

弹塑性有限元分析的凝缩法

中国科学院力学研究所 任其全

摘 要

本文提出了弹塑性有限元分析的一种新方法——“弹塑性有限元分析的凝缩法”。按这种方法对结构进行弹塑性计算，与普通方法相比，可以大量缩短计算时间，从而取得明显的经济效益。

一、引 言

在结构的弹塑性有限元分析中通常采用变刚度法、初应力法和初应变法^[1,2]。通过大量实例计算表明，对于复杂或大型结构无论用这三种方法中的哪一种都要花费较长的计算时间。

本文提出的“弹塑性有限元分析的凝缩法”能显著地节省机时。该方法的基本思想在于，先用通常的变刚度法经过少量的弹塑性计算（3至6增量步），将结构自动化分成三个独立的区域：只含有弹性单元的“弹性区”、含有全部塑性单元及少量弹性单元的混合区及“弹性区”。与混合区交界处节点的集合——公共区。由于“弹性区”的刚度阵在整个弹塑性计算中保持不变，故可以把它从整个结构中分离出去，而只考虑混合区。“弹性区”对混合区的作用以“等效节点力”的形式加在公共区的节点上。这样，弹塑性计算的大量工作（反复形成刚度阵，求解方程组）只在混合区内进行。对于通常的工程结构，混合区只是整个结构的一块很小的区域。因此，该方法可以达到大幅度地减少机时的目的。按普通法及本文方法编制了两个平面三角形有限元程序，计算了若干种结构。结果表明，这种方法比普通算法省机时50%以上。可以预计，这种方法的优点在大型结构特别是在三维弹塑性有限元计算中将更加明显。

二、基本公式

结构的弹塑性有限元分析的总方程为

$$\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{P} \quad (1)$$

式中 \mathbf{A} 为总刚度阵， $\Delta \mathbf{U}$ 为节点位移增量， $\Delta \mathbf{P}$ 为等效节点力增量。

将方程（1） \mathbf{A} 中的行与列， $\Delta \mathbf{U}$ 和 $\Delta \mathbf{P}$ 的各分量按“弹性区”、公共区及混合区的节点各自编号顺序重新排列，可得与（1）式等价的方程

1984年5月9日收到。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ee} & \mathbf{A}_{em} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{me} & \mathbf{A}_{mm} & \mathbf{A}_{mp} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{pm} & \mathbf{A}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_e \\ \Delta \mathbf{U}_m \\ \Delta \mathbf{U}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P}_e \\ \Delta \mathbf{P}_m \\ \Delta \mathbf{P}_p \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中 \mathbf{A}_{ee} , \mathbf{A}_{mm} , \mathbf{A}_{pp} 分别为“弹性区”, 公共区和混合区的刚度阵;

\mathbf{A}_{em} , \mathbf{A}_{pm} 分别为公共区对“弹性区”和混合区的贡献阵;

$$\mathbf{A}_{me} = \mathbf{A}_{em}^T, \quad \mathbf{A}_{mp} = \mathbf{A}_{pm}^T;$$

$\Delta \mathbf{U}_e$ 与 $\Delta \mathbf{P}_e$, $\Delta \mathbf{U}_m$ 与 $\Delta \mathbf{P}_m$, $\Delta \mathbf{U}_p$ 与 $\Delta \mathbf{P}_p$ 分别为“弹性区”, 公共区及混合区节点位移增量与等效节点力增量。

将 (2) 式展开

$$\mathbf{A}_{ee} \cdot \Delta \mathbf{U}_e + \mathbf{A}_{em} \cdot \Delta \mathbf{U}_m = \Delta \mathbf{P}_e \quad (3)$$

$$\mathbf{A}_{me} \cdot \Delta \mathbf{U}_e + \mathbf{A}_{mm} \cdot \Delta \mathbf{U}_m + \mathbf{A}_{mp} \cdot \Delta \mathbf{U}_p = \Delta \mathbf{P}_m \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_{pm} \cdot \Delta \mathbf{U}_m + \mathbf{A}_{pp} \cdot \Delta \mathbf{U}_p = \Delta \mathbf{P}_p \quad (5)$$

由 (3) 式可得

$$\Delta \mathbf{U}_e = \mathbf{A}_{ee}^{-1} \cdot (\Delta \mathbf{P}_e - \mathbf{A}_{em} \cdot \Delta \mathbf{U}_m) \quad (6)$$

把 (6) 式代入 (4) 式中得

$$(\mathbf{A}_{mm} - \mathbf{A}_{em}^T \cdot \mathbf{A}_{ee}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{em}) \cdot \Delta \mathbf{U}_m + \mathbf{A}_{mp} \cdot \Delta \mathbf{U}_p = \Delta \mathbf{P}_m - \mathbf{A}_{em}^T \cdot \mathbf{A}_{ee}^{-1} \cdot \Delta \mathbf{P}_e \quad (7)$$

令

$$\mathbf{A}_{mm}^* = \mathbf{A}_{mm} - \mathbf{A}_{em}^T \cdot \mathbf{A}_{ee}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{em} \quad (8)$$

$$\Delta \mathbf{P}_m^* = \Delta \mathbf{P}_m - \mathbf{A}_{em}^T \cdot \mathbf{A}_{ee}^{-1} \cdot \Delta \mathbf{P}_e \quad (9)$$

将 (5) 式与 (7) 式联立, 考虑到 (8) 式、(9) 式得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{pp} & \mathbf{A}_{pm} \\ \mathbf{A}_{mp} & \mathbf{A}_{mm}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_p \\ \Delta \mathbf{U}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P}_p \\ \Delta \mathbf{P}_m^* \end{bmatrix} \quad (10)$$

(10) 式就是混合区对应的方程。实质上, (9) 式中的 $-\mathbf{A}_{em}^T \cdot \mathbf{A}_{ee}^{-1} \cdot \Delta \mathbf{P}_e$ 是“弹性区”对混合区的作用。

大部分弹塑性计算工作就是反复形成 (10) 式的系数阵及求解。由于 (10) 式与 (1) 式相比阶数甚小, 所以计算只用很少的时间。

\mathbf{A}_{mm} 是由“弹性区”与混合区单元刚度阵中跟公共区节点相应的系数组集 \mathbf{A}_{mm}^e , \mathbf{A}_{mm}^p 叠加而得, 故有

$$\mathbf{A}_{mm} = \mathbf{A}_{mm}^e + \mathbf{A}_{mm}^p \quad (11)$$

于是 (8) 式可写成

$$\mathbf{A}_{mm}^* = \mathbf{A}_{mm}^p + (\mathbf{A}_{mm}^e - \mathbf{A}_{em}^T \cdot \mathbf{A}_{ee}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{em}) \quad (12)$$

显然, (12) 式的括号部分只需计算一次。(10) 式的系数阵中需要反复形成的只是 \mathbf{A}_{pp} , \mathbf{A}_{pm} 和 \mathbf{A}_{mm}^p

由 (10) 式的解 $\Delta \mathbf{U}_p$, $\Delta \mathbf{U}_m$ 求出混合区各单元的应变、应力增量, 把它们叠加到前一级载荷下的应变、应力上。当求出混合区各单元的总应变、总应力及各节点的总位移 (它包含了公共区节点的位移 \mathbf{U}_m) 之后, 再根据下列公式求出“弹性区”节点的总位移 \mathbf{U}_e 。

$$\mathbf{U}_e = \mathbf{A}_{ee}^{-1} \cdot (\mathbf{P}_e - \mathbf{A}_{em} \cdot \mathbf{U}_m) \quad (13)$$

式中 \mathbf{P}_e 为“弹性区”的等效节点力。

三、几个主要措施

1. 将结构划分成“弹性区”与混合区

由于事先并不知道结构的塑性区域的确切位置和范围,为了划分“弹性区”与混合区,采取下列办法:首先求出在全部载荷下结构各单元的弹性等效应力 σ_i^e 与材料屈服极限 σ_s 之比的最大值, $AL=[\sigma_i^e/\sigma_s]_{\max}$ 。根据 AL 大小,将全部载荷中超出弹性的部分分成3~6等份(或称增量步),份数随 AL 增大而增加,最多不超过6。然后对整个结构按通常的变刚度法进行计算,求出结构各单元的等效应力与屈服极限之比 σ_i/σ_s 。

我们引进一个“区分系数” α 。这里,取 $\alpha=0.8$ 。把 $\sigma_i/\sigma_s<\alpha$ 的单元划归“弹性区”,把 $\sigma_i/\sigma_s\geq\alpha$ 的单元划归混合区。

通过若干算例表明,按上述方法划分的混合区包含了结构的真实塑性区。

结构的真实塑性区是按通常的变刚度法把全部载荷中超出弹性的部分分成40等份求得的。显然,把这部分载荷分成3~6等份求得的塑性区及 σ_i/σ_s 与分成40等份求得的塑性区及 σ_i/σ_s 之间有一定的误差。该误差的大小取决于载荷增量的大小。实际上,“区分系数” α 反映了这种误差。对进入塑性程度不同,外形不同的几个例题计算表明,把该载荷分成3~6份与分成20~30份的计算结果误差不超过15%。塑性范围愈小这个误差就愈小。本文把它取为20%,由此确定 $\alpha=1-20\%=0.8$ 。从理论上分析这个误差很有意义,但比较困难,有待进一步研究。

2. 对“弹性区”进行校核

虽然许多实例计算表明,按措施1“弹性区”已不含有塑性单元,但这毕竟没有从理论上严格证明。因此,对“弹性区”各单元进行校核是必要的,其作法如下:

在求“弹性区”各单元应力的同时求等效应力与屈服极限之比的最大值 AL 。若 $AL\leq 1$ 则说明“弹性区”各单元的确都是弹性的,混合区包含了真实的塑性区,计算结果正确。若 $AL> 1$ 则说明混合区没有包含全部的塑性单元,计算结果不对,应把 α 取小些,重新划分“弹性区”与混合区。

3. 对“弹性区”与混合区实行隔离

“弹性区”与混合区应当成为两个独立的系统,通过它们交界处的节点(公共区)传递彼此间的影响。为此,对“弹性区”、混合区及公共区的单元和节点实行独立编号。把这些工作编进程序由计算机自动完成。实际上,此措施的目的是建立(2)式,把“弹性区”从整个结构中隔离出去。

4. 节省内存

在程序中要计算(8)式和(9)式中的 $A_{ee}^{-1}\cdot A_{em}$ 及 $A_{ee}^{-1}\cdot \Delta P_e$ 。若直接求 A_{ee}^{-1} ,则必须以满三角形存贮 A_{ee}^{-1} 的元素。这将大大增加对机器内存的需要量。为节省内存,可以不求 A_{ee}^{-1} ,而把 A_{em} 的每一列及 ΔP_e 看作以 A_{ee} 为系数阵的方程的右端项进行求解。该方程的解即为 $A_{ee}^{-1}\cdot \Delta P_e$ 和 $A_{ee}^{-1}\cdot A_{em}$ 。在具体求解过程中,为省机时,先把 A_{ee} 分解,然后对 A_{em} 的每一列及 ΔP_e 进行分解再回代。

四、算 例

以下几个算例都是用平面三角形有限元在TQ-6机上计算的。在有限元网格图中黑

色区域与斜影区域共同标示混合区,其他则为“弹性区”。黑色区域表示结构的真实塑性区,它是按通常的弹塑性有限元法(变刚度法)得到的。按本文方法也得到了与普通法完全一致的塑性区。混合区中弹性单元与塑性单元由 $\sigma_i/\sigma_s \leq 1$ 或 $\sigma_i/\sigma_s > 1$ 识别。从图中不仅看到按本文方法求得的混合区把真实塑性区包含在内,而且还可看到混合区只占整个结构的很小一部分。为了将本文方法与普通法比较,对混合区也按变刚度法计算,采用的增量步数与求真实塑性区时所用的步数相同。计算表明,用本文方法与用普通法得到的结果完全一致(9位有效数字),而前者所需机时却不到后者的50%,详见表1。

表 1 机时比较表

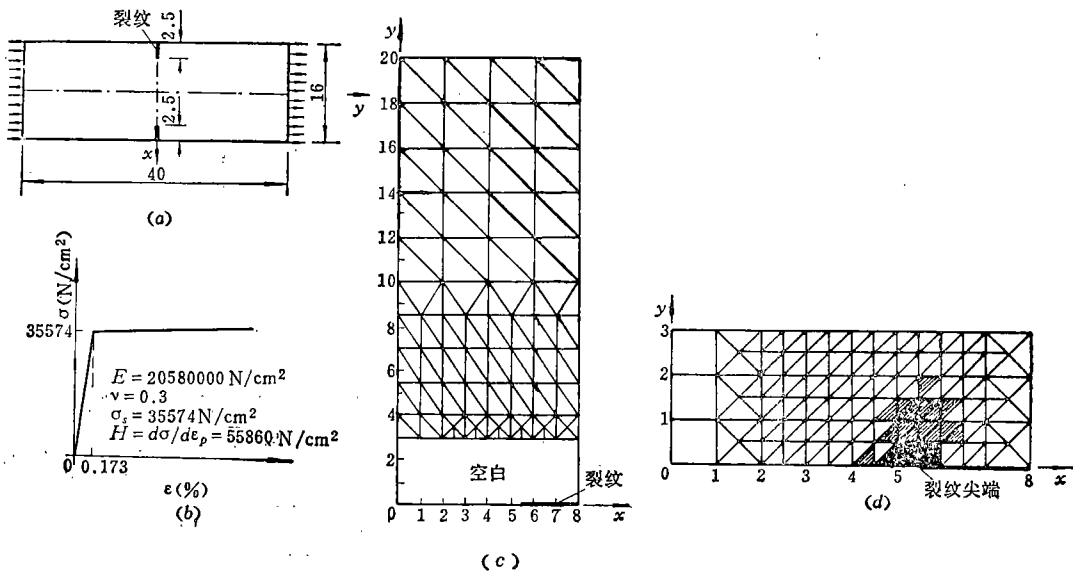
Tab. 1 Comparison of the operation

方法	算例 机时	裂 纹 板		V 形 缺 口板	半 圆 形 缺口板 I	半 圆 形 缺口板 II	涡轮盘与 叶片接触	
		LO=167 EO=289 AL=1.5	LO=321, EO=589 AL=1.8	AL=2.123	LO=135 EO=224 AL=1.5	LO=147 EO=246 AL=1.5	LO=147 EO=246 AL=1.5	LO=461 EO=721 AL=1.275
本文方法		7.2	18.7	33.7	5.2	7.2	13.2	60
普通算法		16.5	79.0	79.0	11.0	15.0	32.5	150
两者之比		44%	24%	43%	47%	48%	41%	40%

注: 机时单位: 分钟; LO: 节点总数; EO: 单元总数。

除了第 5 个算例采取实际材料而外,其他各算例均用相同材料,其机械性质如图 1 b 所示。在图表中出现的 AL 表示整个结构完全按照弹性计算时所得到的各单元等效应力与屈服极限之比的最大值,它反映了结构进入塑性的程度。对于几何形状及载荷关于 x、y 轴为对称的结构,仅计算其四分之一。尺寸单位为 cm,板厚为 1 cm。下面只简单给出各算例的几何图形、载荷及有限元划分的示意图。

算例 1. 裂纹板(见图 1)。



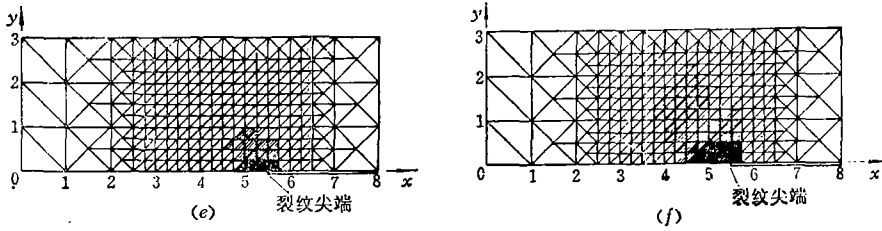


图1 裂纹板几何形状、载荷及有限元划分

(a) 几何形状与载荷; (b) 材料机械性质; (c) 有限元划分; (d) 图(c)的空白部分 (AL=1.5); (e) 图(c)的空白部分 (AL=1.8); (f) 图(c)的空白部分 (AL=2.123)。

Fig. 1 Planform, Load and Finite element division of cracked plate

(a) Planform and Load; (b) Mechanical property of material; (c) Finite element division; (d) Blank space of Fig(c) (AL=1.5); (e) Blank space of Fig(c) (AL=1.8); (f) Blank space of Fig. (c) (AL=2.123).

算例 2. V 型缺口板(见图 2)。

算例 3. 半圆形缺口板 I (见图 3)。

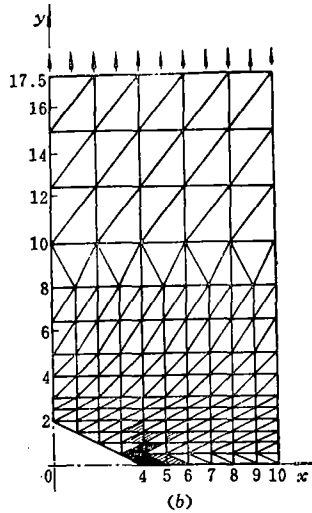
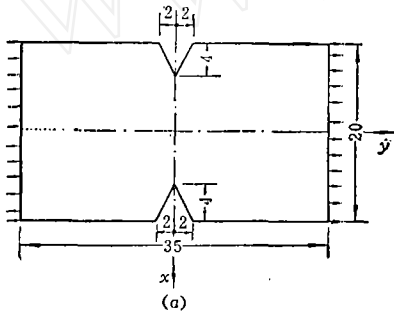


图 2 V 型缺口板的几何图形、载荷及有限元划分

(a) 几何形状与载荷; (b) 有限元划分。
Fig. 2 Planform, Load and Finite element division of V notched plate

(a) Planform and Load; (b) Finite element division.

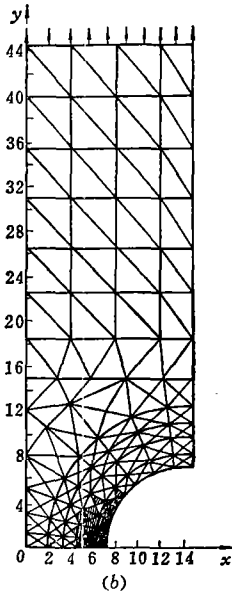
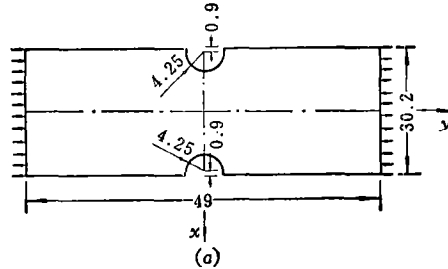


图 3 半圆形缺口板 I 的几何形状、载荷及有限元划分

(a) 几何形状与载荷; (b) 有限元划分 (AL=1.5)。
Fig. 3 Planform, Load and Finite element division of Semicircular notched Plate I

(a) Planform and Load; (b) Finite element division (AL=1.5).

算例 4 . 半圆形缺口板 II (见图 4)。

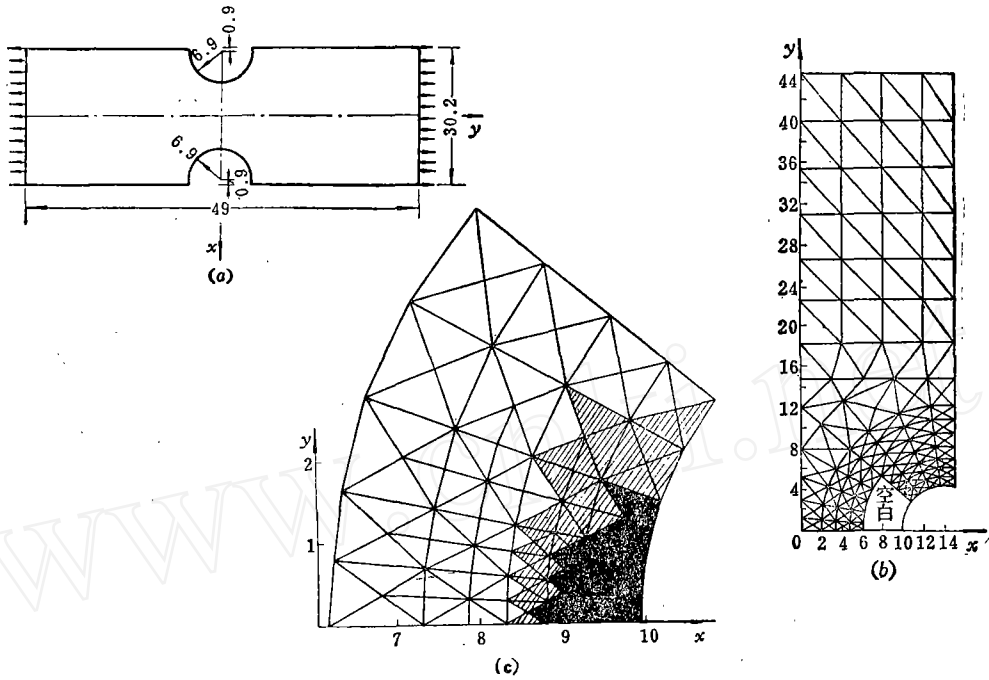


图4 半圆形缺口板 II 的几何形状、载荷及有限元划分

(a) 几何形状与载荷; (b) 有限元划分; (c) 图(b)的空白部分(AL = 1.5)。

Fig. 4 Planform, Load and Finite element division of semicircular notched plate II

(a) Planform and Load, (b) Finite element division, (c) Blank space of Fig(b)(AL = 1.5).

算例 5 . 涡轮盘与叶片之间的接触。

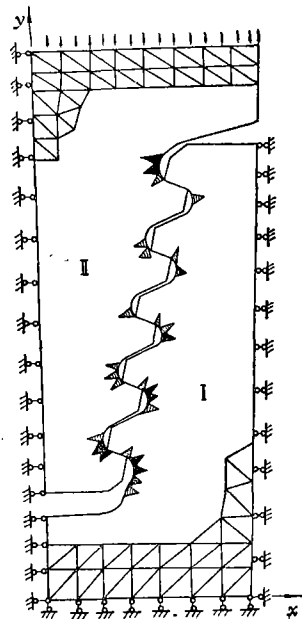


图5 几何形状、荷载及有限元划分

I: 盘的榫槽; II: 叶片榫头。

Fig. 5 Planform, Load and Finite element division

I, Mortise notch of the disk, II: Tenon of the blade.

图 5 是涡轮盘与叶片连接部位的形状及受力简图。载荷是离心力。叶身对叶片的作用以均布的表面力代替。涡轮盘榫槽底部近似按轴向固定位移处理。由于变形关于叶片榫头及轮盘榫槽的中线对称, 所以仅考虑各自的一半。

采用三角形有限元, 按平面应变问题计算。在榫齿部位, 三角形网格划分的很密。混合区仅仅由 27 个单元组成。

参 考 文 献

- [1] Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Method, THIRD EDITION, (1977).
[2] 李大潜等编, 有限元素法续讲, 科学出版社, (1979).

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF ELASTIC-PLASTIC MATERIALS BY "CONDENSED APPROACH"

Ren Qiquan

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

A new approach, "condensed approach", is proposed for the finite element analysis of elastic-plastic materials. The total domain of the structure is divided into two regions. One is an elastic region and another is a mixed region of a plastic region blended with some elastic elements. The effects of the elastic region on the mixed region are expressed by equivalent general forces acting on the boundary nodes between the two regions. So the elastic-plastic analysis may be considered only in the mixed region. Because the mixed region is considerably smaller than the elastic region in general, a great deal of operation time to form the general stiffness matrix repeatedly and to solve the equations is saved and computation cost is cut down greatly. Some examples are given in illustration of the approach.