

# 断裂力学中高阶权函数的计算

李尧臣 王自强

(天津理工学院) (中国科学院力学研究所)

## 1. 前言

权函数是由 Bueckner 首先提出来的, 用它可以灵活方便地计算应力强度因子<sup>[1]</sup>. 后来 Paris 等用有限单元法计算了矩形裂纹体的权函数<sup>[2]</sup>. 1976年, 王自强对权函数的力学意义作了分析研究, 并得到了无限体中含中心裂纹, 其线裂纹及圆弧裂纹的权函数<sup>[3]</sup>. 1981年, 张晓堤计算了矩形裂纹板条在不同长度的边界裂纹情况下的权函数<sup>[4]</sup>. 1981年, 王克仁首先推广了权函数的概念和涵义, 分析和讨论了它们的某些性质<sup>[5]</sup>. 这也就是本文所说的高阶权函数, 它们可以用来计算 Williams 展开式中的各项系数. 本文提供了高阶权函数及其应用的算例, 结果验证了高阶权函数理论的正确性.

## 2. 高阶权函数的定义和计算方法

设在裂纹体内无体力作用, 且裂纹面上无荷载, 则文献[5]对高阶权函数给出如下定义

$$C_l = \int_{s_\sigma} P_l W_{i(l)}^{\sigma} ds + \int_{s_u} u_l W_{i(l)}^u ds \quad (1)$$

$W_{i(l)}^{\sigma}$ 、 $W_{i(l)}^u$  即为高阶权函数,  $l$  称作它的阶,  $C_l$  为 Williams 展开式中的第  $l$  项系数, 其余符号见文献[5]. 对 I、II、III 型裂纹问题, 都有

$$A = \sum_{l=0}^{\infty} C_l(A)_l \quad (2)$$

$A$  代表裂纹体的应力或位移,  $(A)_l$  代表第  $l$  项特征函数所对应的应力或位移.

设裂纹体在状态 (1) 下的应力和位移为

$$A^{(1)} = C_{-l}^*(A)_{-l}, \quad (l > 0) \quad (3)$$

则此情况下边界上的荷载和位移为

$$\left. \begin{aligned} P_i^{(1)} &= C_{-l}^*(\sigma_{ij})_{-l} n_j \quad (\text{在 } s_\sigma \text{ 上}) \\ u_i^{(1)} &= C_{-l}^*(u_i)_{-l} \quad (\text{在 } s_u \text{ 上}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

而

$$C_{-l}^* = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu(-1)^l}{l(1+K)\pi} \quad (\text{I、II型}) \\ \frac{\mu(-1)^l}{4\pi l} \quad (\text{III型}) \end{array} \right\} \quad (5)$$

式中各符号见文献[5].

设裂纹体在情况 (2) 下,  $s_\sigma$  上作用有荷载  $-P_i^{(1)}$ ,  $s_u$  上的位移为  $-u_i^{(1)}$ , 裂纹体内的应

本文于 1984 年 5 月 3 日收到.

力和位移可表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}^{(2)} &= \sum_{n=0}^8 C_{-l,n}(\sigma_{ij})_n \\ u_i^{(2)} &= \sum_{n=0}^8 C_{-l,n}(u_i)_n \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

则有高阶权函数的表达式

$$\left. \begin{aligned} W_{i(u)}^\sigma &= u_i^{(1)} + u_i^{(2)} = C_{-l}^*(u_i)_{-l} + \sum_{n=0}^8 C_{-l,n}(u_i)_n \\ W_{i(u)}^u &= -P_i^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)} n_j = -C_{-l}^*(\sigma_{ij})_{-l} n_j - \sum_{n=0}^8 C_{-l,n}(\sigma_{ij})_n n_j \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

### 3. 算例

#### 1. 用有限单元法计算高阶权函数

利用公式(7),  $C_{-l}^*$  由(5)式给出, 而(7)中的第二项, 即(6)中的  $\sigma_{ij}^{(2)}$  和  $u_i^{(2)}$  则用有限单元法直接算出。

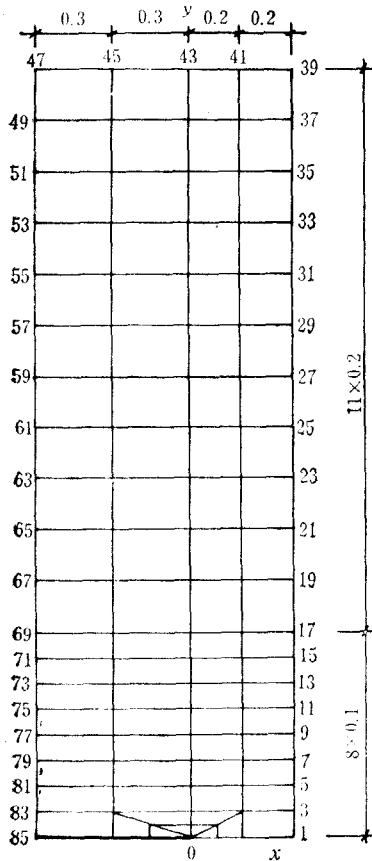


图 1

以单边裂纹板条为例。设  $a$  为裂纹长度,  $W$  为板条宽度,  $L$  为板条长度。取  $L/W = 6$ ,  $a/W = 0.4, 0.5, 0.6$  三种情况。由于试样对称, 可只取一半进行分析。将板条划分为 82 个八结点等参元, 共 291 个结点(图 1)。在裂纹顶端, 设置两层奇异单元<sup>[6]</sup>。边中结点的坐标由下式确定: 即对于内层奇异等参元

$$\gamma_A = \frac{1}{4} \gamma_B \quad (8)$$

对于外层奇异等参元

$$\gamma_C = \frac{1}{4} (\sqrt{\gamma_B} + \sqrt{\gamma_D})^2 \quad (9)$$

$\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C, \gamma_D$  分别为裂纹顶端到  $A, B, C, D$  点的距离(图 2)。然后用 9 点高斯积分形成单元刚度矩阵。

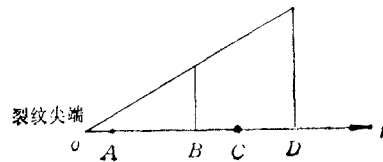


图 2

设板条的全部边界都是  $s_\sigma$ , 荷载列阵为

$$\{R\}^e = \int_{\sigma_0} [N]^T \{\bar{P}\} t ds \quad (10)$$

$[N]$  为形函数矩阵,  $t$  为板厚,  $-\{\bar{P}\} = \begin{Bmatrix} P_x^{(l)} \\ P_y^{(l)} \end{Bmatrix}$ , 其涵义见公式(4)的第一式。对(10)采用三点高斯积分得到  $\{R\}^e$ 。

最后我们算出了 I 型和 II 型情况下的权函数  $W_x^e(l)$ 、 $W_y^e(l)$  ( $l = 1, 2, \dots, 5$ )。由于计算结果篇幅较长,故不在此列出了。

## 2. 应用高阶权函数的例子

对于 I 型问题,计算了简单拉伸(两端

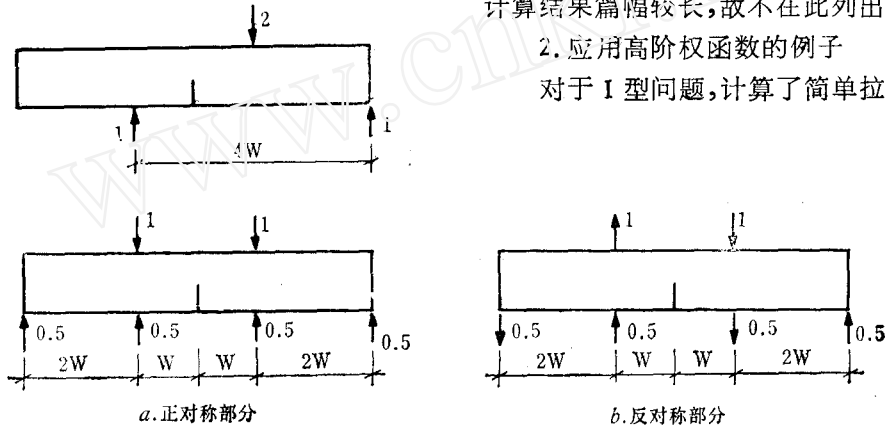


图 3

受集度为 1 的均布荷载), 三点弯曲(跨度为  $4W$ , 跨中作用有单位力) 和不对称加载三点弯曲(对称部分, 如图 3a) 试样的  $K_n^I$ ; 对于 II 型问题, 计算了剪切(裂纹唇边作用有一对单位剪力)和不对称加载三点弯曲(反对称部分, 如图 3b) 试样的  $K_n^{II}$ 。这里的  $K_n^I$ 、 $K_n^{II}$  表达成类似于应力强度因子的型式, 即

$$K_n = \sqrt{2\pi} C_n (K_n \text{ 为 } K_n^I \text{ 或 } K_n^{II}) \quad (11)$$

当荷载为分布力时, 要用(10)把它们化为结点力; 在若干个集中荷载作用的情况下, 求  $C_n$  是很方便的, 只要将这些集中荷载乘以作用点上对应于荷载方向的权函数, 然后加起来就行了。在表 1 中,  $K_1$  即为应力强度因子, 可以看出它们和参考值都很接近, 但  $K_2 - K_3$  的值尚无资料可供比较。

为了解决这个困难, 从而验证权函数理论的正确性, 我们人为地制造五种荷载情况。定义  $n$  为荷载情况号 ( $n = 1-5$ ), 取 Williams 展开式的系数为

$$C_l = \delta_{nl} \quad (12)$$

$\delta_{nl}$  为克朗内克尔符号。用式(2)计算这五种情况下的边界荷载, 再用权函数来计算在这些边界荷载作用下的前五项系数, 它们应和原来的假设值相同。当取  $a/W = 0.5$  时, 计算结果如表 2。

表中  $n = 5$  的情况, 或者说  $C_5$  的值与原先假设的值相差较大, 这是因为在计算时用到了第五阶权函数及展开式的第五项生成的荷载, 它们都与辐角  $\theta$  的三角函数值有关。随着  $|n|$  的增加, 它们在边界上的振荡逐渐加快。因此, 如果仍采用原来的积分区间和高斯积分点, 计算误差就会增加。预期在加密了网格以后, 情况就会有所好转。

II 型问题在  $n = 2$  的情况下各系数的值均为零, 这是因为  $(\sigma_{ij})_2 \equiv 0$  的缘故。此外,

表 1 用权函数计算的  $K_1 \dots K_5$  的值

裂纹长度 $a/W$	问题类型	荷载型式	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_1$ 的参考值
0.4	I	简单拉伸	2.323	-0.381	-0.500	-0.090	-0.517	2.36
		三点弯曲	7.716	-0.073	-7.716	1.673	-5.089	7.94
		图 7a.	8.340	0.476	-8.963	3.284	-6.621	8.35
	II	剪切	2.480	5.773	-2.673	1.998	4.646	2.573
		图 7b.	1.346	-0.728	1.691	-0.777	-0.976	1.35
0.5	I	简单拉伸	3.443	-0.283	-1.961	0.231	-1.445	3.54
		三点弯曲	10.255	0.609	-13.156	2.524	-7.913	10.62
		图 7a.	10.943	1.535	-15.052	4.462	-9.291	11.12
	II	剪切	2.405	4.990	-1.787	1.408	2.718	2.488
		图 7b.	1.735	-0.554	1.346	0.434	-1.656	1.84
0.6	I	简单拉伸	5.433	0.006	-5.522	1.014	-4.154	5.53
		三点弯曲	14.679	1.789	-24.248	4.569	-15.968	15.05
		图 7a.	15.448	3.176	-26.981	6.998	-17.428	15.66
	II	剪切	2.476	3.975	-1.199	1.493	1.487	2.542
		图 7b.	2.140	-0.198	0.906	1.810	-2.279	2.28

表 2 在人为荷载作用下展开式的前 5 项系数之值

问题类型	荷载情况号 $n$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
I	1	0.9785	-0.0014	0.0203	-0.0015	0.0155
	2	-0.0010	1.0009	-0.0008	-0.0009	0.0021
	3	0.1495	0.0266	0.8000	0.0399	-0.1228
	4	0.0002	-0.0023	0.0091	0.9832	0.0179
	5	-1.0752	-0.1687	1.4862	-0.4106	1.9354
II	1	0.9998	0.0822	-0.0096	0.0045	0.0192
	2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.0055	0.3072	0.9662	0.0184	0.0686
	4	0.0268	1.9241	-0.1607	1.1048	0.2817
	5	0.0745	3.2345	-0.3860	-0.2379	1.6670

II 型问题的  $C_2$  值与假设值偏离甚远,这是因为它代表刚体转动,实际上是个不定值,它对应力毫无影响。

#### 4. 讨论

##### 1. 有体力作用和裂纹面上有荷载时的情况

一般地说,如果体力可展成形如  $f(\theta) \cdot r^m$  的幂级数,裂纹面上的荷载可展成  $x$  的幂级数,则易于求得各自的特解,从而把问题转化为第二节中所述的情况。

一种比较有意义的情况是:在裂纹尖端的某个确定的邻域内无体力作用,而裂纹面上又无荷载。可设两个场,一个为实际可能的场,裂纹体  $A$  上作用有体力  $f_i$ ,在裂纹顶端

的某邻域  $E$  内,  $f_i = 0$ ,  $s_\sigma$  上作用有边界荷载  $P_i$ ,  $s_u$  上的位移为  $u_i$ ; 另一个场就是第二节中所述的特殊状态下的场, 它的位移为  $W_{i(\lambda)}^\sigma$ , 应力为  $-W_{i(\lambda)}^\mu$ . 以裂纹尖端为圆心作一个半径为  $\varepsilon$  的小圆  $\Gamma$ , 并使  $\Gamma$  及其内部  $A'$  完全被包含在  $E$  内 (图 4). 在  $A-A'$  内应变能有限, 于是根据互等定理得

$$\begin{aligned} & \int_{A-A'} f_i W_{i(\lambda)}^\sigma dA + \int_{s_\sigma-s_\varepsilon} P_i W_{i(\lambda)}^\sigma ds \\ & + \int_{\Gamma} P_i W_{i(\lambda)}^\sigma ds \\ & = - \int_{\Gamma} W_{i(\lambda)}^\mu u_i ds - \int_{s_u} W_{i(\lambda)}^\mu u_i ds \quad (13) \end{aligned}$$

由于在  $A'$  内  $f_i = 0$ , 因此

$$\int_{A-A'} f_i W_{i(\lambda)}^\sigma dA = \int_A f_i W_{i(\lambda)}^\sigma dA \quad (14)$$

$s_\varepsilon$  为包含在  $A'$  内的裂纹面 (图 4), 因此有

$$\int_{s_\varepsilon} P_i W_{i(\lambda)}^\sigma ds = 0 \quad (15)$$

于是

$$\begin{aligned} & \int_A f_i W_{i(\lambda)}^\sigma dA + \int_{s_\sigma} P_i W_{i(\lambda)}^\sigma ds + \int_{s_u} u_i W_{i(\lambda)}^\mu ds \\ & = - \int_{\Gamma} P_i W_{i(\lambda)}^\sigma ds - \int_{\Gamma} u_i W_{i(\lambda)}^\mu ds \quad (16) \end{aligned}$$

当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时,  $W_{i(\lambda)}^\sigma$ 、 $W_{i(\lambda)}^\mu$  可只取 (7) 式的第一项, 又由于  $\Gamma$  和  $A'$  上均无体力, 故  $P_i$ 、 $u_i$  可由 (2) 式计算, 即

$$\left. \begin{aligned} P_i &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m (\sigma_{ij})_{mn} n_j \\ u_i &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m (u_i)_m \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

把 (7) 式的第一项和 (17) 代入 (16) 的右边, 再利用文献 [5] 中的 (3-3), 得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ - \int_{\Gamma} P_i W_{i(\lambda)}^\sigma ds - \int_{\Gamma} u_i W_{i(\lambda)}^\mu ds \right] = C_l \quad (18)$$

最后我们得到了

$$C_l = \int_A f_i W_{i(\lambda)}^\sigma dA + \int_{s_\sigma} P_i W_{i(\lambda)}^\sigma ds + \int_{s_u} u_i W_{i(\lambda)}^\mu ds \quad (19)$$

## 2. 高阶权函数与特征函数的正交关系及其唯一性

上节中的后一个例子实际上已说明了这个正交关系, 它可用公式表示为

$$\int_{s_\sigma} (\sigma_{ij})_{nn} n_j W_{i(\lambda)}^\sigma ds + \int_{s_u} (u_i)_n W_{i(\lambda)}^\mu ds = \delta_{nl} \quad (20)$$

权函数的唯一性是容易证明的. 设有一裂纹体  $A$ ,  $s_\sigma$  上作用着荷载  $P_i$ ,  $s_u$  上的位移为  $u_i$ . 设有两个权函数  $W_{i(n)}$  ( $W_{i(n)}^\sigma$  及  $W_{i(n)}^\mu$ )、 $W'_{i(n)}$  ( $W'_{i(n)}^\sigma$  及  $W'_{i(n)}^\mu$ ), 分别将它们代

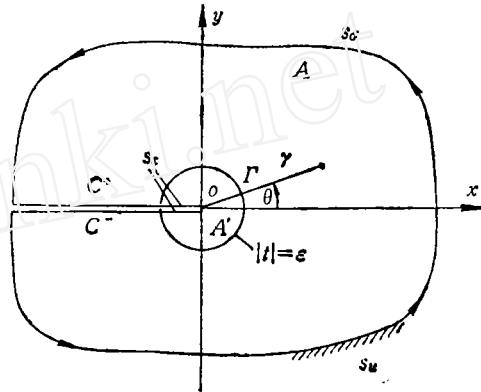


图 4

入(1)式再相减,得

$$\int_{s_\sigma} (W_{i(n)}^\sigma - W_{i(n)}^{\prime\sigma}) P_i ds + \int_{s_u} (W_{i(n)}^u - W_{i(n)}^{\prime u}) u_i^{\prime} ds = 0 \quad (21)$$

要使上式对任意的  $P_i, u_i^{\prime}$  都成立,就必有

$$W_{i(n)}^\sigma = W_{i(n)}^{\prime\sigma}, \quad W_{i(n)}^u = W_{i(n)}^{\prime u}$$

高阶权函数的这些性质,可能在断裂力学数学理论上有一定意义。

### 参 考 文 献

- [1] Bueckner, H. F., *Zeitschrift für Angewandte Mathematik and Mechanik*, Band 46 (1970), 529—545.
- [2] Paris, P. C., McMeeking, R. M. and Tada, H., *The Weight Function Method for Determining Stress Intensity Factors, Cracks and Fracture*, ASTM STP 601 (1976), 471—489.
- [3] 王自强,断裂力学中的权函数,1976年北京断裂力学交流会第二次会议文集,261—276页.
- [4] 张晓堤,在强奇异项上加有限元法计算裂纹体的权函数,力学学报特刊,(1981).
- [5] 王克仁,断裂力学中权函数的推广和计算,《力学学报》,1981年第6期.
- [6] Wang Keren (王克仁), Xu Jilin (徐纪林) and Gao Hua (高桦), *Calculation of Stress Intensity Factors for Combined Mode Bend Specimens*, *Scientia Sinica*, **XXII**, 5 (1979).

## CALCULATION OF HIGH-ORDER WEIGHTING FUNCTIONS IN FRACTURE MECHANICS

Li Yaochen Wang Tzuehiang

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

### Abstract

High-order weighting functions can be used to determine the coefficients of every term of the Williams expansions for cracked bodies of linear elasticity. In this paper, by means of the finite element method we calculated the first to the fifth order weighting functions of symmetric-strip-specimens, computed the coefficients of the first five terms of the expansions under certain given loading conditions, and discussed how to deal with the body forces and the loadings on the crack surfaces.