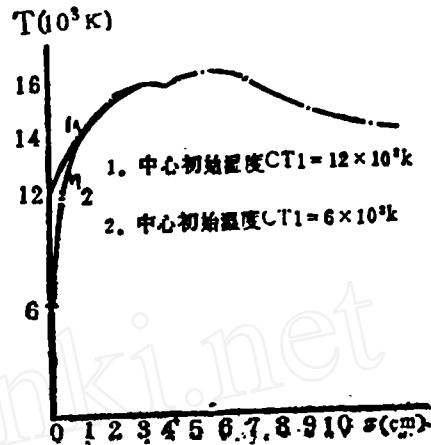


图 6 中心温度沿轴向分布 (100A)

速度, 电场强度, 电弧半径。此时 $\sigma E^2 \neq 0$ 。在电流过零前后, 给出 di/dt 值, 在 dt 间隔比强迫对流时间尺度大许多情况下, 可求得各个 dt 间隔瞬时 I 下的各参数准稳态分布情况, 从而可根据冷却效果调节喷管几何尺寸等。层流与紊流的计算结果同样表明紊流的传热效果更明显。

5. 文[5]Swanson等人提供的紊流公式是有问题的, 因其采用的混合长度 $l \propto$ 电弧半径 R_{arc} , 从计算结果也看出 (取 $\sigma E^2 = 0$ 情况), 当电弧半径逐渐减小, 紊流影响也下降 (按平方倍), 而实际上只要在喷管中发生紊流, 它总是发展的, 在 Swanson 的文章中没有给出喷管后腔的计算结果。所以没有反映出这个问题。

6. 这里仅讨论了小电流, 未考虑辐射的热传递情况, 在大电流时, 辐射比较明显, 方程中加入辐射项后同样可以按这样的方法求解, 只是辐射系数本身不易准确给出。

另外, 从准稳态情况的计算, 考虑 di/dt 的变化, 也可扩展到动态特性计算。

参 考 文 献

1. Leslie. S. Frost 《Composition and Transport Properties of SF6 and their Use in a Simplified Enthalpy Flow Arc Model》 Proceedings of the IEEE. Vol. 59. No.4. April 1971
2. "Viscous Flow Theory" 1 - Laminar Flow. P. 153 SHIH - I PAs. 1956.
3. 南京大学数学系计算数学专业编 《偏微分方程数值解法》 1979年.
4. 冯康编著 《计算方法》
5. Swanson 《Some Numerical Solutions of the Boundary Layer Equations for an SF₆ Arc》 Proceedings of the IEEE. Vol.59. No.4. April 1971.

1984年第6期 勘 误 表

页	行	误	正
11	右 9	有的是后有涉及	有的是没有涉及
12	表 1 的 1)	纺棱形	纺棱形
12	右 8	一般	一般
15	图 5 下注	$J_h = 30\Lambda$	$I_h = 30\Lambda$
15	图 6 下注	电子和电弧	电子在电弧
16	左 12	分裂整造了	分裂创造了
17	图 9 下注	⊗和⊙—总电弧	⊗和⊙—总电弧
17	图 10 下注	高气正电弧	高气压电弧
19	10	Λ 和 ϕ	Λ 和 ϕ
19	11	$V_x = V_{xc}$	$V_x = V_{x0}$
19	右式 (12)	$V_{xc} =$	$V_{x0} =$
19	右 例 5	$\varphi = tg \frac{-1 \dots}{V_{xc}} \quad (15)$	$\varphi = tg \frac{-1 \dots}{V_{x0}} \quad (16)$
19	例 4	Y_c	$r_c =$
20	右式 (21)	$\frac{m\sqrt{(\quad) U_{z0}^2}}{B}$	$\frac{m\sqrt{(\quad) U_{z0}^2}}{B q }$
23	右式 (25)	$m \frac{dV_x}{dt} = -BV_x q$	$m \frac{dV_x}{dt} = -qBV_x$
23	右 12	时, 而 $V_z = V_{z0}$	时, $V_z = V_{z0}$
23	右式 (29)	$\varphi_{x0} =$	$V_{x0} =$
23	右 例 5	$V_y = V_{y0}$ 代	$V_y = V_{y0}$ 代
24	左 1	$V_x = dx/dt, \quad V_y = dy/dt$	$V_x = dx/dt, \quad V_y = dy/dt$
24	左 2	$Z = 0$	$Y = 0$