

圆柱绕流旋涡运动及离散涡方法

中国科学院力学研究所 凌国灿

圆柱绕流问题最早是 Stokes 于 1901 年开始研究的。最近 15 年来，以圆柱非定常分离流为代表的非流线型物体绕流及伴随的旋涡运动受到很大重视，这主要是因为它与近代海洋工程、航空工程及工业空气动力学中不少急待解决的流体力学问题有关。例如，海洋平台桩柱、导管等所受的波浪力分析中，当结构物特征尺寸与波浪的波长相比较小（且 K-C 数在 5—30 范围内）时，柱后的旋涡脱落及它所诱导的力（引起构件的振动）是主要应考虑的问题，要给出正确的预计。导弹无侧滑大攻角飞行时背风面分离涡面的不对称运动产生不希望有的偏航力，分析其产生的机理，预计其大小并设法抑制这种力十分重要。此外还有气动噪声及高耸建筑物的风振问题等等。这些复杂问题的解决常常要以低速高雷诺数圆柱非定常分离流研究为基础。

实验研究表明圆柱非定常分离流在不同雷诺数范围内有不同的流动特征^[1]，见表 1。

表 1

亚临界状态		临界状态	超临界状态	超临界后状态
边界层特性	层流	过渡	湍流	湍流
分离位置	约 82°	过渡	120°—130°	约 120°
近分离处的剪切层的特性	层流		层流分离，空泡湍流再附	湍流
Strouhal 数	0.212—2.7(1/Re)	过渡	0.35—0.45	约 0.29
尾迹	Re < 60 层流 60 < Re < 5000 漩街 Re > 5000 湍流	无周期特性		
Re 近似范围	< 2 × 10 ⁵	2 × 10 ⁵ —5 × 10 ⁵	5 × 10 ⁵ —3 × 10 ⁶	> 3 × 10 ⁶

在高雷诺数亚临界情况下，随着时间的增长，流动过程主要包括非定常边界层分离，剪切层的形成与变化，旋涡的发生发展，旋涡的不对称运动及周期性脱落，以及涡街的变化等等。近代流场显示技术的发展使近尾迹区的流动观察更加深入细致，如非定常流初期阶段中柱后二次涡的发生发展及对主涡的影响^[2]，使人们加深了对一些流动机制的认识。但后剪

切层特性及随时间的变化，旋涡的脱落过程，涡量的衰减和湍流耗散规律等还未搞清楚。这些问题既是机理问题又是建立理论模型的基础，要进行更深入的研究。

非定常圆柱粘性分离流整个流动问题的理论分析在原则上讲就是要求解给定条件下的N-S方程。但目前N-S方程数值解结果在高雷诺数时可靠性不大。因此势必求助于其它近似理论模型。非流线型物体（如凸物体）粘性分离绕流的一个重要特征是流动中涡量的生成、集中、对消和耗散。从不可压二维流动的N-S方程

$$D\xi/Dt = v\nabla^2\xi, \quad \nabla^2\psi = \xi \quad (1)$$

可知，涡量函数 ξ 随时间和空间的变化将决定整个流动。一种简化的理论模型是基于如何近似而又较准确地反映出 ξ 的分布规律。离散涡方法实质上即是这种类型。近年来在分析凸物体粘性分离绕流问题上，离散涡方法有着很大的发展^[17]。在预计物体所受阻力，描述旋涡运动特征，计算脱落频率等方面较为成功而方法又很简单。但在应用中还存在许多需要分析和讨论的问题。

本文介绍和分析讨论求解圆柱绕流和旋涡运动的离散涡方法，给出最近的一些研究结果并提出需要进一步研究的几个问题。

1. 求解圆柱非定常绕流及旋涡运动的离散涡方法简述

假设所研究的问题是在临界雷诺数以下且在边界层假设成立的高雷诺数范围。因此可用无粘流理论并借助于边界层流动、环量和集中涡量来表示这种小粘性流体的真实流动。假设边界层分离所形成的剪切层也是薄的，可用无粘涡层来代替。离散涡方法是指对流场中集中的涡量或连续分布的涡量用许多分散的有一定强度的小涡来近似表示。因此用离散涡方法后，流场中除边界层及后剪切层以外均为无粘位流。流动满足下述数学关系：

$$\left. \begin{array}{l} D.E. \quad \Delta^2\psi = \xi \\ I.C. \quad t=0, \quad \psi = 0 \\ B.C. \quad r=1, \quad \psi = 0; \quad r \rightarrow \infty, \quad \psi = yH(t) \\ \quad \quad H(t)=0, \quad t \leq 0; \quad H(t)=1, \quad t > 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

其中

$$\xi(r, \theta, t) = \sum_1^N \Gamma_n \delta(r - r_n) \delta(\theta - \theta_n) \quad (3)$$

而

$$\iint \xi ds = \sum_1^N \Gamma_n \quad (4)$$

Γ_n 为第 n 涡的强度，它的极坐标为 r_n , θ_n , N 为离散涡总数。

上述问题之解可由均匀流、偶极子、点涡及其对圆柱的镜像涡叠加而成。设解的复函数为 $W(z)$ ，第 k 个点涡的运动速度为 dr_k/dt , $d\theta_k/dt$ ，则它们分别是^[3]：

$$W(z) = z + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^N i \Gamma_n \ln \frac{z - 1/z_n}{z - z_n} \quad (5)$$

$$\frac{dr_k}{dt} = \frac{r_k^2 - 1}{r_k^2} \cos \theta_k + \sum_{n=1}^N \Gamma_n r_n \sin(\theta_k - \theta_n) S_1^{-1} - \sum_{n \neq k}^N \Gamma_n r_n \sin(\theta_k - \theta_n) S_2^{-1} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_k}{dt} = & -\frac{r_k^2 + 1}{r_k^3} \sin \theta_k - \sum_{n=1}^N \Gamma_n [r_k r_n^2 - r_n \cos(\theta_k - \theta_n)] (r_k S_1)^{-1} \\ & + \sum_{n \neq k}^N \Gamma_n [r_k - r_n \cos(\theta_k - \theta_n)] (r_k S_2)^{-1} \quad (7) \\ S_1 & = S_1(r_n, r_k, \theta_n, \theta_k), \quad n=1, 2, \dots, N \\ S_2 & = S_2(r_n, r_k, \theta_n, \theta_k), \quad k=1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

边界层内的流动将由二维非定常不可压层流边界层方程及相应的初边界条件决定，无量纲形式可写为^[8]

$$\left. \begin{array}{l} \text{D.E.} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = -\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \text{I.C.} \quad t=0, \quad \bar{u} = \bar{v} = 0 \\ \text{B.C.} \quad r=1, \quad \bar{u} = \bar{v} = 0; \quad r \rightarrow \infty, \quad \bar{u} = U(r=1, \theta, t) \end{array} \right\} \quad (8)$$

其中 \bar{u}, \bar{v}, p 分别为周向速度、径向速度和压力。如果主要研究长时间后的流动或稍长时的边界层流动，则初始条件可以略去，在准定态变化下的边界层分离点可由 Stratford 方法给出^[3]，即

$$\left. \begin{array}{l} C_p \left(x' \frac{dC_p}{dx'} \right)^2 \Big|_S = 0.0104 \\ x' = 0 - 0_{BL} \\ 0_{BL} = 0_{p_{min}, f} - \int_0^{0_{p_{min}, f}} \left(\frac{v_{Bf}}{v_{Bf}^*} \right)^5 d\theta \\ C_p = (p - p_{min, f}) / \left(\frac{1}{2} \rho (v_{Bf}^*)^2 \right) \end{array} \right\} \quad (9)$$

其中 $p_{min, f}$ 为柱面迎风面上的最小压力值， $0_{p_{min}, f}$ 为该点离后驻点的周向位置。 v_{Bf}^* 为物面位流速度。

外流场、边界层以及尾迹三者的相互干扰主要由这样一种关系来体现：边界层分离产生离散涡，这些离散涡与原来的位流场组成新的位流场，在该流场中引起边界层分离产生新的离散涡，又构成新的位流场。如此反复。而离散涡的强度假设为经过一个时间步长在分离点处边界层的涡流量。它可由分离点处的边界层外缘速度 v_{Bs} 给出，即^[8]

$$\Gamma_n = (1/2) v_{Bs}^2 \cdot \Delta t \quad (10)$$

这就是用离散涡法与边界层理论相结合的方法求解圆柱粘性分离流及旋涡运动的基本思想。当后剪切层产生分离时还应计及二次涡的影响。

2. 离散涡方法应用中的主要问题

1) 离散方法分析及涡面运动稳定性讨论 用离散点涡代替连续分布的涡面以后，点涡群随时间变化的后续性态是否能代表连续涡面的运动？40年代 Rosenhead 和 Westwater 首先用离散涡代替一个二维强度均匀的涡面，研究它的非定常运动。他们用10个点涡进行数值计

算，得到了很光滑的卷起的涡面。后来 Birkhoff & Fisher (1959) 怀疑用有限个点涡代替涡面运动的正确性。Takami & Moore (1971) 试图再现 Rosenhead 的上述结果。他们用更多的点涡数代替涡面，用更精确的数值方法计算点涡的运动，但最后却得不到光滑的涡卷，点涡运动呈现杂乱状况。在别的一些例子中也出现点涡运动趋于随机性的杂乱运动的情况，如图 1 所示。这些情况表明，涡面与离散涡的集合可能是两个基本上不同的东西。事实上，无厚度，强度为 Γ 的二维涡面 $z^*(\Gamma, t)$ 的运动应满足如下的积微分方程^[4]：

$$\frac{\partial z^*}{\partial t} = -\frac{i}{2\pi} P \int \frac{d\Gamma'}{z(\Gamma t) - z(\Gamma' t)} + U_E - iV_E \quad (11)$$

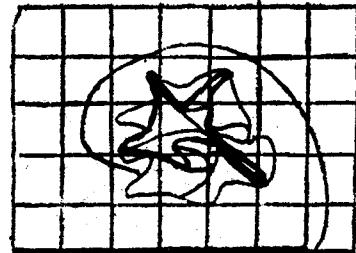


图 1

P 指 Cauchy 主值。 U_E, V_E 为涡面背景流场的速度分量。为计算一个连续涡面对空间点的诱导速度，可把该涡面分成 N 段，若设每段边界标记为 $S_{k+1/2}$, $1 \leq k \leq N$ ，那么空间任意一点 z 处的诱导共轭复速度 $\bar{q}(z)$ 可表示为

$$\bar{q}(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \int_{S_{k-1/2}}^{S_{k+1/2}} \frac{\gamma(s_1) ds_1}{z - z_1} \quad (12)$$

当 z 点不在涡面上时 $\bar{q}(z)$ 可近似表示为

$$\bar{q}(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k}{z - z_k}, \quad \Gamma_k = \int_{S_{k-1/2}}^{S_{k+1/2}} \gamma(s_1) ds_1 \quad (13)$$

z_k 位于涡段 $S_{k-1/2}S_{k+1/2}$ 之中，而当 z 点位于涡面上时，若该点记为 z_i ，则上述 $\bar{q}(z)$ 积分式在 z_i 点出现奇性，应用 Cauchy 主值来表示。在涡段分得很短而其强度为常数的情况下， $\bar{q}(z_i)$ 可近似表示为

$$\bar{q}(z_i) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \neq i}^N \frac{\Gamma_k}{z_i - z_k} - \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{\Gamma_i e^{-i\theta_i}}{|S_{i+1/2} - S_{i-1/2}|} - \ln \left| \frac{z_i - z_{i+1/2}}{z_i - z_{i-1/2}} \right| \right] \quad (14)$$

而孤立的 N 个点涡对空间 z_i 点的总的诱导速度是

$$q(z_i) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \neq i}^N \frac{\Gamma_k}{z_i - z_k} \quad (15)$$

上述表明，连续涡面对 z_i 的诱导速度在一般情况下应由两部分组成。只有当 z_i 位于涡段中间，即当 $z_i = (1/2)(z_{i-1/2} + z_{i+1/2})$ 时对数项才为零。此时 N 个孤立点涡的诱导速度与该连续涡段的诱导速度两者类同。 z_i 离中点愈远，对数项的贡献增大，离散方法带来的误差愈大。

用离散涡方法计算诱导速度在数学上相当于对涡面运动方程中求积分主值 $P \int \frac{d\Gamma'}{z(\Gamma t) - z(\Gamma' t)}$ 时用梯形求积方法。而涡点当作分隔的浮点标记。

Fink & Soh (1974)^[5] 提出上述重要分析，指出了以前用离散涡方法计算点涡运动最终导致杂乱无章的原因。他们用再离散的方法即把上一时刻所得的离散涡重新排列（满足总涡量及涡量矩不变）使每个涡的新位置在各涡面段的中心，而后再计算这些点涡的运动。采

用这种方法改变了长时间后点涡运动的性态，随机性的杂乱运动大大减少。如图2所示。Sarpkaya用再离散的方法计算圆柱绕流长时间后的旋涡，得到了有序的涡街^[12]。如图3所示。

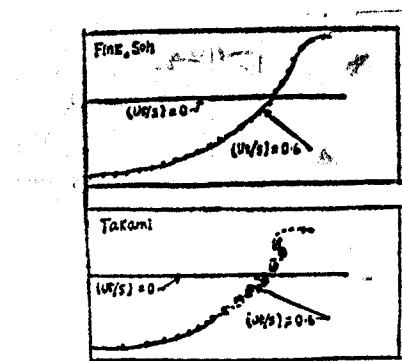


图 2

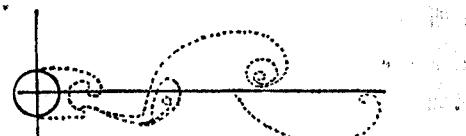


图 3 涡面再离散($t=47.7$)

上述分析基于无粘流理论。很明显，当 $|z_i - z_k| \sim \delta \ll 1$ 时，点涡群的诱导速度趋于 $1/\delta$ 。而且两个很接近的点涡会互相旋转。如果计算时间步长选得比这种自旋特征时间还短或相当，则可以抑制点涡彼此接近时相互旋转的倾向。但在实际计算中，再离散的方法或时间步长的仔细选择（避免自旋）并不是极简便的，而且也有例子表明再离散的方法并不能确保不发生点涡的杂乱运动^[4]。

点涡相互接近时诱导速度趋于 $1/\delta$ 的奇性在实际流动中是不存在的。为了消除奇性应考虑旋涡的粘性涡核结构。^[3]给出了二维粘性涡诱导速度表达式应是

$$\nu_{ijk} = \left(\frac{\Gamma_i}{2\pi l_{ik}} \right) \left\{ 1 - \exp \left(-1.256 \frac{l_{ik}^2}{r_{ci}^2} \right) \right\} \quad (16)$$

$$r_{ci} = r_{ci}^0 + 3.17 \left(\frac{t_i}{Re_D} \right)^{1/2}$$

其中 ν_{ijk} 为第 i 个涡对涡 k 的诱导速度， l_{ik} 为两涡心的距离， r_{ci} 为涡 i 的涡核半径， r_{ci}^0 为它的初始涡核半径， t_i 为涡的“生长年龄”。因而涡核半径随时间增长而又与雷诺数有关。在涡核半径范围内，无粘流理论计算只给出上式 ν_{ijk} 中的第一项值，忽略了当 $l_{ik} \rightarrow 0$ 时有重要影响的指数衰减项。在离散涡方法应用中，^[3—8]都考虑到这个修正。为了计算方便，^[8]将涡核范围内的速度都近似取为零。此外，涡核内的速度可用线性分布近似，即用 Rankine 涡模型。

二维涡面运动有 Helmholtz 不稳定性问题。一个强度为 γ 的等强度平面涡面受到一个波长为 λ 的无限小扰动以后，其波动的增长 y 是^[9]

$$y = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2n\pi x/\lambda) + b_n \sin(2n\pi x/\lambda)] e^{n\pi\gamma t/\lambda} \quad (18)$$

当 $a_n = b_n = \exp(-|n|^{1/2} n\pi\gamma t_0/\lambda)$ ， $\varepsilon \ll 1$ 时，只是在 $t \leq t_0$ 时涡面的运动是稳定的，涡面随时间的变化是光滑的。当 $t > t_0$ 时波动的增长呈指数增长，不收敛。上述分析结果是针对二维等强度平面涡面，相当于二股反向匀直流在交界面的运动稳定性问题。变强度并与边界层

相接的弯曲涡面运动稳定性分析比较复杂。但 Saffman^[4] 讨论了类似的问题。由上述典型问题的分析可知, Helmholtz 不稳定性增长正比于涡面强度反比于扰动波长 λ , 当涡面从圆柱边界层分离形成后, 在往下游发展时, 随着涡面的伸展实际涡强是减小的, 因此螺旋涡卷的变化, 对 Helmholtz 稳定性而言是趋于稳定的。

涡面运动从数学上看是个初值问题。其解的存在性及唯一性问题目前还没有得到很好论证。但在许多实际计算中, 只要运用恰当的离散方式并结合进行粘性涡核修正, 离散涡方法已给出了许多可信赖的结果。

2) 边界层分离及新生离散涡的初始位置 对于一个短暂的非定常初期阶段, 边界层分离位置因有两种不同的分离准则即 Blasius 准则及 MRS 准则^[10] 而给出不同的结果。两者的初始分离角相差 40° , 初始分离时刻无量纲时间 $\bar{t} = vt/R$ 相差 0.3。当 $\bar{t} \rightarrow 1$ 时两种准则所给出的结果逐渐接近。当用离散涡的脱落来表示涡量从边界层分离出来往下游输送时, 将新生涡放在边界层开始出现严重增厚、分离泡开始出现的位置, 是一种较为合理的考虑。^[11] 用 MRS 准则解得的分离位置作为新生涡位置, 研究了初始尾迹的发展得到了有序光滑的旋涡结构。因为求解非定常边界层分离位置要经过复杂的数值计算, 而圆柱边界层变化从它开始形成起在一段很短的时间内就趋于准定态变化。因此, 如果所研究的问题主要在稍长时间以后的运动, 常常可略去 $\bar{t} < 1$ 这一段前期变化过程。从边界层呈准定态变化开始计算 ($\bar{t} \approx 1$)。

根据离散涡方法的原始思想, 每个新生涡的初始位置应置于边界层分离处。但新生涡脱落时由于它及它的镜像涡的影响使分离点附近的流场计算很不真实, 促使分离提早, 计算所得的分离角偏小。如^[8] 计算所得的长时间后平均分离角只有 $\pm 67^\circ$, ^[12] 的解是 $\pm 77^\circ$, 比通常公认的值 $\pm 82^\circ$ 小。设法减小这种影响的一个考虑是让新生涡的诱导作用在经过一个时间步长或半个时间步长后再开始计及, 如^[3, 13]。这相当于新生涡的位置放在离分离点 $v_i \Delta t$ 或 $(1/2)v_c \Delta t$ 的位置 (其中 v_i 为涡 i 的背景流场速度, $(1/2)v_c$ 为涡点的传导速度)。^[3] 用这种方法并结合粘性涡核修正计算所得的分离位置比^[8] 有所改善, 如图 7 所示。为了回避理论计算上的这种问题,^[13] 根据圆柱速度分布及分离位置的实验测量提出一个确定分离点位置的经验方法, 即分离发生在物面最大速度值下降了 5% 的一个位置。这个判断虽然没有理论证明但与实际相符。这种经验方法对于分离点移动并不显得重要的流动问题研究, 如长时间后的旋涡运动来说是可取的。

确定新生涡的径向位置目前已有不少方法。一是根据涡脱落瞬间, 涡点处要满足无滑移条件, 导出点涡离分离点的径向距离为 $|v_i| \Delta t / 2\pi$ ^[8]。另一种是考虑初始径向距离可能会影响旋涡运动的不稳定性有影响, 从数值实验中选择一个恰当的初值^[14]。^[13] 提出涡的脱落沿着柱面的切线方向, 而新涡位于距分离点 $(1/2)v_c \Delta t$ 或 $(1/4)v_c \Delta t$ 的位置上。当考虑粘性涡核修正时, 初始涡核半径选作边界层厚度之半确定了它的径向初值。凡此等等, 在物面分离点随时间变动的分离问题中离散涡位置并不一定需要从无滑移条件决定, 现在做法有相当大的不同。

3) 二次涡、二次涡影响及旋涡脱落机理 ^[3] 及^[15] 的分析与计算表明, 在圆柱绕流的非定常流动初期阶段, 回流区物面流速可达到来流的量级, 一部分后剪切层从某个时刻起处于逆压梯度的持续作用下 (如图 12 所示), 它将发生分离并产生与主涡涡量相反的二次

涡。二次涡的出现与增长影响当地的流场和物面的速度与压力分布（见图14），阻碍边界层

涡量往下游输送和主涡涡量的积累。这种过程发展到一定程度，主涡层断裂变成了几乎没有涡量补充的自由涡卷。同时，在紧靠柱面处形成一个二次涡对（见图4）。[15]指出二次涡使主涡层断裂是促使对称主涡开始不稳定，产生不对称脉动运动的条件。Stansby & Dixon^[16]，Deffenbaugh & Marshall^[8]在亚临界雷诺数假设下，在长时间运动的旋涡运动计算中也考虑了二次涡的计算，他们注意到二次涡出现将对消一部分尾迹中的环量，使总环量的理论估算值与实验结果相近。是否计及二次涡，在柱面上对消的涡量也各不相同^[16]。[3]及[15]的计算分析与雷诺数在1220, 1800, 3000, 5000等一些已有的实验观察完全相符。但也有一个 $Re = 9500$ 的流场显示没有看到上述的二次涡过程，也没有观察到如 Stansby^[16] 和 Deffenbaugh^[8] 所考虑的后剪切层分离。其他一些高雷诺数实验，当时并没注意到二次涡问题。因而理论计算中

认为重要而必须加以考虑的二次分离问题还必须进行更多的实验研究。主要是在高雷诺数时回流区剪切层在初期流动和长时间流动中的特性及分离是否发生的问题，笔者在[3]及[15]中曾计算了两种不同强度的二次涡情况（即， $(1/2)v_{\infty}^2 S \Delta t \cdot \sigma, \sigma = 0.385, 1$ ），结果表明，不论二次涡的强弱如何，它们的积累都导致主涡层断裂。这似乎表明只要存在二次分离终将导致这种现象。

对于旋涡从柱体上脱落的机制目前还有不同解释，基于实验和数值试验（N-S 方程数值解和离散涡方法计算结果）两个方面提出了一些看法。一个共同的说法是一边的旋涡（如顶部）是被对面（底部）流动所捕获或拉入尾迹的。捕获的原因从数值解^[8, 12] 可以看到是由于涡对受到扰动后发生前后位置错动，靠近柱面的旋涡使柱面压力分布降低，处于压力较高的对边的涡层被“拉”入了尾迹。[12]认为这个涡层的被拉伸，耗散而断裂，变成没有涡量补充，这相当于一个脱落过程。而计及二次涡影响的数值解，[3]及[15] 表明靠近柱身的主涡层断裂是由于与二次涡的涡量对消而发生的。[15]提出在此以后在扰动下发生不对称脉动，由于底压不对称而高压处的外流进入尾迹，旋涡被带走向下曳。上述几种不同的机理解释还需要有进一步的实验研究和数值试验来统一或补充。

在数值计算中如何引入不对称扰动，如何实现主涡的脱落，这个问题相应与上述不同的分析将有不同的处理。[12]通过数值试验，找出一个对小扰动最敏感的时刻引入不对称扰动，当涡量脱落率 $\partial \Gamma / \partial t$ 达到最小值时，在一个时间步长的间隔内切断主涡层。“切断”的方法是把一个点涡从涡面中删除掉。而考虑二次涡对主涡层的影响时，这种切断在计算中将会自动发生。

4) 尾迹中涡量减少的问题 实际测量表明，长时间流动尾迹中的总环量只是边界层分离下泄涡量的 60% 左右。而离散涡模型计算结果，在尾迹中的总环量是原来的 80%。这个差异将影响圆柱绕流长时间流动时的边界层分离位置、举力、近尾迹长度而对 S 数或尾涡所

占的空间大小影响不大，无粘流理论本身不能反映涡量的粘性衰减因而需要设法使计算所得的涡量与实际情况接近。

一种考虑是当具有反方向的涡点相互接近时，或涡点接近物面并小于指定的距离时考虑涡量的对消。反向涡量的小涡相互接近的缘由可能有三种：①后剪切层分离产生的二次涡与边界层分离产生的离散涡在柱体后身附近相互接近；②变形了的或被切断了的主涡涡层被无粘外流带入近尾迹区；③涡量被往下游卷掠散布到整个尾迹。在实际计算中，考虑第一种因素会对消多少涡量将与二次分离及回流区流场计算的准确性有关。^[12]指出考虑第二种因素，计算结果可减小10%的总环量，考虑点涡接近物面（径向距离小于 $\Delta\bar{r} = \Delta r/R = 0.04$ ）时消去涡量的办法，计算结果可减小10%的总环量。通常，新生涡的涡量假设为 $(1/2)\nu_{BS}^2\Delta t$ ，但有的方法是在该强度上乘以小于1的修正因子，使最后计算的总涡量与实验值相配，如Stansby^[13]利用涡量的平均脱落率 $|d\Gamma/dt|_m$ 与当地平均压力 C_{p_m} 关系：

$$|d\Gamma/dt|_m = (U/2)^2(1 - C_{p_m})$$

（ U 为来流速度），再利用实验给出的压力值得到分离点处的平均涡量脱落率为 $1.05U^2$ ，在 $\theta = 90^\circ$ 的柱面位置，该值下降到 $1.0U^2$ 。 $1.05U^2$ 约为 $(1/2)\nu_{BS}^2$ 的80%，因此取离散涡的强度为 $0.4\nu_{BS}^2$ 。考虑到这个修正并结合柱面附近点涡的对消，尾迹涡量的计算结果近似达到实际所测之值。

Sarpkaya^[12]放弃点涡运动时涡量守恒的假设，考虑自由剪切层及涡卷中的湍流发展和耗散，提出一个计算湍流耗散的模式，认为涡量的减小与涡面的长度成正比，在每个时间步长涡量减小前后，保持涡量（沿涡面）的分布函数形式不变并保持涡量中心不变。每个点涡在尾迹运动中的损失量与它的强度及它在重新离散后的涡面中的位置有比例关系，用比例系数 $\lambda(x)$ 表示，当 $t < 5$ 时 $0 < \lambda < 0.01$ ， $\lambda(x)$ 随尾迹中的位置从0线性地变化到0.01；当 $t > 5$ 时， $0 < x < 10$ 时， $\lambda = 0.01$ ； $x > 10$ 时 λ 从0.01递减到0。采取这种衰减规律，计算所得的总环量可减小20%。

上述各种修正方法及数值试验结果给出考虑不同机制后可能得到的结果。进一步的研究应系统分析出实际流动中各种引起涡量减小的因素所起作用的大小以便较正确地反映涡量随时间和空间的变化规律。

3. 圆柱非定常流动及旋涡运动特征

1) 旋涡运动 图4是[3]给出的初期流动过程中旋涡的发展变化过程。计算从 $t = 1$ 开始，边界层与后剪切层假设为准定常变化且具有层流特性。考虑涡核及二次涡涡强修正。计算表明在主涡开始不对称运动前流动结构和旋涡运动经历了这样一个复杂过程：随着时间增长先是对称涡的增长，在主涡影响下后剪切层分离产生二次涡，二次涡增长，切断主涡层并形成二次涡对（主涡变成没有涡量供应的“自由涡”），随着时间继续增长，断裂了的主涡层向下游伸展而二次涡结构松散。图4所示是一部分较短时间内算例，对于不同的计算起始时刻（如 $t = 0.65$ ^[15]）不同的初生涡位置（如 $\theta_0 = 40^\circ$ ），不论是否考虑粘性涡核及二次涡强度修正，都得到了与上述类同的涡旋运动过程。

图5是[12]用再离散方法计算所得的长时间后的旋涡运动，可以看出旋涡的交替周期性脱落和涡街。该算例所得的S数，当 λ 从0.5变到1.5时S数的变化只从0.195到0.22，接近0.20这个平均值，这说明S数的变化对涡量分布的变化并不敏感。在完全发展了的涡街

中，旋涡的纵向距离 b 与横向距离 h 分别为 $b/D = 4.5$, $h/D = 1.08$, 而 $h/b = 0.24$ 。对于高雷诺数情况，虽然旋涡呈周期性脱落，但有序的涡卷结构在下游尾迹中是不存在的，实际出现的是一种堆状的涡云，因此，不少结果是以涡云的形式给出，如图 6 所示。图中可以看出不同方向的离散涡在尾迹中的相互掺混。

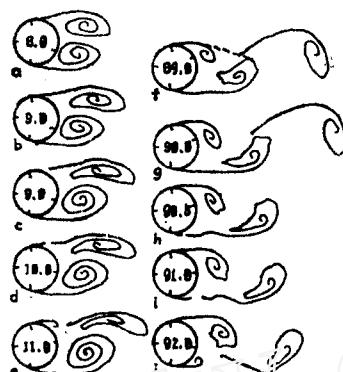


图 5 旋涡运动



图 6 涡云尾迹

2) 边界层分离位置和后剪切层分离位置 相应于流动初期阶段的边界层分离点计算结果如图 7 所示。分离点位置随时间的变化开始很快而后趋于缓慢。当 $\bar{t} \rightarrow 4.5$ 时 [3] 计算所得的分离角趋于 77.5° , [12] 的趋于 78° , 而 [8] 的趋于 70° 。

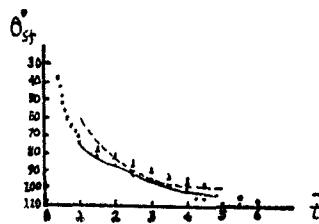


图 7 边界层初期分离位置

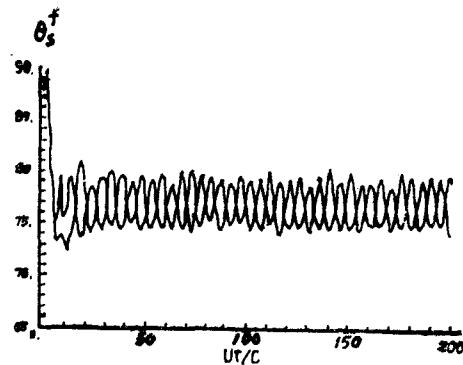


图 8 边界层分离位置

长时间后，边界层分离点位置近于正弦式的周期变化，如图 8 所示^[12]，振幅为 3° ，平均位置在 $\pm 77^\circ$ ，而[8]的解平均值只有 $\pm 67^\circ$ ，低于通常值 $\pm 82^\circ$ 约 20%。[16] 的计算给出最后的分离位置在 $\pm 87^\circ$ ，而当考虑二次分离后计算值为 $\pm 82^\circ$ 。分离点与物面驻点位置相位差为 180° 。新生涡的诞生是促使提早分离的主要原因。

对应于非定常流动长时间以后的情况，目前还缺乏计算后剪切层分离的严格方法。[8]认为后剪切层分离应发生在回流区最小压力点附近并给出一个经验关系式预计后分离点，即： $\theta_s' - \theta_m' = K(\theta_s^f - \theta_m^f)$, $K = (\theta_0 - \theta_m^f)/(\theta_0 - \theta_m)$, r, f 分别表示回流区和柱前的顺流区， θ_s' , θ_m' 及 θ_0 分别为分离点，最小压力点及后驻点位置。[16] 近似地直接取回流区最小压力点位置为后分离点。当然上述两种结果不会一样，也没有实验结果以资比较，对应于流动初期阶

段, [15]在一定假设下, 对于受到逆压梯度持续作用下的那部分后剪切层用边界层方法求解后分离点。后分离点位置受初始尾迹涡影响, 计算从 $\bar{t} = 0.65$ 开始或从 $\bar{t} = 1$ 开始, 尾涡随时间的发展不同, 因而所得的后分离点也不同, 如图 9 及 10 所示。但一致的趋势是随着时间增长, 后分离角(离后驻点)是减小的。同样, 计算结果还有待与其他可用的实验或理论结果比较。但 [3, 15] 及 [16] 都得到了如图 10 所示的物面附近的流动特征图, 图上标明了前后驻点及分离点相对位置关系, 当然其数值是随时间变化的。

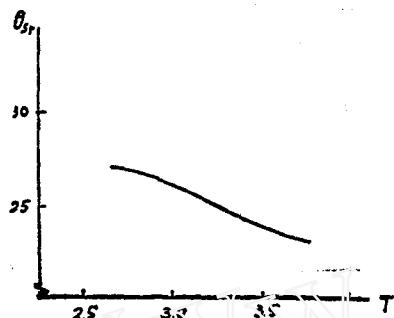


图 9 后剪切层分离角($t_0=0.65$)

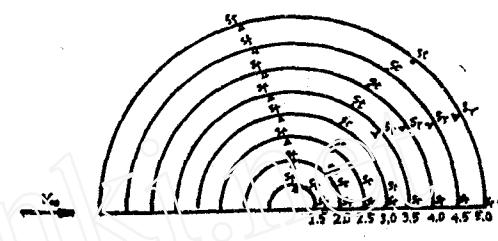


图 10 流动特征图

3) 阻力及横向力系数 实验研究已经给出了圆柱分离流的阻力及横向力特性。在亚临界雷诺数范围内, 阻力系数的变化是: 在初期流动阶段, 由于涡量在柱后的迅速积累而阻力系数上升较快并达到峰值 1.5, 而后随着主涡的不对称运动及脱落而下降, 并呈周期性振荡, 随时间的平均值为 1.2。横向力系数的实验结果还不够多, 数据分散度很大。在离散涡方法的理论计算中, 边界层分离位置计算是否正确, 二次涡影响是否得到考虑, 旋涡强度考虑是否恰当都会影响到阻力及横向力计算结果。因为上述问题都影响到尾迹中环量分布的估计是否正确。

[16] 及 [3] 的计算都表明不计及二次涡的影响阻力系数将会高达 2 左右, 而考虑该问题以后阻力系数计算结果下降到 1.3, 1.2 左右如图 15 所示。[3] 的计算还表明二次涡强度大小影响阻力大小。[3] 的计算表明, 如果边界层分离平均位置在 $\pm 67^\circ$, 则阻力系数只有 0.9, 设法控制分离点在 $\pm 82^\circ$, 则阻力系数趋于 1.2。[12] 只考虑涡量在尾迹中的衰减一种因素, 计算给出与实验几乎很相符的结果。

作为性态介绍, 图 17, 18 给出了阻力系数 C_D 及横向力系数 C_L 随时间的周期变化, [12] 算例中 C_D 的振荡频率约为涡脱落频率的 2 倍, 振幅为 0.06, C_L 的产生是由于涡的不对称引起, 其变化的平均振幅为 0.65, 振荡频率为 0.1025, 对应于 $S = 0.205$ 。[16] 考虑到二次涡影响使它的横向力计算从原来没有考虑时的 2 下降为 0.60, 接近于实验平均值。见图 15, 16。

4) 柱面压力分布及位流速度 柱面压力分布算例, 在初期流动阶段如图 12 所示^[3]。图中箭头表示当时的流动方向。由图可以看到物面附近部分回流区从 $\bar{t} = 3$ 起将处于逆压梯

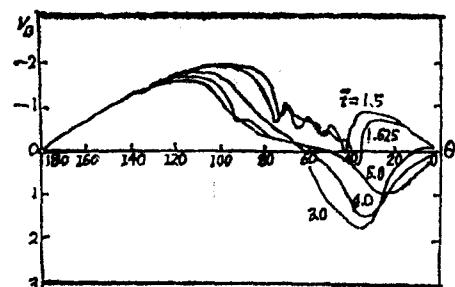


图 11 物面位流速度

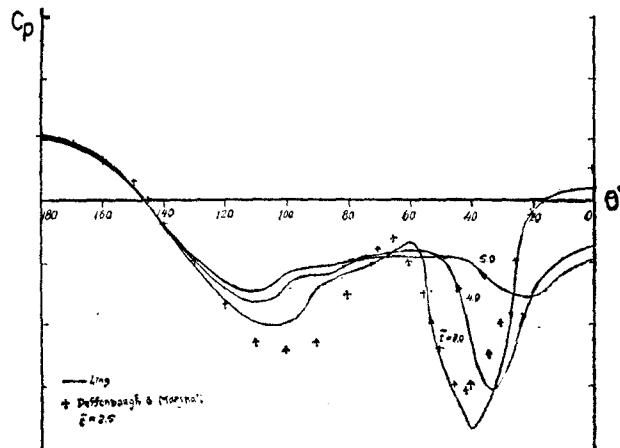


图 12 柱面压力分布

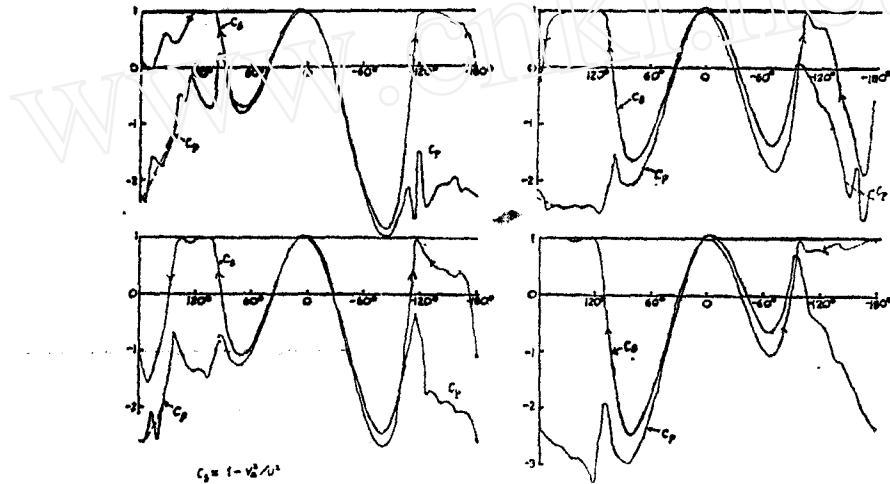


图 13 柱面压力分布 ($\bar{t}=31.2, 32.2, 33.2, 34.2$ (Stansby & Dixon))

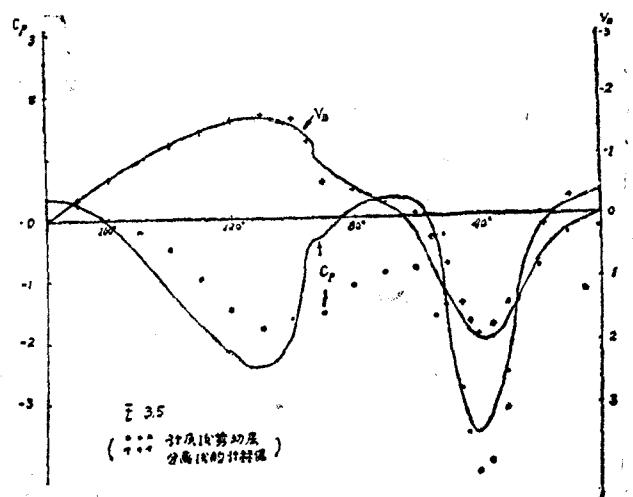


图 14 二次涡对压力及速度的影响^{[3][4][5]}

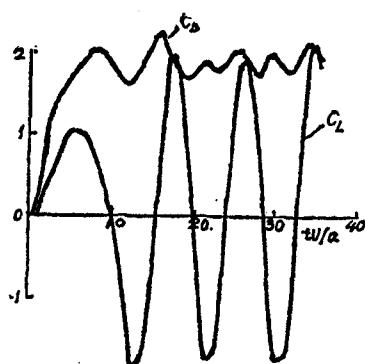


图 15 (Stansby & Dixon) (不考虑后剪切层分离)

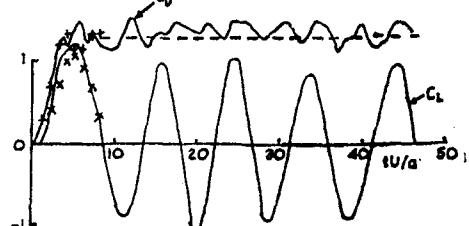


图 16 考虑及二次涡影响的计算结果(Stansby)

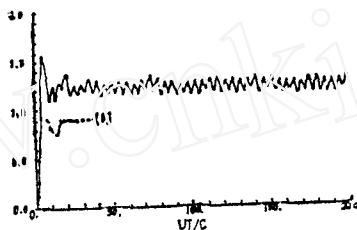


图 17 阻力系数

度的持续作用下。图14说明二次涡的存在将改变原来的柱面压力分布，可以看出它的影响。相应于长时间流动的物面压力分布如图13所示^[10]。柱面位流速度分布计算如图11和13所示。无论初期流动或长时间流动情况，柱面后身回流速度可达到与来流相同的量级。基于压力和速度的这些计算，后剪切层分离在非定常流过程中似乎是不可避免的，用离散涡方法计算流场可能会导致较大误差。图中压力曲线的波动是由点涡靠近柱面引起的，可由平均值（虚线）代替。目前还没有恰当的非定常实验数据来作比较以分析离散涡方法在流场计算中的误差。图12比较了[3]和[8]两个方法计算所得的压力分布，这两者的结果还是比较相近。

4. 需要进一步研究的问题

①细致考虑后剪切层在整个非定常运动过程中的特性，深入研究二次涡问题明确主涡脱落机理；②估计引起环量减少的各种机制在实际流动中的作用，建立涡量衰减模式；③在考虑二次涡对主涡层的切断作用及它对总环量的对消作用基础上，计算长时间绕流时的圆柱受力和旋涡运动；④横向力实验研究；⑤用离散涡方法作为初步近似改进流场计算；⑥开展来流为非均匀或振荡型的圆柱绕流研究。

文中附图由张文同志帮助绘制，作者谨致谢意。

参 考 文 献

- 1 Sarpkaya T., Isaacson M., Mechanics of Wave Force on Offshore Structure, Van Nostrand Reinhold Company(1981).
- 2 Coutancean M., Bouard R., *JFM*, **101** (1980): 3.
- 3 凌国灿, 圆柱非定常运动初期旋涡运动, 力学学报, 3(1983).
- 4 Saffman P.G., Baker G.R., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **11** (1979).
- 5 Fink P.T., Soh, W.K., Tenth Symp. Naval Hydrodynamics.
- 6 Chorin A.J., Bernard P.S., *J. Comput. Phys.*, **13** (1973): 423--429.
- 7 Kuwahara K., Takami H., *J. Phys. Jpn.*, **34** (1973): 247--253.
- 8 Deffenbaugh F.D., Marshall F.J., *AIAA J.*, **14**, 7.
- 9 Batchelor G.K., An Introduction to Fluid Mechanics, Cambridge Univ. Press, England(1970).
- 10 Tellionis D.P., Tsahalis D.T., 24th Internat. Astronautical Congress, Baku.
- 11 凌国灿、尹协远, 圆柱非定常运动的离散涡模型及初期运动研究, 中国科学院力学研究所研究报告(1979).
- 12 Sarpkaya T., Shoaff R.L., 17th Aerospace Sciences Meeting(Jan. 15--17, 1979).
- 13 Stansby P.K., *The Aeronautical Quarterly*, **2** (1981).
- 14 Yang H.T. & Barlev, *JAM*, **43**, 1 (1976).
- 15 凌国灿、尹协远, 二次涡与卡门涡形成过程, 力学学报, 1 (1982). Ling Guocan, Yin Xieyuan, Proceedings of the First Asian Congress of Fluid Mechanics, Bangalore, India (1980).
- 16 Stansby P.K., Dixon A.G., *The Aeronautical Quarterly*, **9** (1981).
- 17 Bearm P.W., Graham I.R.M., *JFM*, **99**, 2 (1980).

THE VORTEX MOTION OF FLOW AROUND A CIRCULAR CYLINDER AND DISCRETE VORTICES METHOD

Ling Guo-can

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

The discrete vortices methods for the vortex motion of the flow around a circular cylinder are reviewed and discussed, including some of author's own results. Some recent results are also given, and some problems which should be further studied are suggested.